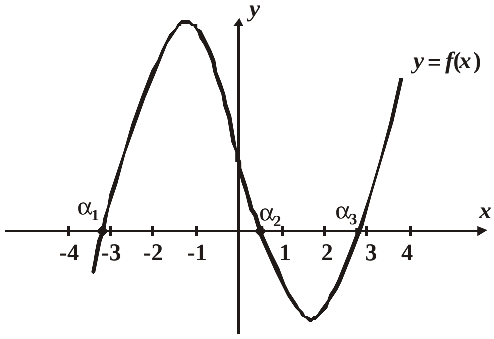
1. Isolar os zeros da função $f(x) = x^3 - 9x + 3$.

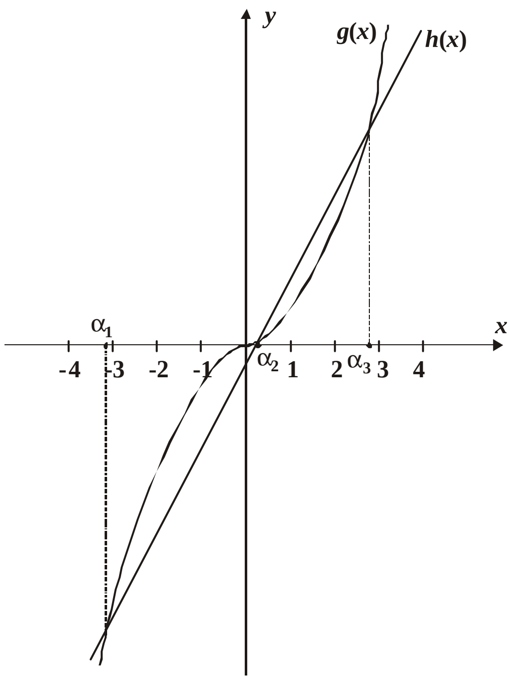
Resolução: Pode-se construir uma tabela de valores para $f(x)$ e analisar os sinais:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	–	+	+	+	+	–	–	+

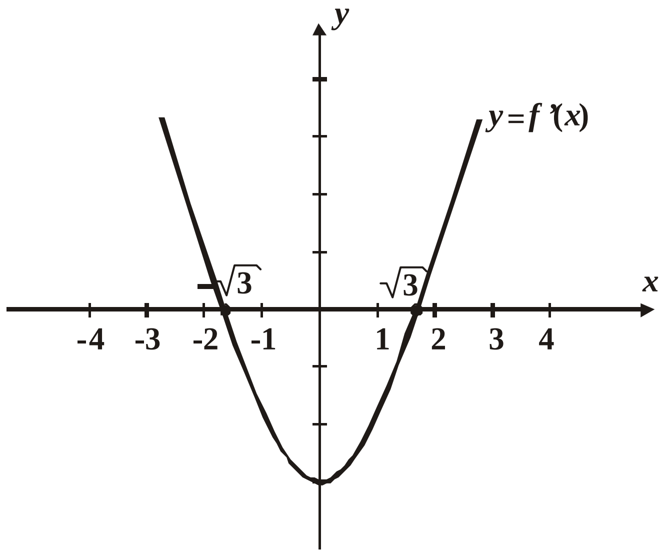
Como $f(-4)\cdot f(-3) < 0$, $f(0)\cdot f(1) < 0$ e $f(2)\cdot f(3) < 0$, conclui-se, de acordo com o teorema 1, que existem zeros de $f(x)$ nos intervalos [–4,–3], [0,1] e [2,3]. Como $f(x)=0$ tem exatamente 3 raízes, pode-se afirmar que existe exatamente um zero em cada um destes intervalos.



Pode-se também chegar às mesmas conclusões partindo da equação $f(x) = x^3 - 9x + 3 = 0$, obtendo-se a equação equivalente $x^3 = 9x - 3$. Neste caso, tem-se que $g(x) = x^3$ e $h(x) = 9x - 3$. Traçando os gráficos de $g(x)$ e $h(x)$, verifica-se que as abscissas dos pontos de intersecção destas curvas estão nos intervalos [–4,–3], [0,1] e [2,3].



Outra forma de se verificar a unicidade de zeros nestes intervalos, é traçar o gráfico da função derivada de $f(x)$, $f'(x) = 3x^2 - 9$ e confirmar que a mesma preserva o sinal em cada um dos intervalos]–4,–3[,]0,1[e]2,3[, conforme a **Erro! Fonte de referência não encontrada.**.

