Cálculo Numérico

Faculdade de Ciências Sociais Aplicadas e Comunicação – FCSAC
Faculdade de Engenharia, Arquiteturas e Urbanismo – FEAU

UNIVERSIDADE DO VALE DO PARAÍBA
São José dos Campos - SP

Prof. Dr. Sergio Pilling (IPD/ Física e Astronomia)

Avaliação P2b

Nome do aluno: ____ **Data:** ___________
Matrícula:________________**Turma:** ________________ **Curso:**_________________

1ª Questão (8pts):
Após plantar um grão de feijão mágico que recebeu de um andarilho, Joãozinho resolveu anotar a altura do pé de feijão em função dos dias.

x (dias)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y (m)	0	0,3	5	22	32	55	71	133	169	270	305

Resolva os itens abaixo baseados na tabela acima:

a) (2pts) Considere os pontos em **x=1, x=3 e x=7** e ajuste um polinômio de ordem 2, $P_2(x)$, utilizando o **método de direto ($P(x_k)=f(x_k)$)**.

b) (2pts) Considere os pontos em **x=0, x=5 e x=10** e ajuste um polinômio de ordem 2, $P_2(x)$, utilizando o **método de Newton**.

c) (1pt) Calcule o valor de $P_2(4,3)$ para os dois polinômios encontrados nos itens acima.

d) (2pts) Encontre a melhor função parabólica ($\varphi(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$) que ajusta **todos** pontos da tabela utilizando o **Método dos Mínimos quadrados.**

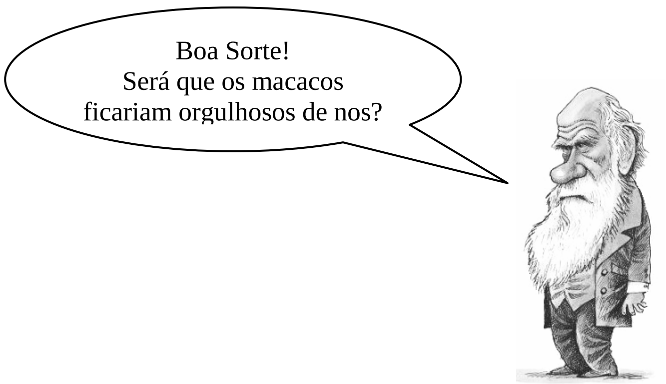
e) (1pt) Em quantos dias o pe de feijão atingiria a altura de 4.4km, onde supostamente moraria um gigante num castelo mágico sobre as nuvens de gelo?

2ª Questão (2pts):

Seja a integral $I = \int_{-2}^{5.5} 1{,}2xe^{(4-x)}dx$

a) (1pt) Calcule numericamente o valor da integral pela **regra do trapézio repetida** com 7 sub-divisões.

b) (1pt) Quantas subdivisões devemos fazer para que o erro seja menor do que 10^{-7}?



Observações

- Não serão consideradas respostas finais sem seus respectivos cálculos ou justificativas.
- Questões respondidas a lápis não terão direito à revisão.

Formulário:

$$L_i = L_i^* - m_{ij} L_j$$

$$m_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \dots + f(x_n)L_n(x)$$

$$L_k(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x_k - x_j)}$$

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, \dots, x_k](x - x_0)\dots(x - x_{k-1}) =$$

$$= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) +$$

$$+ \dots + f[x_0, x_1, x_2, x_3, \dots x_n](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_{n-1})$$

$$f[x_i] \equiv f(x_i) \quad \text{e} \quad f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \quad \text{(Ordem n)}$$

$$f(x) \approx \phi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i g_i(x) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + a_3 g_3(x) \dots + a_n g_n(x) \qquad n \in \mathrm{I}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} g_i(x_k) g_j(x_k) = a_{ji} \qquad b_i = \sum_{k=1}^{m} f(x_k) g_i(x_k)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_n) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right] = I_{TR}$$

$$|E_{TR}| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[y_0 + y_m + 2\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1} y_{2i} + 4\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} y_{2i-1} \right] = I_{SR}$$

$$|E_{SR}| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \cdot \max_{x\in[a,b]} |f^4(x)|$$

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{b-a}{2n}$$

Calculo Numerico 1/Dez/2009

Gabarito P2b

1ª Questão

a) $P_2(x_k) = f(x_k) \longrightarrow a_0 + a_1 x_k + a_2 x_k^2 = f(x_k)$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 1 + a_2 1^2 = 0,3 \\ a_0 + a_1 3 + a_2 3^2 = 22 \\ a_0 + a_1 7 + a_2 7^2 = 133 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0,3 \\ 1 & 3 & 9 & 22 \\ 1 & 7 & 49 & 133 \end{array}\right)$$

triangularizando.....

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0,3 \\ 0 & 2 & 8 & 21,7 \\ 1 & 7 & 49 & 133 \end{array}\right) \quad \cdots \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0,3 \\ 0 & 2 & 8 & 21,7 \\ 0 & 6 & 48 & 132,69 \end{array}\right)$$

$L_2 = L_2 - \frac{1}{1} L_1$ $\qquad$ $L_3 = L_3 - \frac{1}{1} L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0,3 \\ 0 & 2 & 8 & 21,7 \\ 0 & 0 & 24 & 67,6 \end{array}\right)$$

