

Exercícios de Cálculo Numérico - Erros

1. Considere um computador de 14 bits com expoente máximo $e = (15)$ e a representação em aritmética flutuante na base 2.
 - (a) Determine o menor número positivo representável nesta máquina, na base 10.
 - (b) Determine o maior número positivo representável nesta máquina, na base 10.
 - (c) Represente o número $x = (12, 37)$ nesta máquina e calcule o erro da representação na base 10.
 - (d) Determine o menor valor de ϵ tal que $12, 37 + \epsilon > 12, 37$.
2. Numa calculadora aproxima-se o valor de e^x , para todo $x \in [-1, 1]$, pelo valor do polinômio de Taylor de grau 3, obtido através da expansão de e^x em série de Taylor em torno do ponto $x_0 = 0$.
 - (a) Qual a aproximação de $e^{0.5}$ fornecida pela calculadora?
 - (b) Utilizando a expressão do erro cometido ao se aproximar a função e^x pela sua expansão em série de Taylor, forneça um limitante superior para o erro cometido no item (a).
3. Usando a série de Taylor, determine o valor aproximado e o limitante superior do erro, utilizando 4 dígitos significativos, para o cálculo de $\text{sen}(47^\circ)$, em torno do ponto $x_0 = (45^\circ)$, com polinômios de grau
 - (a) $\eta = 2$
 - (b) $\eta = 3$
 - (c) Usando o polinômio de grau $\eta = 2$ e o erro associado, calcule $\int_0^{47^\circ} \text{sen}(x) dx$, sabendo que o valor "exato" é $I = 0.318001639$
4. Considere a integral abaixo:

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx$$

Fazendo uso da integral por partes obtém-se a recorrência:

$$I_n = 1 - nI_{n-1}; \quad n = 2, 3, \dots \quad (1)$$

- (a) Calcule o valor de I_{100} , usando (1), para $n = 2, 3, \dots, 100$, sabendo que $I_1 = 1/e$.
- (b) Calcule o valor de I_{100} , usando $I_{n-1} = \frac{(1 - I_n)}{n}$, para $n = 200, 199, \dots, 101$, utilizando a aproximação $I_{200} \approx 1/201$.
- (c) Sabendo-se que $0 \leq I_n \leq 1/(n+1)$, compare os dois resultados e verifique em qual deles o erro é maior. Qual é a melhor maneira de calcular? Justifique a resposta.

5. Considere a série Harmônica dada por $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Mostra-se que $S > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$ e portanto é divergente. No entanto, se calcularmos S , usando o algoritmo: $S_1 = 1$ e $S_{k+1} = S_k + \frac{1}{k+1}$, $k \geq 1$, obtemos um resultado finito. Explique o que ocorre.
6. Verifica-se que a série de Taylor da função e^x em torno de $x_0 = 0$ é:

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (2)$$

As somas parciais $S_n = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!}$ podem ser usadas para calcular aproximações para o valor de e^{-5} de dois modos:

- Tomando $x = -5$ em (2);
- Tomando $x = 5$ em (2) e lembrando que $e^{-5} = 1/e^5$;
- Compare estes dois procedimentos com $n = 100$. Compare também seus resultados com o valor de e^{-5} da calculadora.

Gabarito – Erros

Exercício 1:

- (a) Como o expoente máximo é $(15)_{10}$, então o número de bits para o expoente é 5 (lembrando que o número de bits do expoente – abreviado por n.e. – é encontrado através da relação $e_{\text{máx}} = 2^{n.e.} - 1$).

Assim, montamos a seguinte tabela que relaciona os 5 bits com os expoentes:

Bits	Expoente
00000	-14 (forma desnormalizada)
00001	-14
00010	-13
...	...
01101	-2
01110	-1
01111	0
10000	+1
10001	+2
10010	+3
...	...
11101	+14
11110	+15
11111	∞ , NaN ou Indeterminação

O menor número positivo representável nesta máquina na forma **normalizada** deve ter o menor expoente (00001), zeros na mantissa, além do bit 0 para o sinal do número, que é positivo. Então, temos:

$$\underbrace{0}_{\text{s.n. expoente}} \underbrace{00001}_{\text{expoente}} \underbrace{00000000}_{\text{mantissa}}$$

$$1,00000000 \times 2^{-14} \approx 6,1035 \times 10^{-5}$$

O menor número mesmo está na forma **desnormalizada** e deve ter como menor expoente 00000. Assim, temos:

$$\underbrace{0}_{\text{s.n. expoente}} \underbrace{00000}_{\text{expoente}} \underbrace{00000001}_{\text{mantissa}}$$

$$0,00000001 \times 2^{-14} \approx 0,0238 \times 10^{-5}$$

- (b) O maior número positivo representável nesta máquina deve ter o maior expoente (11110), 1's na mantissa, além do bit 0 para o sinal positivo do número. Então, temos:

$$\underbrace{0}_{\text{s.n. expoente}} \underbrace{11110}_{\text{expoente}} \underbrace{11111111}_{\text{mantissa}}$$

$$1,11111111 \times 2^{15} = (2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-8}) \times 2^{15} = 2^7 + 2^8 + 2^9 + \dots + 2^{15} = 2^{16} - 2^7 = 65536 - 128 = 65408$$