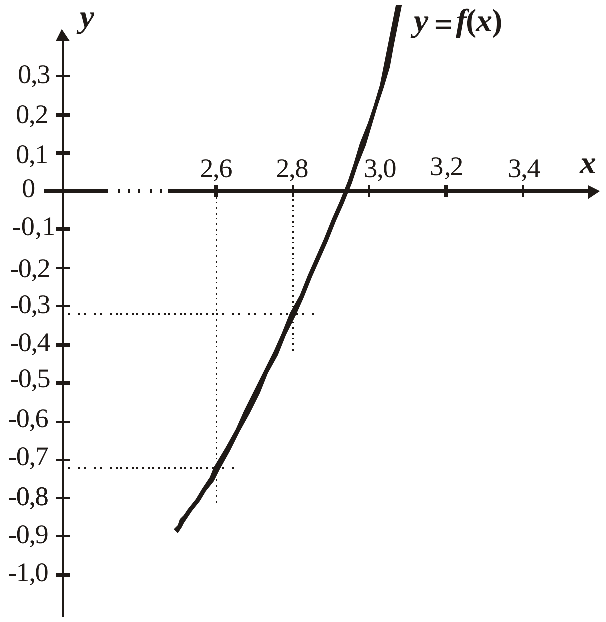

y
y = f '(x)
x
$-\sqrt{3}$
$\sqrt{3}$
-4 -3 -2 -1 1 2 3 4

2. Isolar os zeros da função $f(x) = x \ln x - 3{,}2$.

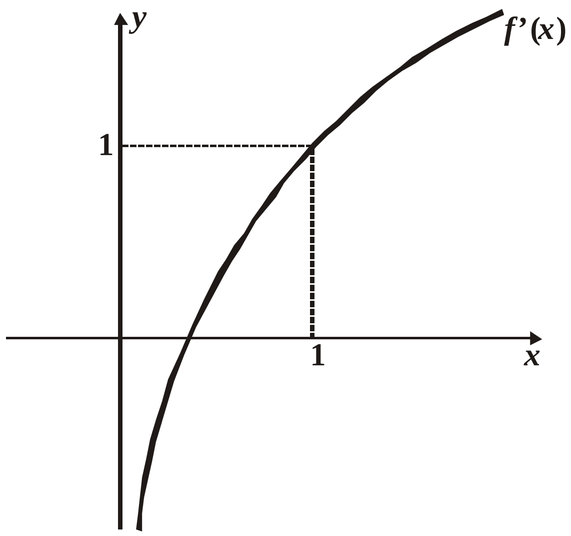
Resolução: Pode-se construir uma tabela de valores para $f(x)$ e analisar os sinais:

x	1	2	3	4
$f(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$

Como $f(2)\cdot f(3) < 0$, conclui-se, de acordo com o teorema 1, que existem zeros de $f(x)$ no intervalo [2,3].



Pode-se ainda verificar graficamente que a função derivada da função $f(x)$, $f'(x) = 1 + \ln x$ preserva o sinal no intervalo]2,3[, neste caso $f'(x) > 0$ $\forall x \in$]2,3[, o que pela **Erro! Fonte de referência não encontrada.** garante que só existe um zero de $f(x)$ neste intervalo.



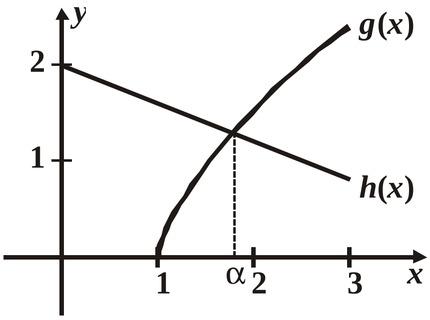
3. Isolar os zeros da função $f(x) = 5\log x - 2 + 0{,}4x$.

Resolução: Pode-se construir uma tabela de valores para $f(x)$ e analisar os sinais:

x	1	2	3
$f(x)$	$-$	$+$	$+$

Como $f(1)\cdot f(2) < 0$, conclui-se, de acordo com o teorema 1, que existem zeros de $f(x)$ no intervalo [1,2].

Pode-se também chegar a esta mesma conclusão partindo da equação $f(x) = 5\log x - 2 + 0{,}4x$ =0, obtendo-se a equação equivalente $5\log x = 2 - 0{,}4x$. Neste caso, tem-se que $g(x) = 5\log x$ e $h(x) = 2 - 0{,}4x$. Traçando os gráficos de $g(x)$ e $h(x)$, verifica-se que a abscissa do <u>único</u> ponto de intersecção destas curvas está no intervalo [1,2].



