Exercícios de Cálculo Numérico
Equações Diferenciais Ordinárias

1. Determine a solução numérica aproximada da seguinte Equação Diferencial Ordinária, com o passo $h = 0.2$:

$$\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = 0 & \forall x \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   (a) Método de Euler (Método das Tangentes)

   (b) Método de Euler Aperfeiçoado

   (c) Método de Runge-Kutta de 4° ordem.

   (d) Método de Predição-Correção de 4° ordem.

   (e) Sabendo-se que a solução exata da equação é $y(x) = e^{-2x}$, compare com as soluções aproximadas obtidas nos items anteriores.

2. Considere a equação diferencial ordinária, dada por:

$$\begin{cases} xy'(x) - x^2 y(x) - 2 = 0 & \forall x \in [1,2] \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

   Fazendo $h = 0.1$, determine a solução aproximada no ponto $x = 1.5$, usando o método de Euler Aperfeiçoado.

3. Determine a solução numérica aproximada da seguinte Equação Diferencial Ordinária, de segunda ordem, com o passo $h = 0.2$:

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0 & \forall x \in [0,1] \\ y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y'(0) = \dfrac{1}{\pi} \end{cases}$$

   (a) Método de Euler (Método das Tangentes)

   (b) Método de Euler Aperfeiçoado

   (c) Sabendo-se que a solução exata da equação é $y(x) = (1/\pi^2)\ \mathrm{sen}(\pi x)$, compare com as soluções aproximadas obtidas nos items anteriores.

4. Um corpo com massa inicial de $200Kg$ está em movimento sob a ação de uma força constante de $2000N$. Sabendo-se que esse corpo está perdendo $1Kg$ de sua massa por segundo e considerando que a resistência do ar é o dobro de sua velocidade e que o corpo está em repouso no instante $t = 0$, então a EDO que descreve a variação de sua velocidade é dada por

$$\begin{cases} v'(t) = \dfrac{2000 - 2v(t)}{200 - t} & \forall t > 0 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

   Determine a velocidade do corpo $v(t)$ no instante $t = 5$ segundos com intervalos de 0.5 segundos, usando:

(a) Método de Euler Aperfeiçoado

(b) Método de Runge-Kutta de 4° ordem.

(c) Método de Predição-Correção de 4° ordem.

(d) Sabendo-se que a solução exata da equação é $v(t) = 10\ t - \frac{1}{40}t^2$, compare com a solução aproximada obtida nos items anteriores.

5. Na teoria da propagação de doenças contagiosas, podemos utilizar uma equação diferencial para predizer o número de indivíduos da população infectado em um dado tempo, supondo algumas simplificações adequadas. Em particular, suponha que todos os indivíduos de uma população fixa tenham a mesma probabilidade de se infectar e que, uma vez infectado, permaneçam neste estado. Vamos denotar por $x(t)$ o número de indivíduos vulneráveis no tempo t e com $y(t)$ o número de infectados. Podemos supor, que a taxa na qual o número de infectados muda seja proporcional ao produto de $x(t)$ e $y(t)$, já que a taxa depende do número de indivíduos infectados e do número de indivíduos vulneráveis que existem nesse tempo. Se a população é suficientemente numerosa para supormos que $x(t)$ e $y(t)$ sejam variáveis contínuas, podemos expressar o problema como:
$$y'(t) = k\ x(t)\ y(t)$$
onde k é uma constante e $x(t) + y(t) = m$ é a população total. Podemos reescrever essa equação, para que contenha apenas $y(t)$, na forma,
$$y'(t) = k\ (m - y(t))\ y(t) \qquad \text{"Equação de Bernoulli"}$$
Supondo que $m = 100.000$, $\quad y(0) = 1000$, $\quad k = 2 \times 10^{-6}$ e que o tempo seja medido em dias, encontre uma aproximação para o número de infectados ao final de 30 dias.

(a) Método de Runge-Kutta de 4° ordem.

(b) Método de Predição-Correção de 4° ordem.

6. **Problema Presa-Predador (Lotka & Volterra)** Considere o problema de predição da população de duas espécies, sendo uma delas a presa e a outra predadora, cuja população no tempo t é dado por $x(t)$ e $y(t)$. Suponha que a presa sempre disponha de comida suficiente e que sua taxa da natalidade seja proporcional à quantidade de presas vivas nesse tempo, ou seja, a taxa de natalidade é $c_1x(t)$. A taxa de mortalidade da presa depende do número de presas e de predadores vivos nesse tempo, que podemos supor, na forma $c_2x(t)y(t)$. Por outro lado, a taxa de natalidade do predador depende de sua disponibilidade de comida $x(t)$ e, também, do número de predadores disponíveis para processo de reprodução. Por tal razão, suponha que a taxa de natalidade dos predadores seja $c_3x(t)y(t)$. Suponha que sua taxa de mortalidade seja proporcional à quantidade de predadores vivos no tempo, ou seja, que a taxa de mortalidade dos predadores seja $c_4y(t)$. Dado que $x'(t)$ e $y'(t)$ representam, a alteração nas populações de presas e predadores no tempo, o problema se

expressa por meio do sistema acoplado de equações diferenciais não lineares:

$$\begin{cases} x'(t) = c_1\ x(t) - c_2\ x(t)y(t) \\ y'(t) = c_3\ x(t)y(t) - c_4\ y(t) \\ x(0) = x_0, \qquad y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

