Vetores

Uma partícula que se move em linha reta pode se deslocar em apenas uma direção, sendo o deslocamento positivo em uma e negativo na outra direção. Quando uma partícula se move em três dimensões, um número positivo oi negativo não é suficiente para indicar a orientação, tornando-se necessária a noção de vetor.

Um vetor possui módulo e orientação, seguindo certas regras de combinção. O deslocamento, a velocidade e a aceleração são exemplos de grandezes físicas. Entretanto, nem todas as grandezas físicas envolvem uma orientação. A temperatura, a pressão, a energia, a massa, o tempo, por exemplo, não apontam em nenhuma direção. Essas grandezas são escalares.

A grandeza vetorial mais simples é o deslocamento, ou a mudança da coordenada de posição. Um vetor que representa o deslocamento é chamado de vetor deslocamento. Se uma partícula muda de posição movendo-se de A para B na figura abaixo, dizemos que sofre um deslocamento de A para B, que é representado por uma seta apontando de A para B.

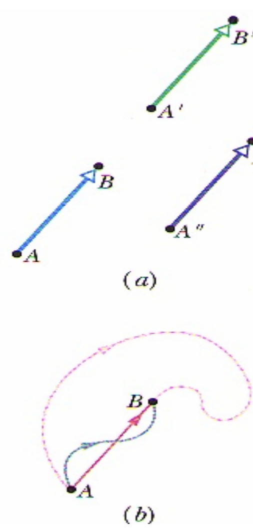


FIG. 3-1 (*a*) As três setas têm o mesmo módulo e orientação e, portanto, representam o mesmo deslocamento. (*b*) As três trajetórias que unem os dois pontos correspondem ao mesmo vetor deslocamento.

Na figura 3-1a, as setas de A para B, de A’ para B’ e de A’’ para B” têm o mesmo módulo e a mesma orientação; assim, escificam vetores deslocamento iguais e representam a mesma variação de posição da partícula. Um vetor pode ser deslocado sem queo valor mude se o comprimento, a direção e o sentido permanecerem os mesmos.

O vetor deslocamento nada nos diz sobre a trajetória da partícula. Na figra 3-1b, por exemplo, as três trajetórias que unem os pontos A e B correspondem ao mesmo vetor deslocamento da figura 3-1a. Um vetor deslocamento representa apenas o resultado final do movimento, não o movimento propriamente dito.

Soma Geométrica de Vetores

Suponha que, como no diagrama vetorial da Fig. 3-2a, uma partícula se desloque de A a B e depois a C. O deslocamento total é representado por dois vetores deslocamento sucessivos, AB e BC. O deslocamento total é um único deslocamento de A para C.

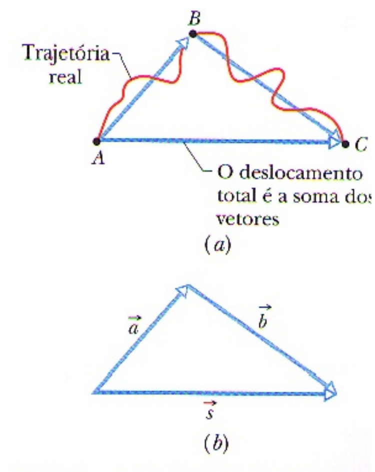


FIG. 3-2 (*a*) *AC* é o vetor soma dos vetores *AB* e *BC*. (*b*) Os mesmos vetores com outros nomes.

Chamaremos AC de vetor soma (um Vetor resultante) dos vetores AB e BC. Essa soma não é uma soma algébrica comum.

Daqui em diante, um vetor será representado com uma seta sobre um símbolo em itálico, por exemplo, $\vec{a}$. Para indicar apenas o módulo do vetor (uma grandeza positiva, sem direção e sem sentido) usamos o símbolo em itálico sem a seta, como *a*. Você pode usar apenas um símbolo manuscrito.

A relação entre os três vetores da figura 3-2b pode ser representada através da equação vetorial:

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b},$$

Segundo a qual o vetor $\vec{s}$ é o vetor soma dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$. O símbolo + na equação e a palavra soma tem um significado diferente no caso de vetores porque, ao contrário do que acontece na álgebra comum, eles envolvem tanto o módulo como a direção e o sentido da grandeza.

Somar $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é igual a somar $\vec{b}$ e $\vec{a}$, ou seja,

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \qquad \text{(lei comutativa).}$$

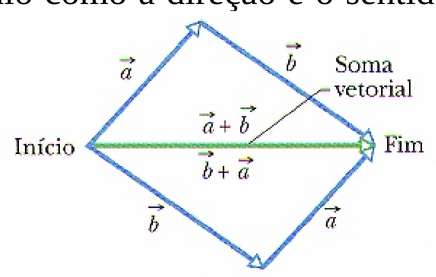


FIG. 3-3 A ordem em que os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são somados não afeta o resultado; veja a Eq. 3-2.

Além disso, quando existem mais de dois vetores podemos agrupá-los em qualquer ordem para somá-los.

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \qquad \text{(lei associativa).}$$

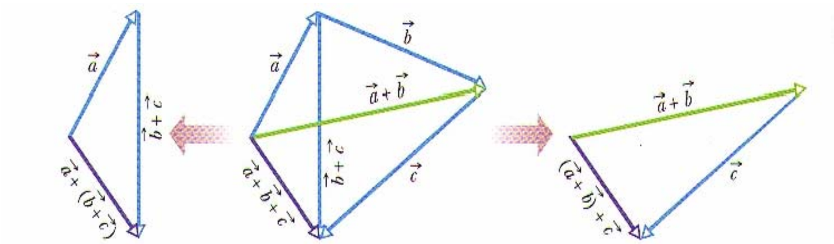


FIG. 3-4 Os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ podem ser agrupados em qualquer ordem para serem somados;

O vetor -$\vec{b}$ é um vetor com mesmo módulo e direção de $\vec{b}$ e o sentido oposto. Veja figura 3-5. A soma de dois vetores na figura 3-5 é:

$$\vec{b}+(-\vec{b})=0$$

Assim, somar -$\vec{b}$ é o mesmo que subtrair $\vec{b}$.

$$\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}) \qquad \text{(subtração de vetores);}$$

Ou seja, calculamos o vetor diferença $\vec{d}$ somando o vetor -$\vec{b}$ ao vetor $\vec{a}$. A figura 3-6 mostra como isso é feito geometricamente.

Como na álgebra comum, podemos passar um termo que inclui um símbolo de vetor de um lado de uma equação vetorial para outro, mas devemos mudar o sinal. Por exemplo:

$$\vec{d}+\vec{b}=\vec{a} \text{ ou } \vec{a}=\vec{d}+\vec{b}$$

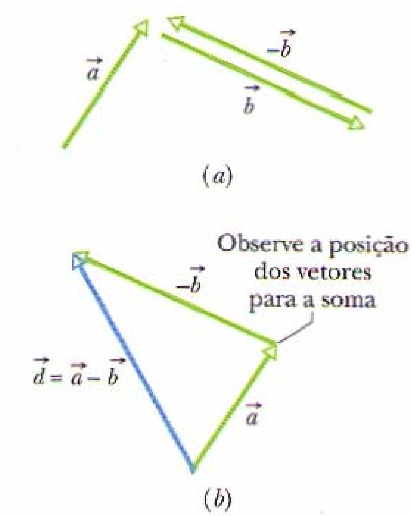


FIG. 3-6 (a) Os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $-\vec{b}$. (b) Para subtrair o vetor $\vec{b}$ do vetor $\vec{a}$, basta somar o vetor $-\vec{b}$ ao vetor $\vec{a}$.