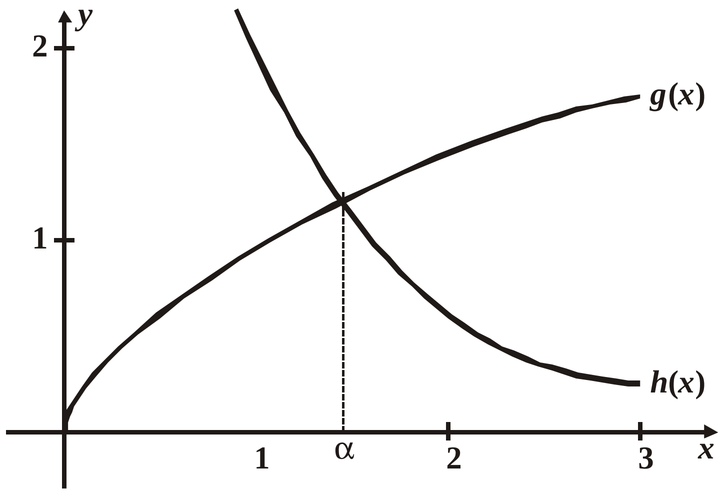
4. Isolar os zeros da função $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$.

Resolução: Pode-se construir uma tabela de valores para $f(x)$ e analisar os sinais:

x	0	1	2	3
$f(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$

Como $f(1)\cdot f(2) < 0$, conclui-se, de acordo com o teorema 1, que existem zeros de $f(x)$ no intervalo [1,2].

Pode-se também chegar a esta mesma conclusão partindo da equação $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$=0, obtendo-se a equação equivalente $\sqrt{x} = 5e^{-x}$. Neste caso, tem-se que $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = 5e^{-x}$. Traçando os gráficos de $g(x)$ e $h(x)$, verifica-se que a abscissa do <u>único</u> ponto de intersecção destas curvas está no intervalo [1,2].



5. Determinar um valor aproximado para $\sqrt{5}$, com erro inferior a 10^{-2}.

Resolução: Determinar $\sqrt{5}$ é equivalente a obter o zero positivo da função $f(x)=x^2-5$. Sabe-se que o intervalo [2,3] contém este zero e a tolerância neste caso é $\varepsilon = 10^{-2}$. Assim, a quantidade mínima de iterações para se obter a resposta com a precisão exigida é:

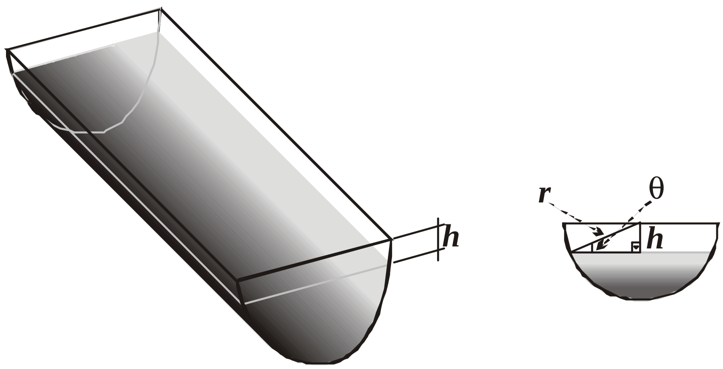
$$n \geq \frac{\log(b-a)-\log\varepsilon}{\log 2} \Rightarrow n \geq \frac{\log(3-2)-\log 10^{-2}}{\log 2} \Rightarrow n \geq \frac{\log 1 + 2\log 10}{\log 2} \Rightarrow n \geq \frac{0+2\cdot 1}{\log 2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow n \geq 6{,}643856$. Como n deve ser intero, tem-se $n = 7$.

n	a	x	b	$f(a)$	$f(x)$	$f(b)$	$(b-a)/2$
1	2,0	2,5	3,0	–	+	+	0,5
2	2,0	2,25	2,5	–	+	+	0,25
3	2,0	2,125	2,25	–	–	+	0,125
4	2,125	2,1875	2,25	–	–	+	0,0625
5	2,1875	2,21875	2,25	–	–	+	0,03125
6	2,21875	2,234375	2,25	–	–	+	0,015625
7	2,234375	2,2421875	2,25	–	+	+	0,0078125

Portanto $\sqrt{5} \cong 2{,}2421875 \pm 0{,}0078125$

6. Um tanque de comprimento L tem uma secção transversal no formato de um semicírculo com raio r (veja a figura). Quando cheio de água até uma distância h do topo, o volume V da água é: $V = L\cdot\left[0{,}5\cdot\pi\cdot r^2 - r^2\,\mathbf{arcsen}\left(\frac{h}{r}\right) - h\sqrt{(r^2-h^2)}\right]$. Supondo que $L = 10\ ft$, $r=1$ ft e $V=12{,}4\ ft^3$, encontre a profundidade da água no tanque com precisão de $0{,}01\ ft$.