- (c) $12,37 = 12 + 0,37$

Parte inteira:

$$\begin{array}{r} 12 \mid \underline{2} \\ \mathbf{0} \ 6 \mid \underline{2} \\ \mathbf{0} \ 3 \mid \underline{2} \\ \mathbf{1} \ 1 \mid \underline{2} \\ \mathbf{1} \ 0 \end{array}$$

Parte fracionária:

$$\begin{array}{l} 0,37 \times 2 = \mathbf{0,74} \\ 0,74 \times 2 = \mathbf{1,48} \\ 0,48 \times 2 = \mathbf{0,96} \\ 0,96 \times 2 = \mathbf{1,92} \\ 0,92 \times 2 = \mathbf{1,84} \\ 0,84 \times 2 = \mathbf{1,68} \\ 0,68 \times 2 = \mathbf{1,36} \\ \dots \end{array}$$

Em representação binária: $12,37 = 1100,0101111\dots$

Mas, nesta máquina, que possui apenas 8 dígitos para a mantissa, temos:

$$1,10001011 \times 2^3 = 12,34375$$

↓
8 bits p/
mantissa

$$0 \underbrace{10010}_{\text{s.n. expoente}} \underbrace{10001011}_{\text{mantissa}}$$

Erro da representação: $\varepsilon = 12,37 - 12,34375 = 0,02625$

(d)

$$\begin{array}{r} 12,37 = 1,10001011 \quad | \quad \times 2^3 \\ \varepsilon = 0,00000001 \quad | \quad \times 2^3 \\ 12,37 + \varepsilon = 1,10001100 \quad | \quad \times 2^3 \end{array} = 1,00000000 \times 2^{-8} \times 2^3 = 0,03125$$

↓
Limite da mantissa

Exercício 2:

Polinômio de Taylor de Grau 3

$x \in [-1, 1]$

$x_0 = 0$

$f(x) = e^x$

(a)

$$P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2} + \frac{f'''(x_0)(x - x_0)^3}{3!}$$

quando $x = 0.5$:

$$P_3(0.5) = e^0 + e^0 \cdot 0.5 + \frac{e^0 \cdot (0.5)^2}{2} + \frac{e^0 \cdot (0.5)^3}{6}$$

$$= 1 + 0.5 + 0.125 + \frac{(0.5)^3}{6}$$

$$\approx 1.645833333$$

(b) Limitante superior para o erro:

$$|E_3(x)| \leq \frac{|f^{iv}(x)|_{\text{máx}} |x - x_0|^4}{4!}$$

Lembrando que $0 < \varepsilon < 0.5$

$f^{iv}(0) = 1$

$f^{iv}(0.5) = e^{0.5} \approx 1.648721271 > 1$ (logo, esse vai ser o valor usado para o limitante)

$$|E_3(0.5)| \leq \frac{e^{0.5} \cdot (0.5)^4}{24} \approx 4.29 \times 10^{-3}$$

Exercício 3:

(a)

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2}$$

$$x = 47^\circ = \frac{47\pi}{180} \text{ rad}$$

$$x_0 = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$f(x) = \text{sen}(x)$$

$$f'(x) = \text{cos}(x)$$

$$f''(x) = -\text{sen}(x)$$

$$P_2(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$P_2\left(\frac{47\pi}{180}\right) \approx 0.73135867$$

(b) fazer com $\eta = 3$

(c)

Usando polinômio de Grau 2 :

$$\int_0^{47\pi/180} \left[P_2(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 \right] dx$$

$$= \left[\frac{\sqrt{2}}{2} x \right]_{x=0}^{47\pi/180} + \left[\frac{\sqrt{2}}{4} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 \right]_{x=0}^{47\pi/180} - \left[\frac{\sqrt{2}}{12} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 \right]_{x=0}^{47\pi/180}$$

$$\approx 0.305283626$$

Erro associado :

$$E = \int_0^{47\pi/180} \text{sen}(x) - P_2(x) \approx 0.012718013$$

Exercício 4:

(a)

$$I_1 = \frac{1}{e}$$

$$I_2 = 1 - \frac{2}{e} = 1 - 2! \left(\frac{1}{e} \right)$$

$$I_3 = 1 - 3 \left(1 - \frac{2}{e} \right) = 1 - 3 + \frac{3 \cdot 2}{e} = 1 - \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{e} = 1 - 3! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{e} \right)$$

$$I_4 = 1 - 4 \left(1 - 3 + \frac{3 \cdot 2}{e} \right) = 1 - 4 + 4 \cdot 3 - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{e} = 1 - \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2!} - \frac{4!}{e} = 1 - 4! \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{e} \right)$$

$$I_5 = 1 - 5 \left(1 - 4 + 4 \cdot 3 - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{e} \right) = 1 - 5 + 5 \cdot 4 - 5 \cdot 4 \cdot 3 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{e} = 1 - \frac{5!}{4!} + \frac{5!}{3!} - \frac{5!}{2!} + \frac{5!}{e} = 1 - 5! \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{e} \right)$$

...