Embora tenhamos usado nestes exemplos vetores deslocamento, as regras para somar e subtrair vetores se aplicam a qualquer tipo de vetor. Entretanto, apenas vetores do mesmo tipo devem ser somados. Assim, por exemplo, podemos somar dois deslocamentos ou duas velocidades, mas não faz sentido somar um deslocamento e uma velocidade. Na aritmética dos escalares isso seria como somar 30 s e 15 m.

Componentes de Vetores

Uma técnica elegante e simples para somar vetores envolve o uso da álgebra, mas requer que os vetores sejam representados em um sistema de coordenadas retangulares. Os eixos x e y são desenhados no plano do papel, como na figura 3-8a. O eixo z é perpendicular ao papel e vamos ignorá-lo por enquanto.

Uma componente de um vetor é a projeção do vetor em um eixo. Na figura ao lado, a_x é a componente do vetor $\vec{a}$ em relação ao eixo x e a_y é a componente do vetor $\vec{a}$ em relação ao eixo y. Para encontrar a projeção de um vetor em relação ao eixo traçamos retas perpendiculares ao eixo a partir da origem e da extremidade do vetor.

Componente x do vetor (a_x): é a projeção de um vetor em relação ao eixo x.

Componente y do vetor (a_y): é a projeção de um vetor em relação em relação ao eixo y.

Decomposição de um vetor ó nome dado ao processo de obtenção das componentes do vetor.

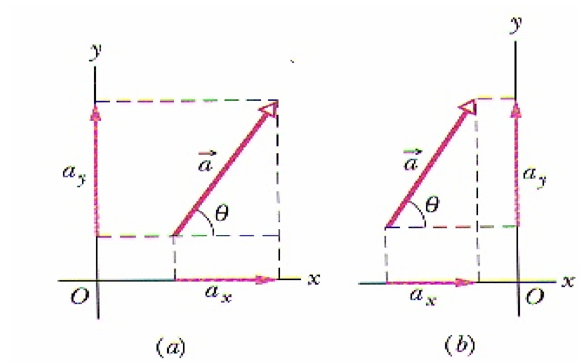
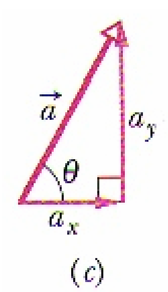


FIG. 3-8 (*a*) As componentes a_x e a_y do vetor $\vec{a}$. (*b*) As componentes não mudam quando o vetor é deslocado, desde que o módulo e a orientação sejam mantidos.



(*c*) As componentes correspondem aos catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é o módulo do vetor.

No caso mais geral, um vetor tem três componentes. Aqui, trataremos vetores em duas dimensões. Neste caso, eles terão apenas duas componentes, sendo a componente z nula.

Na figura, as componentes de $\vec{a}$ são:

$$a_x = a \cos\theta \quad \text{e} \quad a_y = a \operatorname{sen}\theta,$$

onde θ é o ângulo que o vetor $\vec{a}$ faz com o semi-eixo x positivo e a é o módulo de $\vec{a}$.

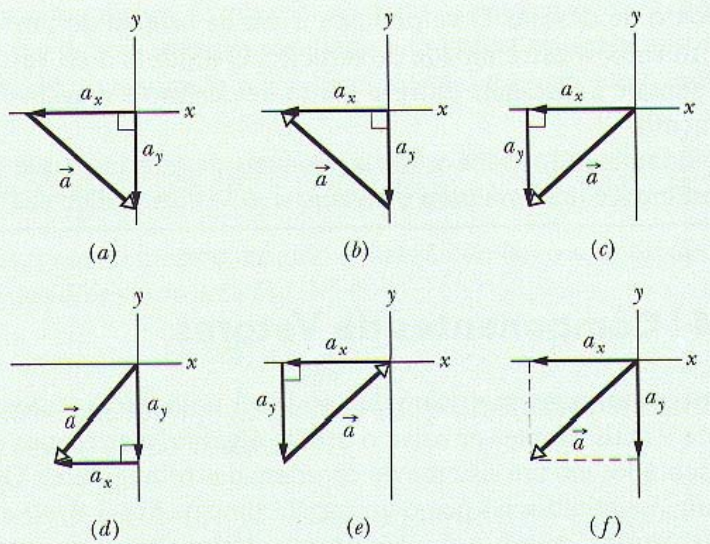
Se conhecemos um vetor na notação de componentes (a_x e a_y) e queremos especificá-lo na notação módulo-ângulo (a e θ), podemos usar as equações:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{e} \quad \tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$$

No caso mais geral de três dimensões, precisamos do módulo e de dois ângulos (a, θ, ϕ) ou de três componentes (a_x e a_y, a_z) para especificar um vetor.

TESTE 2

Quais dos métodos indicados na figura são corretos para se determinar o vetor $\vec{a}$ a partir das componentes x e y?



Exemplo 3-2

Um pequeno avião decola de um aeroporto em um dia nublado e é avistado mais tarde a 215 km de distância, em um curso que faz um ângulo de 22° a leste do norte. A que distância a leste e ao norte do aeroporto está o avião no momento em que é avistado?

IDÉIA-CHAVE Conhecemos o módulo (215 km) e o ângulo (22° a leste do norte) de um vetor e precisamos determinar as componentes do vetor.

Cálculos: Desenhamos um sistema de coordenadas xy com o sentido positivo de x para leste e o de y para o norte (Fig. 3-10). Por conveniência, a origem é colocada no aeroporto. O deslocamento $\vec{d}$ do avião aponta da origem para o ponto onde o avião foi avistado.

Para determinar as componentes de $\vec{d}$, usamos a Eq. 3-5 com $\theta = 68°$ ($= 90° - 22°$):

$$d_x = d\cos\theta = (215\text{ km})(\cos 68°) = 81\text{ km} \qquad \text{(Resposta)}$$

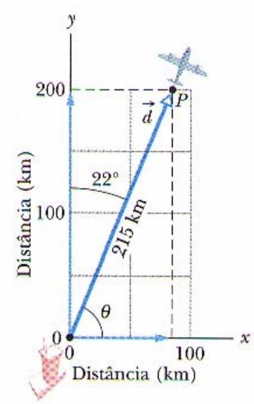


FIG. 3-10 Um avião decola de um aeroporto na origem e é avistado mais tarde no ponto P.

$$d_y = d\,\text{sen}\,\theta = (215\text{ km})(\text{sen } 68°) = 199\text{ km} \approx 2{,}0 \times 10^2\text{ km.} \qquad \text{(Resposta)}$$

Assim, o avião foi avistado 81 km a leste e $2{,}0 \times 10^2$ km ao norte do aeroporto.