Resolução: Para calcular a profundidade $r-h$ da água, substitui-se os valores de r, L e V na expressão anterior para obter a equação $\mathbf{arcsen}(h) + h\sqrt{1-h^2} + 1{,}24 - 0{,}5\pi = 0$ cuja raiz é h. Assim, deve-se calcular o zero da função $f(h) = \mathbf{arcsen}(h) + h\sqrt{1-h^2} + 1{,}24 - 0{,}5\pi$, com precisão de $\varepsilon = 10^{-2}$. Para isto, primeiramente isola-se o zero desta função num intervalo da seguinte forma.

Pode-se construir uma tabela de valores para $f(h)$ e analisar os sinais:

h	-1	0	1
$f(h)$	–	–	+

Como $f(0)\cdot f(1) < 0$, conclui-se, de acordo com o teorema 1, que existem zeros de $f(h)$ no intervalo [0,1].

Para se confirmar a unicidade deste zero neste intervalo, pode-se utilizar a OBS. 1, isto é, calcula-se a derivada $f'(h)$ de $f(h)$ para verificar que a mesma preserva o sinal no intervalo]0,1[. Assim, obtém-se $f'(h)=\dfrac{1}{\sqrt{1-h^2}}+\sqrt{1-h^2}+\dfrac{h}{2}\left(1-h^2\right)^{-1/2}\cdot(2h)$

$f'(h)=\dfrac{2(1-h^2)}{\sqrt{1-h^2}}>0\ \forall h\in]0,1[$, o que significa que $f(h)$ é estritamente crescente neste intervalo, o que garante a unicidade do zero de $f(h)$ em]0,1[.

Agora determina-se o número de iterações necessárias para se obter a precisão exigida:

$$n\geq\frac{\log(b-a)-\log\varepsilon}{\log 2}\Rightarrow n\geq\frac{\log 1-\log 10^{-2}}{\log 2}\Rightarrow n\geq 6{,}643856$$

Logo são necessárias $n=7$ iterações.

n	a	h	b	$f(a)$	$f(h)$	$f(b)$	$(b-a)/2$
1	0	0,5	1	–	+	+	0,5
2	0	0,25	0,5	–	+	+	0,25
3	0	0,125	0,25	–	–	+	0,125
4	0,125	0,1875	0,25	–	+	+	0,0625
5	0,125	0,15625	0,1875	–	–	+	0,03125
6	0,15625	0,171875	0,1875	–	+	+	0,015625
7	0,15625	0,1640625	0,171875	–	–	+	0,0078125

Assim, $\bar{h}=0{,}1640625\pm0{,}0078125$ e a profundidade $r-h$ da água da água solicitada é aproximadamente 1–(0,1640625) ft.

7. Obter algumas funções de ponto fixo para a função $f(x)=x^2+x-6$.

Resolução: Efetuando diferentes manipulações algébricas sobre a equação $f(x)=0$ ou $x^2+x-6=0$, podem-se obter diferentes funções de ponto fixo, como por exemplo:

a) $x^2+x-6=0\Rightarrow x=6-x^2$, logo $\phi_1(x)=6-x^2$. Como $\phi_1(-3)=-3$ e $\phi_1(2)=2$, tem-se que –3 e 2 são pontos fixos de $\phi_1(x)$.

b) $x^2+x-6=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{6-x}$, logo pode-se ter $\phi_2(x)=\sqrt{6-x}$ e neste caso tem-se que 2 é ponto fixo de $\phi_2(x)$, pois $\phi_2(2)=2$, ou $\phi_2(x)=-\sqrt{6-x}$ e neste caso tem-se que –3 é ponto fixo de $\phi_2(x)$, pois $\phi_2(-3)=-3$.

c) $x^2+x-6=0\Rightarrow x\cdot x+x-6=0\Rightarrow x=\dfrac{6}{x}-\dfrac{x}{x}\Rightarrow x=\dfrac{6}{x}-1$, logo $\phi_3(x)=\dfrac{6}{x}-1$. Como $\phi_3(-3)=-3$ e $\phi_3(2)=2$, tem-se que –3 e 2 são pontos fixos de $\phi_3(x)$.

d) $x^2+x-6=0\Rightarrow x\cdot x+x-6=0\Rightarrow x(x+1)-6=0\Rightarrow x=\dfrac{6}{x+1}$, logo $\phi_4(x)=\dfrac{6}{x+1}$.