Assim, deduzimos que a fórmula para I_n é :

$$I_n = 1 - n! \left[\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-3)!} - \frac{1}{(n-4)!} + \dots - (-1)^{n-1} \frac{1}{e} \right]$$

Então,

$$I_{100} = 1 - 100! \left(\frac{1}{99!} - \frac{1}{98!} + \frac{1}{97!} - \dots - \frac{1}{2!} + \frac{1}{e} \right)$$

$$= 1 - 100! \left[\underbrace{\left(\frac{1}{99!} + \frac{1}{97!} + \dots + \frac{1}{3!} + \frac{1}{e} \right)}_{\approx 0.718281803 \text{ (na calculadora)}} - \underbrace{\left(\frac{1}{98!} + \frac{1}{96!} + \dots + \frac{1}{2!} \right)}_{\approx 0.543080634 \text{ (na calculadora)}} \right] \ll 0$$

(b)

$$I_{200} \approx \frac{1}{201}$$

$$I_{199} = \frac{1 - I_{200}}{200} = \frac{1 - (1/201)}{200} = \frac{(200/201)}{200} = \frac{1}{201}$$

$$I_{198} = \frac{1}{201}$$

$$I_{100} = \frac{1}{201} \approx 0.004975$$

(c)

como em (b), $0 \leq \frac{1}{201} \leq \frac{1}{101}$, portanto o erro é maior em (a). A melhor maneira de calcular, então, é usar

$$I_{n-1} = \frac{(1 - I_n)}{n}, \text{ porque em todas as iterações o resultado sempre converge para } \frac{1}{201}.$$

Exercício 5:

Fonte: Howard Anton – “Cálculo, um novo horizonte” – Vol.2 – 6ª Edição – Ed. Bookman – pág. 60.

Uma das mais importantes de todas as séries divergentes é a série harmônica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

A série harmônica surge em conexão com os sons harmônicos produzidos pela vibração de uma corda musical. Não é evidente que esta série diverge. Entretanto, a divergência se tornará aparente quando examinarmos as somas parciais em detalhe. Como os termos da série são todos positivos, a soma parcial

$$S_1 = 1;$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2};$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3};$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4};$$

...

forma uma seqüência estritamente crescente

$$S_1 < S_2 < S_3 < \dots < S_n < \dots$$

Podemos provar a divergência demonstrando que não há nenhuma constante M (cota superior para a seqüência) que seja maior ou igual que suas somas parciais (veja o teorema no final do exercício). Para este fim, consideraremos algumas somas parciais selecionadas, isto é, $S_2, S_4, S_8, S_{16}, S_{32}, \dots$. Note que os índices são potências sucessivas de 2, de modo que essas são as somas parciais da forma S_{2^n} . Essas somas parciais satisfazem as desigualdades:

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2}$$

$$S_4 = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = S_2 + \frac{1}{2} > \frac{3}{2}$$

$$S_8 = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = S_4 + \frac{1}{2} > \frac{4}{2}$$

$$S_{16} = S_8 + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} > S_8 + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} \right) = S_8 + \frac{1}{2} > \frac{5}{2}$$

·
·
·

$$S_{2^n} > \frac{n+1}{2}$$

Se M é uma constante qualquer, podemos achar o inteiro positivo n tal que $(n+1)/2 > M$. No entanto, para este n

$$S_{2^n} > \frac{n+1}{2} > M$$

de modo que nenhuma constante M é maior ou igual que cada soma parcial da série harmônica. Isso prova a divergência.

Teorema:

Se uma seqüência $\{S_n\}$ for crescente a partir de um certo termo, então existem duas possibilidades:

(a) Existe uma constante M , chamada de *cota superior* para a seqüência, tal que se $S_n \leq M$ para todo n a partir de um certo termo, e, neste caso, a seqüência converge a um limite L satisfazendo $L \leq M$.

(b) Não existe cota superior, e neste caso, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$

Exercício 6:

$n = 100$

Procedimento (a): $x = -5$

$$e^{-5} \approx \sum_{i=0}^{100} \frac{(-5)^i}{i!} = 1 + (-5) + \frac{(-5)^2}{2!} + \frac{(-5)^3}{3!} + \dots + \frac{(-5)^{100}}{100!} \approx -146,4465 = -146446,5 \times 10^{-3}$$

Procedimento (b): $x = 5$

$$e^{-5} = \frac{1}{e^5} \approx \frac{1}{\sum_{i=0}^{100} \frac{5^i}{i!}} = \frac{1}{1 + 5 + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \dots + \frac{5^{100}}{100!}} \approx \frac{1}{148,4123} = 6.737986003 \times 10^{-3}$$

O procedimento (b) é o melhor!