Algumas informações importantes:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{cateto adjacente a } \theta}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{cateto adjacente a } \theta}$$

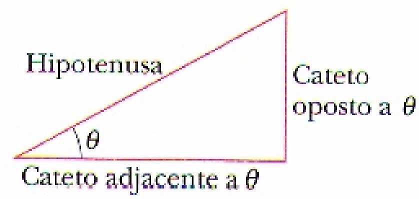


FIG. 3-12 Tri unções trigonométricas. Veja também o Apêndice E.

Vetores Unitários

Vetor unitário é um vetor que tem módulo igual a 1 e aponta em uma certa direção. Um vetor unitário não tem dimensão, nem unidade. Sua única função é especificar uma orientação. Usaremos para os vetores unitários que indicam os sentidos positivos dos eixos x, y e z a nomenclatura $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$, respectivamente. As setas foram substituídas por ^, para indicar que o vetor é unitário.

Os vetores unitários são muito úteis para especificar outros vetores; por exemplo, os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ das figuras 3.8 e 3.9 podem ser expressos como:

$$\vec{a} = a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}}$$

$$\vec{b} = b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}}.$$

Essas duas equações estão ilustradas na figura 3-15. As grandezas $a_x\ \hat{i}$ e $a_y\ \hat{j}$ são vetores conhecidos como componentes vetoriais de $\vec{a}$. As grandezas a_x e a_y são escalares conhecidos como componentes escalares (ou simplesmente, componentes) de $\vec{a}$.

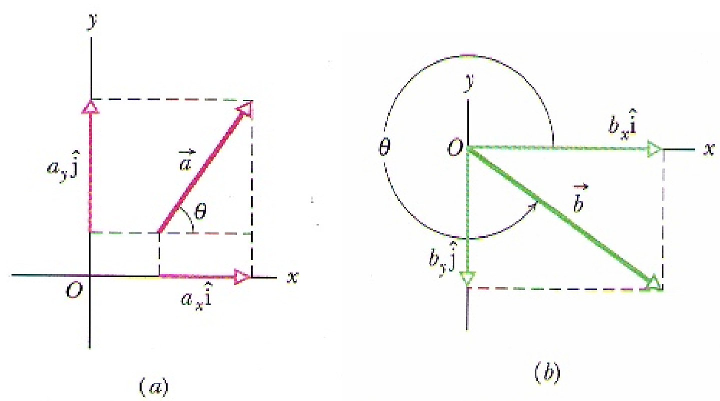


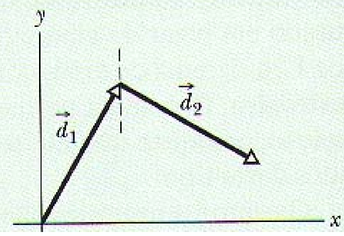
FIG. 3-15 (a) Componentes vetoriais do vetor $\vec{a}$. (b) Componentes vetoriais do vetor $\vec{b}$.

Soma de vetores através de suas componentes

Considere a equação abaixo, segundo a qual o vetor $\vec{r}$ é igual ao vetor ($\vec{a}+\vec{b}$). Isso significa que cada componente de $\vec{r}$ deve ser igual à componente correspondente de ($\vec{a}+\vec{b}$):

$$r_x = a_x + b_x$$
$$r_y = a_y + b_y$$
$$r_z = a_z + b_z.$$

TESTE 3 (a) Quais são os sinais das componentes x de $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$ na figura ao lado? (b) Quais são os sinais das componentes y de $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$? Quais são os sinais das componentes x e y de $\vec{d}_1 + \vec{d}_2$?



Exemplo 3-4

A Fig. 3-16a mostra os seguintes vetores:

$$\vec{a} = (4{,}2\text{ m})\hat{\imath} - (1{,}5\text{ m})\hat{\jmath},$$
$$\vec{b} = (-1{,}6\text{ m})\hat{\imath} + (2{,}9\text{ m})\hat{\jmath},$$
e
$$\vec{c} = (-3{,}7\text{ m})\hat{\jmath}.$$

Qual é o vetor soma $\vec{r}$, que também aparece na Fig. 3-16a?

IDÉIA-CHAVE Podemos somar os três vetores somando suas componentes, eixo por eixo, e usando as componentes resultantes para obter o vetor soma $\vec{r}$.

Cálculos: No caso do eixo x, somamos as componentes x de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ para obter a componente x do vetor soma $\vec{r}$:

$$r_x = a_x + b_x + c_x$$
$$= 4{,}2\text{ m} - 1{,}6\text{ m} + 0 = 2{,}6\text{ m}.$$

Analogamente, no caso do eixo y,

$$r_y = a_y + b_y + c_y$$
$$= -1{,}5\text{ m} + 2{,}9\text{ m} - 3{,}7\text{ m} = -2{,}3\text{ m}.$$

Podemos então combinar essas componentes de $\vec{r}$ para escrever o vetor em termos dos vetores unitários:

$$\vec{r} = (2{,}6\text{ m})\hat{\imath} - (2{,}3\text{ m})\hat{\jmath}, \qquad \text{(Resposta)}$$

onde $(2{,}6\text{ m})\hat{\imath}$ é a componente vetorial de $\vec{r}$ em relação ao longo do eixo x, e $-(2{,}3\text{ m})\hat{\jmath}$ é a componente vetorial de $\vec{r}$ em relação ao eixo y. A Fig. 3-16b mostra uma forma de obter o vetor $\vec{r}$ a partir dessas componentes. (Você pode imaginar outra forma?)

Também podemos resolver o problema determinando o módulo e o ângulo de $\vec{r}$. De acordo com a Eq. 3-6, o módulo é dado por

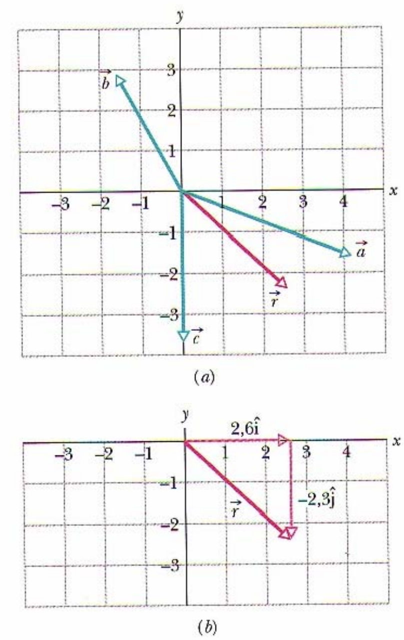


FIG. 3-16 O vetor $\vec{r}$ é a soma vetorial dos outros três vetores.

$$r = \sqrt{(2{,}6\text{ m})^2 + (-2{,}3\text{ m})^2} \approx 3{,}5\text{ m} \qquad \text{(Resposta)}$$

e o ângulo (medido em relação ao semi-eixo x positivo) é dado por

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-2{,}3\text{ m}}{2{,}6\text{ m}}\right) = -41° \qquad \text{(Resposta)}$$

onde o sinal negativo significa que o ângulo deve ser medido no sentido horário.