Como $\phi_4(-3)=-3$ e $\phi_4(2)=2$, tem-se que –3 e 2 são pontos fixos de $\phi_4(x)$.

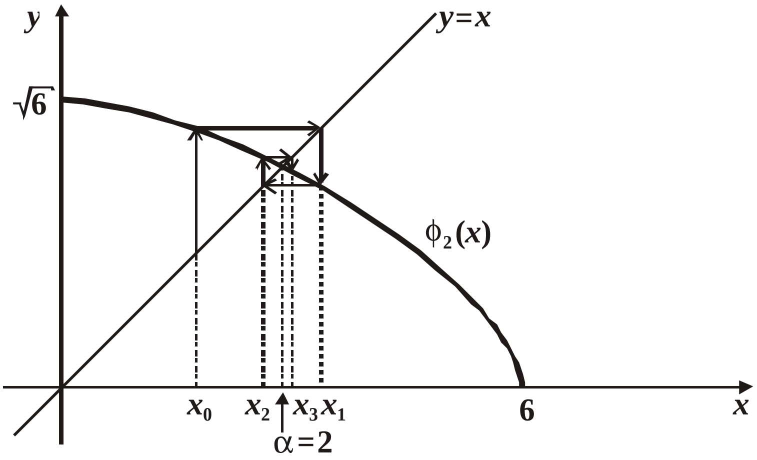
No próximo passo algumas destas funções serão utilizadas na tentativa de gerar seqüências aproximadoras dos zeros α de $f(x)$.

8. Aproximar o maior zero da função $f(x) = x^2 + x - 6$, utilizando a função $\phi_2(x) = \sqrt{6-x}$, e x_0=1,5.

Resolução: Neste caso a fórmula de recorrência $x_{n+1} = \phi(x_n)$, n=0, 1, 2, … será: $x_{n+1} = \phi_2(x_n) = \sqrt{6-x_n}$, e pode-se construir a seguinte tabela:

n	x_n	$x_{n+1} = \phi_2(x_n) = \sqrt{6-x_n}$
0	1,5	2,12132
1	2,12132	1,96944
2	1,96944	2,00763
3	2,00763	1,99809
4	1,99809	2,00048
⋮	⋮	⋮

Percebe-se que neste caso a seqüência $\{x_n\}$ converge para a raiz α=2 da equação $x^2 + x - 6$ =0.

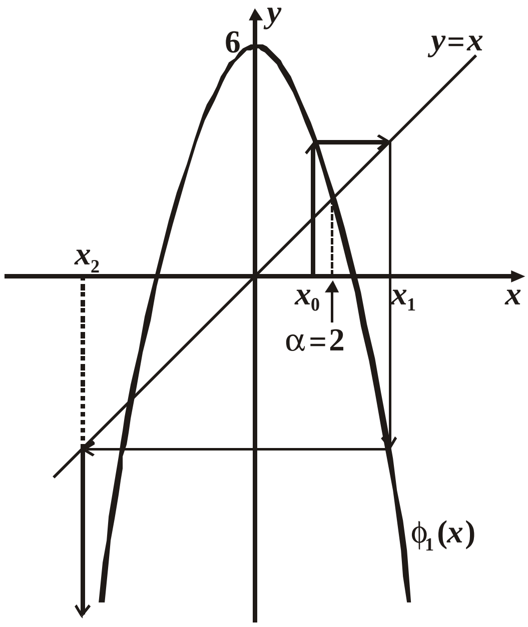


9. Aproximar o maior zero da função $f(x) = x^2 + x - 6$, utilizando a função $\phi_1(x) = 6 - x^2$, e x_0=1,5.

Resolução: Neste caso a fórmula de recorrência $x_{n+1} = \phi(x_n)$, n=0, 1, 2, … será: $x_{n+1} = \phi_1(x_n) = 6 - x_n^2$, e pode-se construir a seguinte tabela:

n	x_n	$x_{n+1} = \phi_1(x_n) = 6 - x^2$
0	1,5	3,75
1	3,75	–8,0625
2	–8,0625	–59,003906
3	–59,003906	–3475,4609
⋮	⋮	⋮

Percebe-se que neste caso a seqüência $\{x_n\}$ não converge para a raiz $\alpha = 2$ da equação $x^2 + x - 6 = 0$.



10. Verificar as condições i) e ii) do teorema anterior quando do uso da função $\phi_2(x) = \sqrt{6 - x}$ no 8.

Resolução:

Verificação da condição i):

- $\phi_2(x) = \sqrt{6 - x}$ é contínua no conjunto $S = \{x \in \Re / x \leq 6\}$.
- $\phi_2'(x) = \dfrac{-1}{2 \cdot \sqrt{6 - x}}$ é contínua no conjunto $T = \{x \in \Re / x < 6\}$.