$L_3 = L_3 - \frac{6}{2} L_2$

Resolvendo o sistema

$a_0 = -2,100$

$a_1 = -0,416$

$a_2 = 2,816$

Logo $\boxed{P_2(x) = -2{,}100 - 0{,}416\,x + 2{,}816\,x^2}$

b)

$$P_2(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0).(x-x_1)$$

$\boxed{\begin{array}{l} x_0=0\ ,\ x_1=5\ e\ x_2=10 \\ f(x_0)=0\ \ f(x_1)=55\ e\ f(x_2)=305 \end{array}}$

$$f[x_0] = f(x_0) = 0$$

$$f[x_0,x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{55-0}{5-0} = \boxed{11}$$

$$f[x_1,x_2] = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{305-55}{10-5} = 50$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \frac{50-11}{10-0} = \boxed{3{,}9}$$

Logo.

$$P_2(x) = 11(x-0) + 3{,}9(x-0)(x-5)$$

$$= 11x + 3{,}9x^2 - 19{,}5x$$

$$\boxed{P_2(x) = -8{,}5x + 3{,}9x^2}$$

2

c) Para o Polinomio do item a $\rightarrow P_2(4,3) = 48,179$

Para o Polinomio do item b $\rightarrow P_2(4,3) = 35,561$

d)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{21} & a_{31} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} g_i(x_k)\, g_j(x_k) = a_{ji} \quad ; \quad b_i = \sum_{k=1}^{m} f(x_k)\, g_i(x_k)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 55 & 385 & 1062,3 \\ 55 & 385 & 3025 & 8668,29 \\ 385 & 3025 & 25333 & 74364,3 \end{array}\right)$$

triangularizando .... $L_2 = L_2 - \frac{55}{11} L_1$

$L_3 = L_3 - \frac{385}{11} L_1$ e $L_3 = L_3 - \frac{1110}{110} L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 55 & 385 & 1062,3 \\ 0 & 110 & 1100 & 3356,79 \\ 0 & 0 & 858 & 3615,9 \end{array}\right)$$

Sistema de equações.

$$11a_1 + 55a_2 + 385a_3 = 1062,3$$
$$110a_2 + 1100a_3 = 3356,79$$
$$858a_3 = 3615,9$$

3

Resolvendo o sistema temos:

$a_1 = 7{,}204$, $a_2 = -11{,}625$ $a_3 = 4{,}214$

Logo

$$\boxed{P_2(x) = 7{,}204 - 11{,}625\,x + 4{,}214\,x^2}$$

e)

$$4400 = 7{,}204 - 11{,}625\,x + 4{,}214\,x^2$$

$$4{,}214\,x^2 - 11{,}625\,x - 4392{,}796 = 0$$

$$\underset{a}{x^2} \underbrace{- 2{,}758}_{b}\,x \underbrace{- 1042{,}429}_{c} = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{+2{,}758 \pm \sqrt{2{,}758^2 - 4 \times (-1042{,}429)}}{2}$$

$= 33{,}69$ dias

ou

~~$= -30{,}93$ dias~~

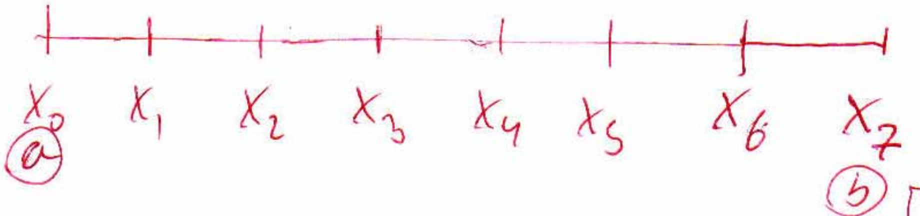
Resposta:

Após cerca de 33,7 dias.

(4)

2ª Questão

a)



$$\boxed{f(x) = 1{,}2x\, e^{(4-x)}}$$

$$h = \frac{b-a}{7} = \frac{5{,}5-(-2)}{7} = 1{,}071$$

$x_0 = -2 \longrightarrow f(x_0) = -968{,}229$

$x_1 = -0{,}928 \qquad f(x_1) = -153{,}974$

$x_2 = 0{,}142 \qquad f(x_2) = 8{,}113$

$x_3 = 1{,}214 \qquad f(x_3) = 23{,}622$

$x_4 = 2{,}285 \qquad f(x_4) = 15{,}230$

$x_5 = 3{,}357 \qquad f(x_5) = 7{,}661$

$x_6 = 4{,}428 \qquad f(x_6) = 3{,}461$

$x_7 = 5{,}50 \qquad f(x_7) = 1{,}472$

$$I_{TR} = \frac{h}{2}\Big[f(-2) + f(5{,}50) + 2\big(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) +$$
$$f(x_5) + f(x_6)\big)\Big]$$

$$\boxed{I_{TR} = -620{,}638}$$

5

b)

$$|E_{TR}| \leq \frac{(b-a)^3}{12 \cdot n^2} \cdot \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| = 10^{-7}$$

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12 \times 10^{-7}} \times \max |f''(x)|}$$

$$f(x) = 1{,}2x\, e^{(4-x)}$$

$$f'(x) = 1{,}2e^{(4-x)} + 1{,}2x\, e^{(4-x)}(-1)$$

$$f''(x) = -1{,}2e^{(4-x)} - 1{,}2e^{(4-x)} - 1{,}2x\, e^{(4-x)}(-1)$$

$$|f''(x)| = |-2{,}4e^{(4-x)} + 1{,}2x\, e^{(4-x)}| \longrightarrow \max |f''(-2)| = \underline{1936{,}46}$$

Logo

$$n \geq \sqrt{\frac{(5{,}5-(-2))^3}{12 \times 10^{-7}} \times 1936{,}46} = 825098$$

Logo,

Devemos fazer 825098 subintervalos para o erro ser menor que 10^{-7}.

⑥