Exemplo 3-5

De acordo com as pesquisas, a formiga do deserto mantém registro de seus movimentos em um sistema mental de coordenadas. Quando decide voltar ao formigueiro, soma seus deslocamentos em relação aos eixos dos sistema para calcular um vetor que aponta diretamente para o ponto de partida. Como exemplo desse cálculo, considere uma formiga que executa cinco movimentos ede 6,0 cm cada um em um sistema de coordenadas xy, nas orientações mostradas na figura 3-17a, partindo do formigueiro. No final do quinto movimento, quais são o módulo e o ângulo do vetor descamento total $\vec{d}_{total}$ e quais são os valores correspondentes do vetor retorno $\vec{d}_{volta}$ que liga a posição final da formiga e a posição do formigueiro?

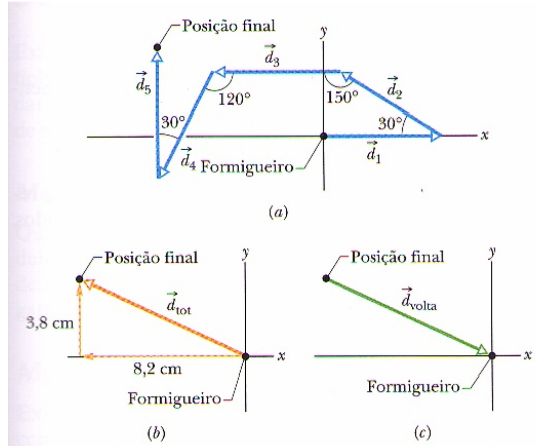


FIG. 3-17 (*a*) Movimentos de uma formiga do deserto. (*b*) Componentes *x* e *y* de $\vec{d}_{tot}$. (*c*) O vetor $\vec{d}_{volta}$ indica o caminho de volta para o formigueiro.

IDÉIAS-CHAVE (1) Para encontrar o deslocamento resultante $\vec{d}_{tot}$, precisamos somar os cinco vetores deslocamento:

$$\vec{d}_{tot} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3 + \vec{d}_4 + \vec{d}_5.$$

(2) Calculamos esta soma apenas para a componente *x*,

$$d_{tot,x} = d_{1x} + d_{2x} + d_{3x} + d_{4x} + d_{5x}, \qquad (3\text{-}14)$$

e apenas para a componente *y*,

$$d_{tot,y} = d_{1y} + d_{2y} + d_{3y} + d_{4y} + d_{5y}. \qquad (3\text{-}15)$$

(3) Obtemos o vetor $\vec{d}_{tot}$ a partir de suas componentes *x* e *y*.

Cálculos: Para resolver a Eq. 3-14, aplicamos a parte correspondente a *x* da Eq. 3-5 a cada movimento:

$$d_{1x} = (6{,}0\text{ cm})\cos 0° = +6{,}0\text{ cm}$$
$$d_{2x} = (6{,}0\text{ cm})\cos 150° = -5{,}2\text{ cm}$$
$$d_{3x} = (6{,}0\text{ cm})\cos 180° = -6{,}0\text{ cm}$$

$$d_{4x} = (6{,}0 \text{ cm}) \cos(-120°) = -3{,}0 \text{ cm}$$
$$d_{5x} = (6{,}0 \text{ cm}) \cos 90° = 0.$$

A Eq. 3-14 nos dá

$$\begin{aligned} d_{\text{tot},x} &= +6{,}0 \text{ cm} + (-5{,}2 \text{ cm}) + (-6{,}0 \text{ cm}) \\ &\quad + (-3{,}0 \text{ cm}) + 0 \\ &= -8{,}2 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Analogamente, calculamos as componentes y dos cinco movimentos usando a parte correspondente a y da Eq. 3-5. Os resultados aparecem na Tabela 3-1. Substituindo esses resultados na Eq. 3-15, obtemos:

$$d_{\text{tot},y} = +3{,}8 \text{ cm}.$$

O vetor $\vec{d}_{\text{tot}}$ e suas componentes x e y aparecem na Fig. 3-17*b*. Para encontrar o módulo e o ângulo de $\vec{d}_{\text{tot}}$ a partir das componentes, usamos a Eq. 3-6. O módulo é dado por

$$\begin{aligned} d_{\text{tot}} &= \sqrt{d^2_{\text{tot},x} + d^2_{\text{tot},y}} \\ &= \sqrt{(-8{,}2 \text{ cm})^2 + (3{,}8 \text{ cm})^2} = 9{,}0 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Para encontrar o ângulo (medido a partir do semi-eixo x positivo), calculamos o arco tangente:

$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{d_{\text{tot},y}}{d_{\text{tot},x}}\right) \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{3{,}8 \text{ cm}}{-8{,}2 \text{ cm}}\right) = -24{,}86°. \end{aligned}$$

A resposta -24,86^{o} parece indicar que o vetor d_{total} está no quarto quadrante de nosso sistema de coordendas xy. Entretanto, quando compomos o vetor a partir das componentes vemos que d_{total} está no segundo quadrante. Assim, precisamos "corrigir" a resposta da calculadora somando 180^{0}:

$$\theta = -24{,}86° + 180° = 155{,}14° \approx 155°.$$

Assim, o deslocamento $\vec{d}_{\text{tot}}$ da formiga, na notação módulo-ângulo, é dado por

$$d_{\text{tot}} = 9{,}0 \text{ cm a } 155°. \qquad \text{(Resposta)}$$

O vetor $\vec{d}_{\text{volta}}$, que aponta da formiga para o formigueiro, tem o mesmo módulo que $\vec{d}_{\text{tot}}$ e o sentido oposto

(Fig. 3-17*c*). Já temos o ângulo ($-24{,}86° \approx -25°$) para o sentido oposto a $\vec{d}_{tot}$. Assim, $\vec{d}_{volta}$ é dado por

$$d_{volta} = 9{,}0 \text{ cm a } -25°. \qquad \text{(Resposta)}$$

Uma formiga do deserto que se afasta mais de 500 m do formigueiro realiza, na verdade, milhares de deslocamentos. Ainda assim, de alguma forma ela é capaz de calcular $\vec{d}_{volta}$ (sem estudar este capítulo).

Exemplo 3-6 Aumente sua capacidade

Aqui está um problema de soma vetorial que *não pode* ser resolvido diretamente em uma calculadora. Uma amiga se afasta de você em linha reta (vetor $\vec{A}$), muda de direção, caminha novamente em linha reta (vetor $\vec{B}$) e pára. Que distância você deve caminhar em linha reta (vetor $\vec{C}$) para chegar até ela?

Os três vetores (que aparecem na Fig. 3-18) estão relacionados pela equação

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}. \qquad (3\text{-}16)$$

O vetor $\vec{A}$ tem um módulo de 22,0 m e faz um ângulo de $-47{,}0°$ (sentido horário) com o semi-eixo x positivo. O vetor $\vec{B}$ tem um módulo de 17,0 m e faz um ângulo ϕ (no sentido anti-horário) com o semi-eixo x positivo. Qual é o módulo de $\vec{C}$?