Verificação da condição ii):

- $|\phi_2'(x)| < 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{-1}{2 \cdot \sqrt{6 - x}}\right| < 1 \Leftrightarrow x < 5{,}75$

Logo, é possível obter um intervalo I, tal que α=2$\in I$, onde as condições i) e ii) estão satisfeitas.

11. Verificar as condições i) e ii) do teorema anterior quando do uso da função $\phi_1(x) = 6 - x^2$.

Resolução:

Verificação da condição i):

- $\phi_1(x) = 6 - x^2$ e $\phi_1'(x) = -2x$ são contínuas em $\Re$.

Verificação da condição ii):

- $|\phi_1'(x)| < 1 \Leftrightarrow |-2x| < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

Logo, não existe um intervalo I, com $\alpha=2\in I$, e tal que $|\phi_1'(x)| < 1$, $\forall\ x\in I$.

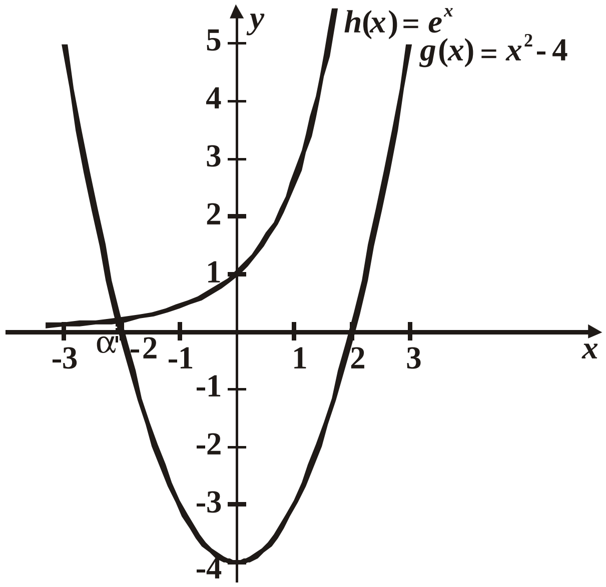
12. Encontrar o zero de $f(x) = e^x - x^2 + 4$ com precisão $\varepsilon = 10^{-6}$, utilizando o método do ponto fixo.

Resolução: Pode-se construir uma tabela de valores para $f(x)$ e analisar os sinais:

x	-3	-2	-1
$f(x)$	$-$	$+$	$+$

Como $f(-3)\cdot f(-2) < 0$, conclui-se, de acordo com o **Erro! Fonte de referência não encontrada.**, que existem zeros de $f(x)$ no intervalo [–3,–2].

Fazendo $h(x) = e^x$ e $g(x) = x^2 - 4$, pode-se verificar que os gráficos das mesmas se intersectam em apenas um ponto, o que garante que só existe um zero de $f(x)$ neste intervalo.



Assim, o zero de $f(x)$ está isolado em [–3,–2].

Procurando uma função de ponto fixo adequada pode-se fazer:

$e^x - x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = e^x + 4 \Rightarrow x = -\sqrt{e^x + 4} \Rightarrow \phi(x) = -\sqrt{e^x + 4}$

Verificando as hipóteses i) e ii) do **Erro! Fonte de referência não encontrada.**:

i) $\phi'(x) = -\dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x + 4}}$

$\phi(x)$ e $\phi'(x)$ são contínuas em [–3,–2], o que garante a primeira condição do **Erro! Fonte de referência não encontrada.**.

ii) $k = \max\limits_{x\in[-3,-2]} |\phi'(x)|$

$$\phi'(x) = -\frac{e^x}{2.\sqrt{e^x + 4}}$$

$$\phi'(-3) = -\frac{e^{-3}}{2.\sqrt{e^{-3} + 4}} = -0{,}01237$$

$$\phi'(-2) = -\frac{e^{-2}}{2.\sqrt{e^{-2} + 4}} = -0{,}03328$$

Como $\phi'(x)$ é decrescente no intervalo I =[–3,–2], k = 0,03328 < 1, o que garante a segunda condição do **Erro! Fonte de referência não encontrada.**.

