

Exercícios de Cálculo Numérico Integração Numérica

1. Calcule as integrais abaixo pela regra dos trapézios e pela regra 1/3 de Simpson, usando 4 e 6 divisões do intervalo $[a, b]$:

$$(a) \int_1^2 e^{-x} dx, \quad (b) \int_1^4 \sqrt{x} dx, \quad (c) \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x}} dx, \quad (d) \int_0^{0.6} \frac{1}{1+x} dx.$$

2. Determine o número mínimo de subintervalos necessários para que cada uma das integrais do exercício 1, tenham precisão $\varepsilon \leq 1.10^{-5}$
3. Verifique que para qualquer polinômio $P(x)$ de grau $n \leq 1$, o valor da integral;

$$\int_a^b P(x) dx = P(m)$$

é exato, para $m = \frac{a+b}{2}$ (Regra do ponto médio).

4. Dê um exemplo de uma função, onde a regra dos trapézios calcula o valor exato da integral.
5. Dê um exemplo de uma função, onde a regra 1/3 de Simpson calcula o valor exato da integral.
6. Calcule a área definida por $f(x)$ pela regra 1/3 de Simpson:

x	2	4	6	8	10	12	14	16	18
f(x)	0.5	0.9	1.1	1.3	1.7	2.1	1.5	1.1	0.6

7. Considere a integral abaixo:

$$I = \int_0^1 x^3 e^x dx$$

Sabe-se que o valor exato da integral é $I = 0,5634363$. Denotemos por $I_t(h)$ e $I_s(h)$, o resultado da integral obtido, respectivamente, pelo método dos trapézios e 1/3 de Simpson. Seja $h = 0,5$.

- (a) Calcule $I_t(h)$ e $I_t(h/2)$
- (b) Calcule $I_s(h)$ e $I_s(h/2)$
- (c) Calcule $R_1(h) = \frac{4I_t(h/2) - I_t(h)}{3}$ (Método de Romberg).
- (d) Compare com o valor exato e conclua qual é o melhor resultado.
8. Considere as integrais:

$$(I) \int_a^b \int_c^d g(x, y) dx dy, \quad (II) \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z) dx dy dz.$$

Determine uma fórmula geral para o cálculo das integrais usando:

- (a) Regra dos Trapézios.

(b) Regra 1/3 de Simpson

(c) Considere os seguintes valores: $a = c = e = 0$; $b = 0.5$, $d = 1.0$, $f = 1.0$ e as funções $g(x, y) = y.e^x$, $g(x, y, z) = (xy)^z$. Calcule valor numérico de cada integral usando as fórmulas anteriores, com passo $h_1 = h_2 = h_3 = 0.5$, para o método dos trapézios e $h_1 = 0.25$ e $h_2 = h_3 = 0.5$, para o método (1/3) de Simpson.

GABARITO – LISTA DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Exercício 1:

(a-i) Regra dos Trapézios, n = 4:

$$\int_{f(x)} e^{-x} dx \approx \frac{1}{8} [f(1) + 2f(1.25) + 2f(1.5) + 2f(1.75) + f(2)] = 0.233754065$$

(a-ii) Regra dos Trapézios, n = 6:

$$\int_{f(x)} e^{-x} dx \approx \frac{1}{12} [f(1) + 2f(7/6) + 2f(4/3) + 2f(3/2) + 2f(5/3) + 2f(11/6) + f(2)] = 0.233082205$$

(a-iii) Regra de Simpson, n = 4:

$$\int_{f(x)} e^{-x} dx \approx \frac{1}{12} [f(1) + 4f(1.25) + 2f(1.5) + 4f(1.75) + f(2)] = 0.232549167$$

(a-iv) Regra de Simpson, n = 6:

$$\int_{f(x)} e^{-x} dx \approx \frac{1}{18} [f(1) + 4f(7/6) + 2f(4/3) + 4f(3/2) + 2f(5/3) + 4f(11/6) + f(2)] = 0.232545151$$

Exercício 2:

(a) Erro pelo Método dos Trapézios:

$$E_{TRAP} \leq \frac{(b-a)^3 |f''(x)|_{MÁX}}{12n^2} \leq 10^{-5}$$

$$f''(x) = e^{-x} \Rightarrow |e^{-x}|_{MÁX} = |e^{-1}| = 0.367879441$$

$$a = 1, b = 2 \Rightarrow b - a = 1$$

$$\text{Resp.: } n_{TRAP} = 56$$

(b) Erro pelo Método de Simpson (aqui, n tem que ser par!):

$$E_{TRAP} \leq \frac{(b-a)^5 |f^{(iv)}(x)|_{MÁX}}{180n^4} \leq 10^{-5}$$

$$f''(x) = e^{-x} \Rightarrow |e^{-x}|_{MÁX} = |e^{-1}| = 0.367879441$$

$$\text{Resp.: } n_{SIMP} = 56$$

Exercício 3:

$$\int_a^b P(x)dx = (b-a)P(m)$$

$$P(x) = cx + d$$

Usando a Regra dos Trapézios, com $n = 2$, temos:

$$\int_a^b P(x)dx \approx \frac{b-a}{4} \left[P(a) + 2P\left(\frac{a+b}{2}\right) + P(b) \right]$$

Desenvolvendo essa expressão chegamos a $(b-a)P(m)$, que é o valor exato.

Exercício 4:

Qualquer Polinômio de grau 1 (Vide Exercício 3)

Exercício 5:

Um exemplo:

$$\int_0^2 P_2(x)dx, \text{ onde } P_2(x) = x^2 + 3x + 2, \text{ usando } n = 2$$

Exercício 6:

$$I_{SIMP} = 20.8667$$

Exercício 7:

- (a) $I_t(0.5) = 0.782615536$
 $I_t(0.25) = 0.619600838$, lembrando que aqui $n = 4$
- (b) $I_s(0.5) = 0.59044041$
 $I_s(0.25) = 0.565262605$
- (c) **Método de Romberg:** $R_1(0.5) = 0.565262605$
- (d) O melhor resultado é com o Método de Romberg.

Exercício 8:

(a-I) Usando Regra dos Trapézios:

$$\int_a^b \int_c^d g(x, y) dx dy = \int_a^b \underbrace{\left[\int_c^d g(x, y) dy \right]}_{I_i(x)} dx$$

Primeira parte:

$$I_i(x) = \frac{h_2}{2} \left[g(x, y_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} g(x, y_i) + g(x, y_n) \right]$$

Como $h_2 = \frac{d-c}{n}$, então:

$$I_i(x) = \frac{d-c}{2n} \left[g(x, y_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} g(x, y_i) + g(x, y_n) \right]$$

Segunda parte:

$$\begin{aligned} \int_a^b I_i(x) dx &= \frac{d-c}{2n} \int_a^b \underbrace{\left[g(x, y_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} g(x, y_i) + g(x, y_n) \right]}_{f(x)} dx \\ &= \left(\frac{d-c}{2n} \right) \left(\frac{b-a}{2m} \right) \left\{ g(x_0, y_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} g(x_0, y_i) + g(x_0, y_n) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{j=1}^{m-1} \left[g(x_j, y_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} g(x_j, y_i) + g(x_j, y_n) \right] \right. \\ &\quad \left. + g(x_m, y_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} g(x_m, y_i) + g(x_m, y_n) \right\} \end{aligned}$$

(a-II) Para a integral tripla, raciocínio análogo.