IDÉIA-CHAVE Não podemos responder à pergunta somando vetorialmente $\vec{A}$ e $\vec{B}$ em uma calculadora, mesmo que ela seja capaz de executar uma instrução como

[módulo de $\vec{A}$ $\angle$ ângulo de $\vec{A}$] + [módulo de $\vec{B}$ $\angle$ ângulo de $\vec{B}$]

porque não conhecemos o valor do ângulo ϕ de $\vec{B}$. Entretanto, *podemos* expressar a Eq. 3-16 em termos das componentes em relação ao eixo x e ao eixo y.

Cálculos: Escrevendo a Eq. 3-16 em termos das componentes em relação ao eixo x, temos:

$$C_x = A_x + B_x.$$

Expressando as componentes x de acordo com a parte referente a x da Eq. 3-5 e substituindo os valores conhecidos, obtemos:

$$C \cos 0° = 22{,}0 \cos(-47{,}0°) + 17{,}0 \cos \phi. \qquad (3\text{-}17)$$

Esta equação não é suficiente para resolver o problema, já que não podemos calcular o valor de C sem conhecer ϕ.

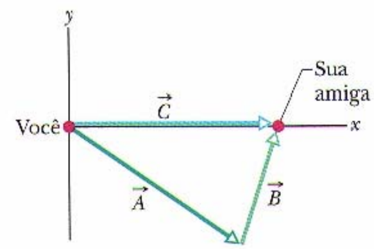


FIG. 3-18 O vetor $\vec{C}$ é igual a $\vec{A} + \vec{B}$.

Vamos escrever a Eq. 3-16 em termos das componentes em relação ao eixo y:

$$C_y = A_y + B_y.$$

Expressando as componentes y de acordo com a parte referente a y da Eq. 3-5 e substituindo os valores conhecidos, obtemos:

$$C \operatorname{sen} 0° = 22{,}0 \operatorname{sen}(-47{,}0°) + 17{,}0 \operatorname{sen} \phi,$$

o que nos dá

$$0 = 22{,}0 \operatorname{sen}(-47{,}0°) + 17{,}0 \operatorname{sen} \phi.$$

Explicitando ϕ, obtemos

$$\phi = \operatorname{sen}^{-1} - \frac{22{,}0 \operatorname{sen}(-47{,}0°)}{17{,}0} = 71{,}17°$$

Substituindo este valor na Eq. 3-17, temos:

$$C = 20{,}5 \text{ m}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Observe a técnica usada para resolver o problema: Quando chegamos a um beco sem saída ao trabalhar com as componentes x, usamos as componentes y para determinar o valor de ϕ. Em seguida, voltamos a trabalhar com as componentes x para calcular o valor de C.

Multiplicação de Vetores

Existem três forma de multiplicar vetores, mas nenhuma é igual à algébrica.

Multiplicação de um Vetor por um Escalar

Quando multiplicamos um vetor $\vec{a}$ por um escalar s obtemos outro vetor cujo o módulo é o produto do módulo de $\vec{a}$ pelo valor absoluto de s, cuja a direção é a mesma de $\vec{a}$ e cujo o sentido é o mesmo de $\vec{a}$, se s for positivo, e oposto, se s for negativo. Para dividir $\vec{a}$ por s, multiplicamos $\vec{a}$ por 1/s.

Multiplicação de um Vetor por um Vetor

Existem duas formas de multiplicar um vetor por um vetor: uma forma conhecida como produto escalar, resulta em um escalar; a outra (conhecida como produto vetorial) resulta num vetor.

O Produto Escalar

O produto escalar dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ da figura ao lado está escrito como $\vec{a}\ .\ \vec{b}$ e definido pela equação:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\phi,$$

ou ainda,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a\cos\phi)(b) = (a)(b\cos\phi).$$

Onde a é o módulo $\vec{a}$, b é o módulo de $\vec{b}$ e ϕ é o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Note que o lado direito da equação acima contém apenas escalares. Assim, o produto $\vec{a}\ .\ \vec{b}$ representa uma grandeza escalar e é lido como "a escalar b".

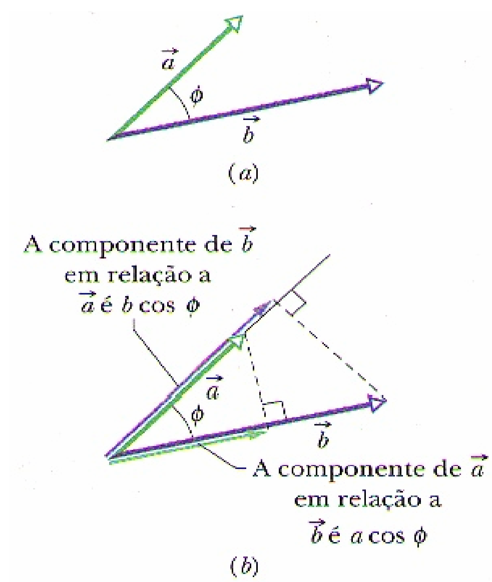


FIG. 3-20 (*a*) Dois vetores, $\vec{a}$ e $\vec{b}$, formando um ângulo ϕ. (*b*) Cada vetor tem uma componente na direção do outro vetor.

Se o ângulo ϕ entre dois vetores é 0°, a componente de um vetor em relação ao outro é máxima, o que também acontece com o produto escalar dos vetores. Se o ângulo é 90°, a componente de um vetor em relação ao outro é nula, o que também acontece com o produto escalar.

A propriedade comutativa se aplica ao produto escalar, de modo que:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

Se dois vetores são escritos em termos dos vetores unitários, o produto assume a forma:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\hat{\mathrm{i}}+a_y\hat{\mathrm{j}}+a_z\hat{\mathrm{k}})\cdot(b_x\hat{\mathrm{i}}+b_y\hat{\mathrm{j}}+b_z\hat{\mathrm{k}})$$

A expressão acima pode ser ainda expandida de acordo com a propriedade distributiva: calculando os produtos escalares das componentes vetoriais do primeiro vetor pelas componentes vetoriais do segundo vetor, obtendo:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

TESTE 4 Os vetores $\vec{C}$ e $\vec{D}$ têm módulos de 3 unidades e 4 unidades, respectivamente. Qual é o ângulo entre esses vetores se $\vec{C}\cdot\vec{D}$ é igual (a) a zero, (b) a 12 unidades e (c) a -12 unidades?

Exemplo 3-7

Qual é o ângulo ϕ entre $\vec{a}=3{,}0\hat{\mathrm{i}}-4{,}0\hat{\mathrm{j}}$ e $\vec{b}=-2{,}0\hat{\mathrm{i}}+3{,}0\hat{\mathrm{k}}$? (*Atenção:* Muitos dos cálculos a seguir não são necessários quando se usa uma calculadora, mas você aprenderá mais sobre produtos escalares se, pelo menos no início, executar esses cálculos.)