Procura-se agora, o extremo do intervalo I =[–3,–2] mais próximo do zero α de $f(x)$:
Para isto, segue-se o indicado na observação 10, isto é, calcula-se o ponto médio do intervalo I =[–3,–2]: $\hat{x}=\dfrac{(-3+(-2))}{2}$ = –2,5 e $\phi(\hat{x}) = \phi(-2{,}5) = -\sqrt{e^{-2,5}+4}$ = –2,02042.
Como $\hat{x}<\phi(\hat{x})$, isto é $\hat{x}$=–2,5 < $\phi(\hat{x})=\phi(-2{,}5)$= –2,02042, então α está entre $\hat{x}$=–2,5 e –2, ou seja, –2 é o extremo de I mais próximo de α. Desta forma, iniciando o processo recursivo pelo ponto x_0 = –2, garante-se que todos os termos da seqüência aproximadora pertencerão ao intervalo I =[–3,–2].
Logo, utilizando $\phi(x) = -\sqrt{e^x+4}$ a partir de x_0 = –2, gera-se uma seqüência convergente para o zero α de $f(x)$.

n	x_n	x_{n+1}	$\lvert x_{n+1}-x_n\rvert$
0	–2	–2,0335524	0,0335524 > 10^{-6}
1	–2,0335524	–2,0324541	0,0010983 > 10^{-6}
2	–2,0324541	–2,0324895	0,0000354 > 10^{-6}
3	–2,0324895	–2,0324884	0,0000011 > 10^{-6}
4	–2,0324884	–2,0324884	0 < 10^{-6}

Portanto, $\bar{x}$ = –2,0324884.

13. Encontrar a solução para a equação $x = \cos x$ com precisão $\varepsilon = 10^{-6}$.

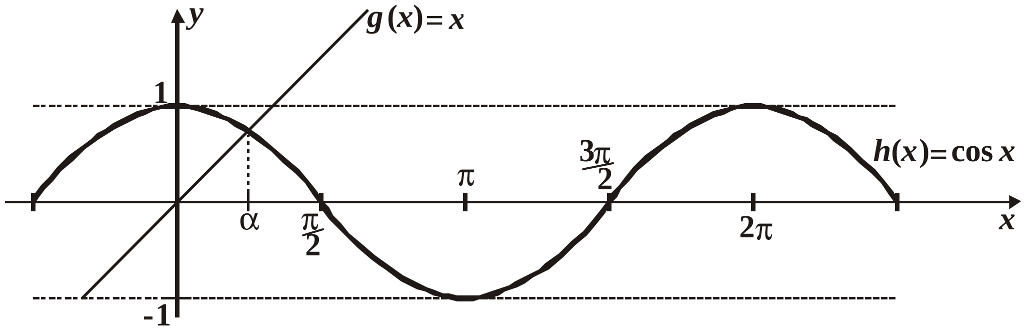
Resolução: $x = \cos x \Rightarrow \cos x - x = 0 \Rightarrow f(x) = \cos x - x$

Pode-se construir uma tabela de valores para $f(x)$ e analisar os sinais:

x	0	$\frac{p}{2}$
$f(x)$	+	−

Como $f(0) \cdot f(\frac{\pi}{2}) < 0$, conclui-se, de acordo com o **Erro! Fonte de referência não encontrada.**, que existem zeros de $f(x)$ no intervalo $[0, \frac{p}{2}]$.

Fazendo $g(x) = x$ e $h(x) = \cos x$, pode-se verificar que os gráficos das mesmas se intersectam em apenas um ponto, o que garante que só existe um zero de $f(x)$ neste intervalo. Esta informação também pode ser verificada observando que a função $f'(x) = -\text{sen } x - 1$, preserva o sinal $\forall x \in]0, \frac{p}{2}[$, isto é, tem-se que neste caso $f'(x) < 0$, $\forall x \in]0, \frac{p}{2}[$ (e também em $[0, \frac{p}{2}]$). Isto significa dizer que a função $f(x)$ é estritamente decrescente no intervalo $]0, \frac{p}{2}[$.



Como $f''(x) = -\cos x$, também preserva o sinal em $[0, \frac{p}{2}]$, ($f''(x) < 0$, $\forall x \in]0, \frac{p}{2}[$, tem-se que as condições i), ii) e iii) do teorema 3 são satisfeitas.

Assim, a fórmula recursiva de Newton para este caso fica: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\cos(x_n) - x_n}{-\text{sen}(x_n) - 1}$

para $n \geq 0$. Agora deve-se escolher x_0 convenientemente: Pode-se verificar que $x_0 = \frac{\pi}{4}$ é uma boa escolha (o que garantirá que todos os termos da seqüência gerada pertencerão ao intervalo considerado. Outra opção é seguir a dica da observação 14.

n	x_n	x_{n+1}	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	0,785398163	0,739536133	0,04586203 > 10^{-6}
1	0,739536133	0,739085178	4,50955.10^{-4} > 10^{-6}
2	0,739085178	0,739085133	4,5.10^{-8}<10^{-6}

Portanto, $\bar{x}$ = 0,739085133.

