

Avaliação P1

Nome do aluno: _____ Data: _____
Matrícula: _____ Turma: _____ Curso: _____

1ª Questão (2.5pts):

Seja a função $f(x) = e^x - 4x^2$ e sua raiz ξ no intervalo $[0,1]$. Tomando $x_0 = 0.5$ encontre o valor da raiz com uma precisão de $\varepsilon = 10^{-2}$, usando:

- o MPF com $\varphi(x) = 0.5 e^{0.5x}$
- o método de Newton.

2ª Questão (2.5pts):

O sistema abaixo descreve o número de carros azuis (x) vermelhos (y) e pretos (z) que atravessam um dado cruzamento por hora em dado sentido. Resolva o sistema linear utilizando o **método direto de eliminação de Gauss**. Utilize a técnica de pivoteamento parcial caso necessário.

$$\begin{cases} 3x - 4y + z = 9 \\ 4x + 2y - 3z = -2 \\ x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

3ª Questão (2.5pts):

- Transforme os números 923728 e 0,000542456 para o formato ponto flutuante.
- Armazene os números do item a nas máquinas digitais que operam com as seguintes aritméticas de ponto flutuante: F(9,10,-8,8); F(4,10,-8,8) e F(4,10,-2,2). Considere que as máquinas fazem **truncamento**.
- Quais seriam os números máximos e mínimos que podem ser representados nas três máquinas do item b.

4ª Questão (2.5pts):

Um português ganhou de presente do pai uma máquina de calcular super moderna, capaz de armazenar 3 dígitos na mantissa utilizando **truncamento**. Muito satisfeito, o ansioso rapaz efetuou duas operações em sua máquina nova envolvendo os números de árvores da plantação de seu pai ($A=1852$) e o número médio de frutas de cada árvore ($F=90218$).

- Calcule os erros absolutos (EA), erros relativos (ER) e erros relativos percentuais (ER%) envolvidos no processo de utilização da máquina digital para cada número A e F ?
- Após realizar as operações $A \cdot F$ e $A \div F$ percebeu que uma das duas operações resultava no erro relativo maior. Qual foi?

Formulário

$$EA_x = |x - \bar{x}|$$

$$|f(x_k)| < \varepsilon \text{ ou } |x_k - x_{k-1}| < \varepsilon \text{ ou } |b_k - a_k| < \varepsilon$$

$$ER_x = \left| \frac{EA_x}{\bar{x}} \right| = \left| \frac{x - \bar{x}}{\bar{x}} \right|$$

$$k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\varepsilon)}{\log(2)}$$

$$EA_{(xy)} = |\bar{x}EA_y + \bar{y}EA_x|$$

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$$

$$EA_{(x \pm y)} = |EA_x \pm EA_y|$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$EA_{(x/y)} = \left| \frac{EA_x}{\bar{y}} - \frac{\bar{x}EA_y}{\bar{y}^2} \right|$$

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

$$F(t, \beta, e_{\min}, e_{\max}) \rightarrow \pm 0, d_1 \dots d_t \times \beta^e$$

$$ER_{(xy)} = |ER_x + ER_y| + \delta$$

$$L'_i \leftarrow L_i - m_{ik} L_k \quad m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$$

$$ER_{(x/y)} = |ER_x - ER_y| + \delta$$

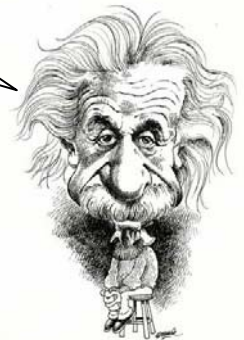
$$ER_{(x \pm y)} = \left| \frac{\bar{x}}{\bar{x} \pm \bar{y}} ER_x \pm \frac{\bar{y}}{\bar{x} \pm \bar{y}} ER_y \right| + \delta$$

$$x_k = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$$

$$\delta = 10^{-t+1} \text{ ou } \frac{1}{2} 10^{-t+1}$$

$$x_{k+1} = \phi(x_k)$$

Boa Sorte!
Não esqueçam de usar
o cérebro. Ok?



Observações:

- Os cálculos podem ser feitos a lápis mas as respostas finais devem ser apresentadas a caneta.
- Não serão consideradas respostas finais sem seus respectivos cálculos ou justificativas.
- Questões puramente discursivas devem ser respondidas a caneta.
- Não é permitido a utilização de celulares ou outros aparelhos eletrônicos (com exceção da calculadora).
- Não é permitido ir ao banheiro ou sair para beber água durante a prova (exceto em emergências).
- Os alunos só poderão entregar a prova e serem liberados após 30 minutos do início da prova.
- Para assinar a lista de presença é obrigatório apresentar algum documento de identificação com foto.
- Não destaque as folhas de prova.
- TODAS as folhas de prova devem ser assinadas **IMEDIATAMENTE** após o recebimento do aluno.