IDÉIA-CHAVE O ângulo entre as orientações dos dois vetores aparece na definição de seu produto escalar (Eq. 3-20):

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\phi. \qquad (3\text{-}24)$$

Cálculos: Na Eq. 3-24, a é o módulo de $\vec{a}$, ou seja,

$$a=\sqrt{3{,}0^2+(-4{,}0)^2}=5{,}00, \qquad (3\text{-}25)$$

e b é o módulo de $\vec{b}$, ou seja,

$$b=\sqrt{(-2{,}0)^2+3{,}0^2}=3{,}61. \qquad (3\text{-}26)$$

Podemos calcular o lado esquerdo da Eq. 3-24 escrevendo os vetores em termos dos vetores unitários e usando a propriedade distributiva:

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=(3{,}0\hat{\mathrm{i}}-4{,}0\hat{\mathrm{j}})\cdot(-2{,}0\hat{\mathrm{i}}+3{,}0\hat{\mathrm{k}})\\&=(3{,}0\hat{\mathrm{i}})\cdot(-2{,}0\hat{\mathrm{i}})+(3{,}0\hat{\mathrm{i}})\cdot(3{,}0\hat{\mathrm{k}})\\&\quad+(-4{,}0\hat{\mathrm{j}})\cdot(-2{,}0\hat{\mathrm{i}})+(-4{,}0\hat{\mathrm{j}})\cdot(3{,}0\hat{\mathrm{k}}).\end{aligned}$$

Em seguida, aplicamos a Eq. 3-20 a cada termo desta última expressão. O ângulo entre os vetores unitários do primeiro termo ($\hat{\mathrm{i}}$ e $\hat{\mathrm{i}}$) é de 0°, e nos outros ângulos é de 90°. Assim, temos

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=-(6{,}0)(1)+(9{,}0)(0)+(8{,}0)(0)-(12)(0)\\&=-6{,}0.\end{aligned}$$

Substituindo este resultado e os resultados das Eqs. 3-25 e 3-26 na Eq. 3-24, obtemos:

$$-6{,}0=(5{,}00)(3{,}61)\cos\phi,$$

e portanto $$\phi=\cos^{-1}\frac{-6{,}0}{(5{,}00)(3{,}61)}=109°\approx 110°.$$

(Resposta)

O Produto Vetorial

O produto vetorial de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é escrito como $\vec{a}$ x $\vec{b}$ (lê-se "a vetor b"), e resulta em um terceiro vetor $\vec{c}$ cujo módulo é

$$c = ab \operatorname{sen} \phi,$$

Onde ϕ é o menor dos dois ângulos entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são paralelos ou antiparalelos, $\vec{a} \times \vec{b} = 0$. O módulo de $\vec{a} \times \vec{b}$, que pode ser escrito como $|\vec{a} \times \vec{b}|$, é máximo quando $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são mutuamente perpendiculares um ao outro.

A direção de $\vec{c}$ é perpendicular ao plano definido por $\vec{a}$ e $\vec{b}$. A Figura 3-21a mostra como podemos determinar o sentido de $\vec{c} = \vec{a}$ x $\vec{b}$ usando a **regra da mão direita**. Superponha as origens de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sem mudar suas orientações e imagine uma reta perpendicular ao plano definido pelos dois vetores, passando pela origem comum. Envolva essa linha com a mão direita de modo que seus dedos empurrem $\vec{a}$ em direção a $\vec{b}$ ao longo do menor ângulo entre os vetores. O polegar estendido aponta no sentido de $\vec{c}$.

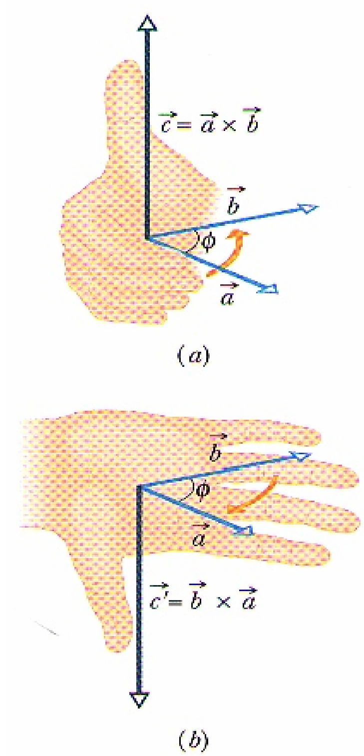


FIG. 3-21 Ilustração da regra da mão direita para produtos vetoriais. (a) Empurre o vetor $\vec{a}$ na direção do vetor $\vec{b}$ com os dados da mão direita. O polegar estendido mostra a orientação do vetor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. (b) O vetor $\vec{b} \times \vec{a}$ tem o sentido oposto ao de $\vec{a} \times \vec{b}$.

No caso do produto vetorial, a ordem dos vetores é importante. Na figura 3-21b, estamos determinando o sentido de $\vec{c}\,' = \vec{b} x \vec{a}$, de modo que os dedos da mão direita empurram $\vec{b}$ na direção de $\vec{a}$ ao longo do menor ângulo. O polegar neste caso aponta no sentido contrário ao da figura 3-21a, de modo que $\vec{c}\,' = -\vec{c}\,'$, ou seja,

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}).$$

Assim, observa-se que a propriedade comutativa não se aplica ao produto vetorial. O produto vetorial pode ser, ainda, escrito em termos dos vetores unitários da seguinte forma:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}}) \times (b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}} + b_z\hat{\mathrm{k}}),$$

podendo ser expandido seguindo as regras, como por exemplo:

$$a_x\hat{\text{i}}\times b_x\hat{\text{i}} = a_xb_x(\hat{\text{i}}\times\hat{\text{i}}) = 0,$$

➔ os vetores unitários $\hat{i}$ e $\hat{i}$ são paralelos.

Analogamente,

$$a_x\hat{\text{i}}\times b_y\hat{\text{j}} = a_xb_y(\hat{\text{i}}\times\hat{\text{j}}) = a_xb_y\hat{\text{k}}.$$

➔ módulo de $\hat{i}$ x $\hat{j}$ = 1, e o ângulo entre eles é 90^0.

Usando a regra da mão direita, vemos que o sentido de $\hat{i}$ x $\hat{j}$ é o sentido do semi-eixo z positivo, ou seja, o sentido de $\hat{k}$. E finalmente chegamos a:

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_yb_z - b_za_y)\hat{\text{i}} + (a_zb_x - b_za_x)\hat{\text{j}} + (a_xb_y - b_xa_y)\hat{\text{k}}.$$

TESTE 5 Os vetores $\vec{C}$ e $\vec{D}$ têm módulos de 3 unidades e 4 unidades, respectivamente. Qual é o ângulo entre esses vetores se o módulo do produto vetorial $\vec{C}\times\vec{D}$ é igual a (a) zero e (b) 12 unidades?

Exemplo 3-8

Na Fig. 3-22, o vetor $\vec{a}$ está no plano *xy*, tem módulo igual a 18 unidades e uma orientação que faz um ângulo de 250° com o semi-eixo *x* positivo. O vetor $\vec{b}$ tem módulo de 12 unidades e está orientado ao longo do semi-eixo *z* positivo. Qual é o produto vetorial $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$?