Nos exercícios seguintes, considerando cada método especificado, determine uma aproximação para o zero da função.

14. Pelo método da Bissecção, determine uma aproximação para $\bar{x} \in (1,2)$ da função $f(x) = e^{-x^2} - \mathbf{cos}\, x$ com aproximação $\varepsilon_1 = 10^{-4}$ tal que $(b-a)/2 < \varepsilon_1$.

Resolução:

n	a	x	b	$f(a)$	$f(x)$	$f(b)$	$(b-a)/2$
1	1	1,5	2	-	+	+	0,5
2	1	1,25	1,5	-	-	+	0,25
3	1,25	1,375	1,5	-	-	+	0,125
4	1,375	1,4375	1,5	-	-	+	0,0625
5	1,4375	1,46875	1,5	-	+	+	0,03125
6	1,4375	1,453125	1,46875	-	+	+	0,015625
7	1,4375	1,4453125	1,453125	-	-	+	0,0078125
8	1,4453125	1,44921875	1,453125	-	+	+	0,00390625
9	1,4453125	1,447265625	1,44921875	-	-	+	0,001953125
10	1,447265625	1,448242188	1,44921875	-	+	+	0,000976563
11	1,447265625	1,447753906	1,448242188	-	+	+	0,000488281
12	1,447265625	1,447509766	1,447753906	-	+	+	0,000244141
13	1,447265625	1,447387695	1,447509766	-	-	+	0,00012207
14	1,447387695	1,44744873	1,447509766	-	+	+	6,10352E-05

Logo, $\bar{x} = 1{,}44744873$

15. Pelo método do Ponto Fixo ou Aproximações Sucessivas, determine uma aproximação para $\bar{x} \in (1,2)$ da função $f(x) = e^{-x^2} - \mathbf{cos}\, x$ com aproximação $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-4}$ tal que $|f(x_{n+1})| < \varepsilon_1$ ou $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon_2$. Utilize $x_0 = 1{,}5$.

Resolução:

$f(x) = e^{-x^2} - \mathbf{cos}\, x$

$f(x) = 0 \Rightarrow e^{-x^2} - \mathbf{cos}\, x + x - x = 0$

$\phi_1(x) = -\mathbf{cos}\, x + e^{-x^2} + x \Rightarrow \phi_1'(x) > 1$ em (1,2)

$\phi_2(x) = \mathbf{cos}\, x - e^{-x^2} + x \Rightarrow \phi_2'(x) < 1$ em (1,2)

$\Rightarrow \quad \phi(x) = \mathbf{cos}\, x - e^{-x^2} + x \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = \phi(x_n)$

n	x_n	x_{n+1}	$\|x_{n+1} - x_n\|$	$\|f(x_{n+1})\|$	Parada
0	1,5	1,465337977	0,034662023	0,01154599	
1	1,465337977	1,453791987	0,01154599	0,004075472	
2	1,453791987	1,449716515	0,004075472	0,001466938	
3	1,449716515	1,448249577	0,001466938	0,000531683	
4	1,448249577	1,447717894	0,000531683	0,000193187	
5	1,447717894	1,447524708	0,000193187	7,02578E-05	$\|f(x_{n+1})\| < \varepsilon_1$

Logo, $\bar{x} = 1{,}447524708$.

16. Pelo método de Newton-Raphson, determine uma aproximação para $\bar{x} \in (1,2)$ da função $f(x) = e^{-x^2} - \mathbf{cos}\, x$ com aproximação $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-4}$ tal que $|f(x_{n+1})| < \varepsilon_1$ ou $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon_2$. Utilize $x_0 = 1{,}5$.

Resolução:

$$f(x) = e^{-x^2} - \mathbf{cos}\, x \Rightarrow f'(x) = -2x\, e^{-x^2} + \mathbf{sen}\, x$$

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow \phi(x) = x - \frac{e^{-x^2} - \mathbf{cos}\, x}{-2xe^{-x^2} + \mathbf{sen}\, x} \Rightarrow x_{n+1} = \phi(x_n)$$

n	x_n	x_{n+1}	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$	$\lvert f(x_{n+1}) \rvert$	Parada
0	1,5	1,4491235	0,0508765	0,001088623	
1	1,4491235	1,447416347	0,001707153	1,32044E-06	$\lvert f(x_{n+1}) \rvert < \varepsilon_1$

Logo, $\bar{x} = 1{,}447416347$.