Cálculo Numérico

Faculdade de Ciências Sociais Aplicadas e Comunicação – FCSAC
Faculdade de Engenharia, Arquiteturas e Urbanismo – FEAU

Prof. Dr. Sergio Pilling (IPD/ Física e Astronomia)

Avaliação P2c

Nome do aluno: ____ Data: ____________
Matrícula:__________________Turma: _________________ Curso:__________________

1ª Questão (8pts):
Após plantar um grão de feijão mágico que recebeu de um andarilho, Joãozinho resolveu anotar a altura do pé de feijão em função dos dias.

x (dias)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y (m)	0	0.2	4.2	21.4	30	52.5	76	120	160	250	302

Resolva os itens abaixo baseados na tabela acima:

a) (2pts) Considere os pontos em x=3 e x=7 e ajuste um polinômio de ordem 1, $P_1(x)$, utilizando o **método de direto ($P(x_k)=f(x_k)$)**.

b) (2pts) Considere os pontos em x=0, x=5 e x=10 e ajuste um polinômio de ordem 2, $P_2(x)$, utilizando o **método de Lagrange**.

c) (1pt) A partir dos polinômios encontrados nos itens acima calcule os valores $P_1(4.25)$ e $P_2(4.25)$?

d) (2pts) Encontre a melhor função parabólica ($\varphi(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$) que ajusta todos pontos da tabela utilizando o **Método dos Mínimos quadrados.**

e) (1pt) Em quantos dias o pé de feijão atingiria a altura de 4km, onde supostamente mora um gigante num castelo mágico sobre as nuvens de gelo?

2ª Questão (2pts):

Seja a integral ao lado: $I = \int_{2}^{20} \frac{e^{2x}}{x} dx$. Calcule numericamente o valor da integral pela **regra 1/3 de Simpson repetida com 6 subdivisões**.

Observações

- Não serão consideradas respostas finais sem seus respectivos cálculos ou justificativas.
- Questões respondidas a lápis não terão direito à revisão.

Formulário:

$$L_i = L_i^* - m_{ij} L_j$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n$$

$$m_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x) = f(x_0) L_0(x) + f(x_1) L_1(x) + ... + f(x_n) L_n(x)$$

$$L_k(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x_k - x_j)}$$

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, ..., x_k](x - x_0)...(x - x_{k-1}) =$$

$$= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) +$$

$$+ .... + f[x_0, x_1, x_2, x_3, ...x_n](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)....(x - x_{n-1})$$

$f[x_i] \equiv f(x_i)$ e $f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] = \dfrac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$ (Ordem n)

$$f(x) \approx \phi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i g_i(x) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + a_3 g_3(x) ... + a_n g_n(x) \qquad n \in \mathrm{I}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} g_i(x_k) g_j(x_k) = a_{ji} \qquad b_i = \sum_{k=1}^{m} f(x_k) g_i(x_k)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_n) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)] = I_{TR}$$

$$|E_{TR}| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \left[y_0 + y_m + 2 \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1} y_{2i} + 4 \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} y_{2i-1} \right] = I_{SR}$$

$$|E_{SR}| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \cdot \max_{x \in [a,b]} |f^4(x)|$$

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{b-a}{2n}$$

2/dez/2009

Cálculo Numérico

Gabarito P2c

1ª Questão

a)

x	$f(x)$
3	21,4
7	120

$P_1(x_k) = f(x_k) \rightarrow a_0 + a_1 x_k = f(x_k)$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 3 = 21,4 \\ a_0 + a_1 7 = 120 \end{cases}$$

resolvendo o sistema temos $a_0 = -52,55$

$a_1 = 24,65$

Logo

$$\boxed{P_1(x) = -52,55 + 24,65x}$$

b)

x	$f(x)$
0	0
5	52,5
10	302

$P_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$

1

Calculamos os Fatores de Lagrange.

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-5)(x-10)}{(0-5)(0-10)} = \frac{x^2-15x+50}{50}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0)(x-10)}{(5-0)(5-10)} = \frac{x^2-10x}{-25}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0)(x-5)}{(10-0)(10-5)} = \frac{x^2-5x}{50}$$

Logo:

$$P_2(x) = 0\,L_0(x) + 52{,}5\,L_1(x) + 302\,L_2(x)$$

$$\boxed{P_2(x) = -9{,}19x + 3{,}94x^2}$$

e)

Para o polinomio do item a $\rightarrow$ $P_1(x) = 52{,}212$

Para o polinomio do item b $\rightarrow$ $P_2(x) = 32{,}066$

②

d)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{21} & a_{31} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

com $\boxed{g_1(x) = 1 \; ; \; g_2(x) = x \, , \; g_3(x) = x^2}$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} g_i(x_k)\, g_j(x_k) = a_{ji}$$

$$b_i = \sum_{k=1}^{m} f(x_k)\, g_i(x_k)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 55 & 385 & 1016{,}3 \\ 55 & 385 & 3025 & 8301{,}29 \\ 385 & 3025 & 25333 & 71308{,}1 \end{array}\right)$$

triangularizando .... $\longrightarrow$

$$L_2 = L_2^* - \frac{55}{11} L_1$$

$$L_3 = L_3^* - \frac{385}{11} L_1$$

e

$$L_3 = L_3^* - \frac{1100}{110} L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 55 & 385 & 1016{,}3 \\ 0 & 110 & 1100 & 3219{,}79 \\ 0 & 0 & 858 & 3539{,}69 \end{array}\right)$$

Sistema de equações

$$a_0 11 + a_1 55 + a_2 385 = 1016{,}3$$

$$a_1 110 + a_2 1100 = 3219{,}79$$

$$a_2 858 = 3539{,}69$$

$\longrightarrow$

solução

$$\begin{cases} a_0 = 7{,}917 \\ a_1 = -11{,}983 \\ a_2 = 4{,}125 \end{cases}$$

Logo:

$$\boxed{P_2(x) = 7{,}917 - 11{,}983\,x + 4{,}125\,x^2}$$

3

e)

$$4000 = 7{,}917 - 11{,}983x + 4{,}125x^2$$

$$x^2 - \frac{11{,}983}{4{,}125}x - \frac{3992{,}08}{4{,}125} = 0$$

$$\underset{a}{x^2} \underbrace{- 2{,}904}_{b} x \underbrace{- 967{,}778}_{c} = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{+2{,}904 \pm \sqrt{(2{,}904)^2 - 4 \times (-967{,}778)}}{2}$$

$$= 32{,}595$$

ou

$$= \cancel{-29{,}691}$$

resposta:

Após cerca de 32,6 dias.

(4)

2ª Questão

$\boxed{m = 2n = 6}$

$h = \frac{b-a}{6} = 33$

$f(x) = \frac{e^{2x}}{x}$

$x_0 = 2 \longrightarrow f(x_0) = 27,299$

$x_1 = 35 \quad f(x_1) = 7,18 \times 10^{28}$

$x_2 = 68 \quad f(x_2) = 1,70 \times 10^{57}$

$x_3 = 101 \quad f(x_3) = 5,28 \times 10^{85}$

$x_4 = 134 \quad f(x_4) = 1,83 \times 10^{114}$

$x_5 = 167 \quad f(x_5) = 6,78 \times 10^{142}$

$x_6 = 200 \quad f(x_6) = 2,6 \times 10^{171}$

$$I_{SR} = \frac{h}{3}\Big[f(2) + f(200) + 2\big(f(68) + f(134)\big) + 4\big(f(35) + f(101) + f(167)\big)\Big]$$

$= 2,87 \times 10^{172}$

5