IDÉIA-CHAVE Quando conhecemos dois vetores na notação módulo-ângulo podemos calcular o módulo do produto vetorial usando a Eq. 3-27 e a orientação do produto vetorial usando a regra da mão direita da Fig. 3-21.

Cálculos: O módulo do produto vetorial é dado por

$$c = ab \text{ sen } \phi = (18)(12)(\text{sen } 90°) = 216. \quad \text{(Resposta)}$$

Para determinar a orientação do produto vetorial na Fig. 3-22, coloque os dedos da mão direita em torno de uma reta perpendicular ao plano de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ (a reta na qual se

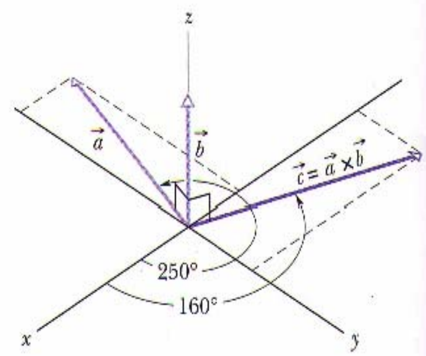


FIG. 3-22 O vetor $\vec{c}$ (no plano *xy*) é o produto vetorial dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

encontra o vetor $\vec{c}$) de modo que seus dedos empurrem o vetor $\vec{a}$ na direção de $\vec{b}$; seu polegar estendido fornece a orientação de $\vec{c}$. Assim, como mostra a figura, $\vec{c}$ está no plano *xy*. Como a direção de $\vec{c}$ é perpendicular à direção de $\vec{a}$, o vetor faz um ângulo de

$$250° - 90° = 160° \quad \text{(Resposta)}$$

com o semi-eixo *x* positivo.

REVISÃO E RESUMO

Escalares e Vetores *Grandezas escalares*, como a temperatura, possuem apenas um valor. São especificadas por um número com uma unidade (10°C, por exemplo) e obedecem às regras da aritmética e da álgebra comum. As *grandezas vetoriais*, como o deslocamento, possuem um módulo e uma orientação (5 m para cima, por exemplo), e obedecem às regras da álgebra vetorial.

Soma Geométrica de Vetores Dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ podem ser somados geometricamente desenhando-os na mesma escala e posicionando-os com a extremidade de um na origem do outro. O vetor que liga a origem do primeiro à extremidade do segundo é o vetor soma, $\vec{s}$. Para subtrair $\vec{b}$ de $\vec{a}$ invertemos o sentido de $\vec{b}$ para obter $-\vec{b}$ e somamos $-\vec{b}$ a $\vec{a}$. A soma vetorial é comutativa e associativa.

Componentes de um Vetor As *componentes* (escalares) a_x e a_y de um vetor bidimensional $\vec{a}$ em relação ao eixos de um sistema de coordenadas xy são obtidas traçando retas perpendiculares aos eixos a partir da origem e da extremidade de $\vec{a}$. As componentes são dadas por

$$a_x = a\cos\theta \text{ e } a_y = a \operatorname{sen}\theta, \qquad (3\text{-}5)$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{a}$ e o semi-eixo x positivo. O sinal algébrico de uma componente indica seu sentido em relação ao eixo correspondente. Dadas as componentes, podemos encontrar o módulo e a orientação de um vetor $\vec{a}$ através das equações

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \text{ e } \tan\theta = \frac{a_y}{a_x}. \qquad (3\text{-}6)$$

Notação com Vetores Unitários Os *vetores unitários* $\hat{\mathrm{i}}$, $\hat{\mathrm{j}}$ e $\hat{\mathrm{k}}$ têm módulo unitário e sentido igual ao sentido positivo dos eixos x, y e z, respectivamente, em um sistema de coordenadas dextrogiro. Podemos expressar um vetor $\vec{a}$ em termos de vetores unitários como

$$\vec{a} = a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}}, \qquad (3\text{-}7)$$

onde $a_x\hat{\mathrm{i}}$, $a_y\hat{\mathrm{j}}$ e $a_z\hat{\mathrm{k}}$ são as **componentes vetoriais** de $\vec{a}$, e a_x, a_y e az são as **componentes escalares**.

Soma de Vetores na Forma de Componentes Para somar vetores na forma de componentes, usamos as regras

$$r_x = a_x + b_x \quad r_y = a_y + b_y \quad r_z = a_z + b_z. \qquad (3\text{-}11 \text{ a } 3\text{-}13)$$

onde $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são os vetores a serem somados e $\vec{r}$ é o vetor soma.

Produto de um Escalar por um Vetor O produto de um escalar s por um vetor $\vec{v}$ é um vetor de módulo sv com a mesma orientação de $\vec{v}$ se s é positivo e com a orientação oposta se s é negativo. Para dividir $\vec{v}$ por s, multiplicamos $\vec{v}$ por $1/s$.

O Produto Escalar O **produto escalar** de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é representado por $\vec{a}\cdot\vec{b}$ e é igual à grandeza *escalar* dada por

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\phi, \qquad (3\text{-}20)$$

onde ϕ é o menor dos ângulos entre as direções de $\vec{a}$ e $\vec{b}$. O produto escalar é o produto do módulo de um dos vetores pela componente escalar do outro em relação ao primeiro. Em termos dos vetores unitários,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}})\cdot(b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}} + b_z\hat{\mathrm{k}}), \qquad (3\text{-}22)$$

que pode ser expandida de acordo com a lei distributiva. Note que $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$.

O Produto Vetorial O **produto vetorial** de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, representado por $\vec{a}\times\vec{b}$, é um *vetor* $\vec{c}$ cujo módulo c é dado por

$$c = ab\operatorname{sen}\phi, \qquad (3\text{-}27)$$

onde ϕ é o menor dos ângulos entre as direções de $\vec{a}$ e $\vec{b}$. A orientação de $\vec{c}$ é perpendicular ao plano definido por $\vec{a}$ e $\vec{b}$, e é dada pela regra da mão direita, como mostra a Fig. 3-21. Note que $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$. Em termos dos vetores unitários,

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}})\times(b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}} + b_z\hat{\mathrm{k}}), \qquad (3\text{-}29)$$

que pode ser expandida de acordo com a lei distributiva.

Exemplo 3-9

Se $\vec{a} = 3\hat{\text{i}} - 4\hat{\text{j}}$ e $\vec{b} = -2\hat{\text{i}} + 3\hat{\text{k}}$, determine $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$?

IDÉIA-CHAVE Quando dois vetores estão expressos em termos dos vetores unitários, podemos determinar o produto vetorial usando a lei distributiva.