GABONTO - Pld

1ª Questão

$$f(x) = e^x - 4x^2$$

$$\xi \in [0,1]$$

$$x_0 = 0,5 \quad \epsilon = 10^{-4}$$

a) MPF

$$x_0 = 0,5$$

$$x_1 = \phi(x_0) = 0,5 e^{0,5 x_0} = 0,642013$$

$$x_2 = \phi(x_1) = 0,5 e^{0,5 x_1} = 0,68925$$

$$x_3 = \phi(x_2) = 0,5 e^{0,5 x_2} = 0,70573$$

$$x_4 = \phi(x_3) = 0,5 e^{0,5 x_3} = 0,71157$$

Investigando o número de passos $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$

$$|x_1 - x_0| = 0,142 = 1,42 \times 10^{-1}$$

$$|x_2 - x_1| = 0,0472 = 4,72 \times 10^{-2}$$

$$|x_3 - x_2| = 0,01648 = 1,64 \times 10^{-2}$$

$$|x_4 - x_3| = 0,00584 = 5,8 \times 10^{-3} \longrightarrow |x_4 - x_3| < \epsilon \quad \text{Ok!}$$

resp: A raíz aproximada é $x_4 = 0,71157$

b) NEWTON

$$f(x) = e^x - 8x$$

$$x_0 = 0,5$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \left(\frac{e^{x_0} - 4x_0^2}{e^{x_0} - 8x_0} \right) = 0,77590$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - \left(\frac{e^{x_1} - 4x_1^2}{e^{x_1} - 8x_1} \right) = 0,71752$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = x_2 - \left(\frac{e^{x_2} - 4x_2^2}{e^{x_2} - 8x_2} \right) = 0,71481$$

Investigando o
valor de $|f(x)| < \epsilon$

$$f(x_0) = e^{x_0} - 4x_0^2 = 6,49 \times 10^{-1}$$

$$f(x_1) = -2,36 \times 10^{-1}$$

$$f(x_2) = -1,00 \times 10^{-2}$$

$$f(x_3) = -1,5 \times 10^{-5}$$

↳ $|f(x_3)| < \epsilon$ ok!

Investigando o valor de
para os $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$

$$|x_1 - x_0| = 0,27590 = 2,7 \times 10^{-1}$$

$$|x_2 - x_1| = 0,05837 = 5,8 \times 10^{-2}$$

$$|x_3 - x_2| = 0,00271 = 2,7 \times 10^{-3} \longrightarrow |x_3 - x_2| < \epsilon \text{ ok!}$$

resp. A raíz aproximada é $x_3 = 0,71481$

Obs. O método de Newton convergiu mais rápido do que o MPF.

2ª Questão

Etapa 1 - Matriz Escalonada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & 9 \\ 4 & 2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

Etapa 2 - Triangularização

$$\begin{array}{l} L2 = L2 - \frac{4}{3}L1 \\ L3 = L3 - \frac{1}{3}L1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & 9 \\ 0 & 7,3333 & -4,3333 & -14 \\ 0 & 3,3333 & 1,6666 & 0 \end{array} \right)$$

$$L3 = L3 - \frac{3,3333}{7,3333} L2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & 9 \\ 0 & 7,3333 & -4,3333 & -14 \\ 0 & 0 & 3,6363 & 6,3636 \end{array} \right)$$

Etapa 3 - Re-escrever o sistema e resolvê-lo

$$\begin{cases} 3x - 4y + z = 9 \\ 7,3333y - 4,3333z = -14 \\ 3,6363z = 6,3636 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \longleftarrow x = \frac{4y - z + 9}{3} = 1,25 \\ \longleftarrow y = -0,87 \\ \longrightarrow z = \frac{6,3636}{3,6363} = 1,75 \end{array}$$

resp.: A solução do sistema é $(1,25; -0,87; 1,75)$

(3)

3ª Questão

a)

$$923728 \longrightarrow 0,923728 \times 10^6$$

$$0,000542456 \longrightarrow 0,542456 \times 10^{-3}$$

b)

Mód 1 $0,923728000 \times 10^6$

F(9,10,-8,8) $0,542456000 \times 10^{-3}$

Mód 2 $0,9237 \times 10^6$

F(4,10,-8,8) $0,5424 \times 10^{-3}$

c/ TRUNCAMENTO

Mód 3

F(4,10,-2,2) OVERFLOW p/ 0 N° 923728

UNDERFLOW p/ 0 N° 0,000542456

e)

Mód 1 $\rightarrow \text{Máx} = 0,999999999 \times 10^8$

$\rightarrow \text{Mín} = 0,100000000 \times 10^{-8}$

Mód 2 $\rightarrow \text{Máx} = 0,9999 \times 10^8$

$\rightarrow \text{Mín} = 0,1000 \times 10^{-8}$

Mód 3 $\rightarrow \text{Máx} = 0,9999 \times 10^2$

$\rightarrow \text{Mín} = 0,1000 \times 10^{-2}$

4ª Questão

NO MÓDULO / FUNDAMENTO

$$A = 1852 \rightarrow 0,1852 \times 10^4$$

$$\bar{A} = 0,185 \times 10^4$$

$$F = 90218 \rightarrow 0,90218 \times 10^5$$

$$\bar{F} = 0,902 \times 10^5$$

a)

$$ER_A = |A - \bar{A}| = 2$$

$$ER_A = \frac{|EA_A|}{|\bar{A}|} = 1,08 \times 10^{-3}$$

$$ER_A(\%) = ER_A \cdot 100\% = 0,108\%$$

$$ER_F = |F - \bar{F}| = 18$$

$$ER_F = \frac{|EF_F|}{|\bar{F}|} = 1,99 \times 10^{-4}$$

$$ER_F(\%) = ER_F \cdot 100\% = 0,019\%$$

b)

$$\delta_{\text{Trunc}} = 10^{-4+1} = 10^{-3+1} = 10^{-2}$$

$$ER_{(A-F)} = \left| \frac{\bar{A}}{\bar{A}-\bar{F}} ER_A - \frac{\bar{F}}{\bar{A}-\bar{F}} ER_F \right| + \delta_{\text{Trunc}} = 1,018 \times 10^{-2}$$

$$ER_{(A/F)} = |ER_A - ER_F| + \delta_{\text{Trunc}} = 1,088 \times 10^{-2}$$

resp. A operação A/F resulta num erro maior