Cálculos: Temos:

$$\begin{aligned}\vec{c} &= (3\hat{\text{i}} - 4\hat{\text{j}}) \times (-2\hat{\text{i}} + 3\hat{\text{k}})\\ &= 3\hat{\text{i}} \times (-2\hat{\text{i}}) + 3\hat{\text{i}} \times 3\hat{\text{k}} + (-4\hat{\text{j}}) \times (-2\hat{\text{i}})\\ &\quad + (-4\hat{\text{j}}) \times 3\hat{\text{k}}.\end{aligned}$$

Podemos calcular os valores dos diferentes termos usando a Eq. 3-27 e determinando a orientação dos vetores com o auxílio da regra da mão direita. No primeiro termo, o ângulo ϕ entre os dois vetores envolvidos no produto vetorial é 0; nos outros três termos, $\phi = 90°$. O resultado é o seguinte:

$$\begin{aligned}\vec{c} &= -6(0) + 9(-\hat{\text{j}}) + 8(-\hat{\text{k}}) - 12\hat{\text{i}}\\ &= -12\hat{\text{i}} - 9\hat{\text{j}} - 8\hat{\text{k}}. \qquad \text{(Resposta)}\end{aligned}$$

O vetor $\vec{c}$ é perpendicular a $\vec{a}$ e $\vec{b}$, o que pode ser demonstrado observando que $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ e $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$, ou seja, não existem componentes de $\vec{c}$ em relação a $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

PROBLEMAS

•1 A componente x do vetor $\vec{A}$ é $-25{,}0$ m e a componente y é $+40{,}0$ m. (a) Qual é o módulo de $\vec{A}$? (b) Qual é o ângulo entre a orientação de $\vec{A}$ e o semi-eixo x positivo?

•3 Quais são (a) a componente x e (b) a componente y de um vetor $\vec{a}$ do plano xy que faz um ângulo de 250° no sentido anti-horário como o semi-eixo x positivo e tem um módulo de 7,3 m?

••7 As dimensões de uma sala são 3,00 m (altura) × 3,70 m × 4,30 m. Uma mosca parte de um canto da sala e vai pousar em um canto diagonalmente oposto. (a) Qual é o módulo do deslocamento da mosca? (b) A distância percorrida pode ser menor que este valor? (c) Pode ser maior? (d) Pode ser igual? (e) Escolha um sistema de coordenadas apropriado e expresse as componentes do vetor deslocamento em termos de vetores unitários. (f) Se a mosca caminhar, em vez de voar, qual o comprimento do caminho mais curto para o outro canto? (*Sugestão:* O problema pode ser resolvido sem fazer cálculos complicados. A sala é como uma caixa; desdobre as paredes para representá-las em um único plano antes de procurar uma solução).

•9 (a) Determine a soma $\vec{a} + \vec{b}$, em termos de vetores unitários, para $\vec{a} = (4{,}0\text{ m})\hat{\text{i}} + (3{,}0\text{ m})\hat{\text{j}}$ e $\vec{b} = (-13{,}0\text{ m})\hat{\text{i}} + (7{,}0\text{ m})\hat{\text{j}}$. Determine (b) o módulo e (c) o sentido de $\vec{a} + \vec{b}$.

•11 Uma pessoa deseja chegar a um ponto que está a 3,40 km de sua localização atual, em uma direção 35,0° ao norte do leste. As ruas por onde pode passar são todas na direção norte-sul ou na direção leste-oeste. Qual é a menor distância que a pessoa precisa percorrer para chegar ao destino?

•13 Dois vetores são dados por

$$\vec{a} = (4{,}0\text{ m})\hat{\text{i}} - (3{,}0\text{ m})\hat{\text{j}} + (1{,}0\text{ m})\hat{\text{k}}$$

e

$$\vec{b} = (-1{,}0\text{ m})\hat{\text{i}} + (1{,}0\text{ m})\hat{\text{j}} + (4{,}0\text{ m})\hat{\text{k}}.$$

Em termos de vetores unitários, determine (a) $\vec{a} + \vec{b}$, (b) $\vec{a} - \vec{b}$ e (c) um terceiro vetor, $\vec{c}$, tal que $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = 0$.

•17 Os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ na Fig. 3-30 têm módulos iguais a 10,0 m e os ângulos são $\theta_1 = 30°$ e $\theta_2 = 105°$. Determine as componentes (a) x e (b) y da soma vetorial $\vec{r}$ dos dois vetores, (c) o módulo de $\vec{r}$ e (d) o ângulo que $\vec{r}$ faz com o semi-eixo x positivo.

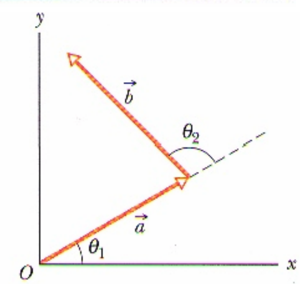


FIG. 3-30 Problema 17.

••23 O oásis B está 25 km a leste do oásis A. Partindo do oásis A, um camelo percorre 24 km em uma direção 15° ao sul do leste e 8,0 km para o norte. A que distância o camelo está do oásis B?

••25 Se $\vec{B}$ é somado a $\vec{C} = 3{,}0\hat{\text{i}} + 4{,}0\hat{\text{j}}$, o resultado é um vetor no sentido do semi-eixo y positivo, com um módulo igual ao de $\vec{C}$. Qual é o módulo de $\vec{B}$?

••41 O vetor $\vec{A}$ tem módulo igual a 6,00 unidades, o vetor $\vec{B}$ tem módulo igual a 7,00 unidades e $\vec{A} \cdot \vec{B} = 14{,}0$. Qual é o ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$?

••43 Os três vetores na Fig. 3-35 têm módulos $a = 3{,}00$ m, $b = 4{,}00$ m e $c = 10{,}0$ m; $\theta = 30{,}0°$. Determine (a) a componente x e (b) a componente y de $\vec{a}$; (c) a componente x e (d) a componente y de $\vec{b}$; (e) a componente x e (f) a componente y de $\vec{c}$. Se $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$, quais são os valores de (g) p e (h) q?

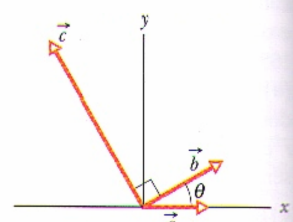


FIG. 3-35 Problema 43.

••39 Use a definição de produto escalar, $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta$, e o fato de que $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ para calcular o ângulo entre os dois vetores dados por $\vec{a} = 3{,}0\hat{\text{i}} + 3{,}0\hat{\text{j}} + 3{,}0\hat{\text{k}}$ e $\vec{b} = 2{,}0\hat{\text{i}} + 1{,}0\hat{\text{j}} + 3{,}0\hat{\text{k}}$.

•37 Para os vetores da Fig. 3-34, com $a = 4$, $b = 3$ e $c = 5$, determine (a) o módulo e (b) a orientação de $\vec{a} \times \vec{b}$, (c) o módulo e (d) a orientação de $\vec{a} \times \vec{c}$ e (e) o módulo e (f) orientação de $\vec{b} \times \vec{c}$. (Embora exista, o eixo z não é mostrado na figura.)

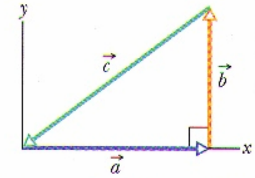


FIG. 3-34 Problemas 37 e 50.