Resolva esse sistema para $0 \leq t \leq 4$, usando o método de Runge-Kutta de 4° ordem, supondo que $x_0 = 1000$, $y_0 = 500$, $c_1 = 3$, $c_2 = 0.002$, $c_3 = 0.0006$, $c_4 = 0.5$. Faça o gráfico das soluções encontradas, registrando ambas as populações em função do tempo, e descreva os fenômenos físicos encontrados.**Sugestão** O sistema pode ser resolvido simultaneamente ou determina-se primeiro o número de presas $x(t_1)$ em $(1)_1$, depois $y(t_1)$ em $(1)_2$, usando $x(t_1)$. Calculado $y(t_1)$ determine $x(t_2)$ em $(1)_1$ usando $y(t_1)$ e assim sucessivamente.

Gabarito da Lista de Equações Diferenciais Ordinárias

Exercício 1:

(a) Método de Euler (Método das Tangentes)

$$y'(x)+2y(x)=0 \Rightarrow y'(x)=-2y(x) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=-2y=f(x,y) \\ y(0)=y_0=1 \end{cases}$$

Dados do Problema: $y_0 = 1$, $h = 0.2$, $x \in [0,1]$

Este método consiste em aplicar a seguinte fórmula iterativa:

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \quad , \quad n \ge 0$$

Então:

(1)
$x_0=0$, $y_0=1$, $f(x_0,y_0)=-2y_0=-2(1)=-2$
$\Rightarrow y_1=y_0+hf(x_0,y_0) \Rightarrow y_1=1+0.2(-2)=1-0.4=0.6$

(2)
$x_1=0.2$, $y_1=0.6$, $f(x_1,y_1)=-2y_1=-2(0.6)=-1.2$
$\Rightarrow y_2=y_1+hf(x_1,y_1) \Rightarrow y_2=0.6+0.2(-1.2)=0.6-0.24=0.36$

(3)
$x_2=0.4$, $y_2=0.36$, $f(x_2,y_2)=-2y_2=-2(0.36)=-0.72$
$\Rightarrow y_3=y_2+hf(x_2,y_2) \Rightarrow y_3=0.36+0.2(-0.72)=0.36-0.144=0.216$

(4)
$x_3=0.6$, $y_3=0.216$, $f(x_3,y_3)=-2y_3=-2(0.216)=-0.432$
$\Rightarrow y_4=y_3+hf(x_3,y_3) \Rightarrow y_4=0.216+0.2(-0.432)=0.1296$

(5)
$x_4=0.8$, $y_4=0.1296$, $f(x_4,y_4)=-2y_4=-2(0.1296)=-0.2592$
$\Rightarrow y_5=y_4+hf(x_4,y_4) \Rightarrow y_5=0.1296+0.2(-0.2592)=0.07776$

(6) $x_5 = 1.0$, $y_5 = 0.07776$ ***(Método de Euler)***

(b) Método de Euler Aperfeiçoado (ou Runge-Kutta de 2ª Ordem):

Este método consiste em aplicar as seguintes fórmulas iterativas:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n,y_n) \\ u_{n+1} &= y_n+hk_1 \quad \text{(Preditor)} \\ k_2 &= f(x_{n+1},u_{n+1}) \\ y_{n+1} &= y_n+\frac{h}{2}(k_1+k_2) \end{aligned}$$

Assim, temos:

(1)

$$x_0 = 0\ ,\ y_0 = 1$$
$$\Rightarrow\ k_1 = f(x_0, y_0) = -2y_0 = -2$$
$$u_1 = y_0 + hk_1 = 1 + 0.2(-2) = 0.6 \quad \text{(Preditor)}$$
$$k_2 = f(x_1, u_1) = -2u_1 = -1.2$$
$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 1 + 0.1(-2 - 1.2) = 1 - 0.32 = 0.68 \quad \text{(Corretor)}$$

(2)

$$x_1 = 0.2\ ,\ y_1 = 0.68$$
$$\Rightarrow\ k_1 = f(x_1, y_1) = -2y_1 = -1.36$$
$$u_2 = y_1 + hk_1 = 0.68 + 0.2(-1.36) = 0.408 \quad \text{(Preditor)}$$
$$k_2 = f(x_2, u_2) = -2u_2 = -0.816$$
$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 0.68 + 0.1(-1.36 - 0.816) = 0.4624 \quad \text{(Corretor)}$$

(3)

$$x_2 = 0.4\ ,\ y_2 = 0.4624$$
$$\Rightarrow\ k_1 = f(x_2, y_2) = -2y_2 = -0.9248$$
$$u_3 = y_2 + hk_1 = 0.4624 + 0.2(-0.9248) = 0.27744 \quad \text{(Preditor)}$$
$$k_2 = f(x_3, u_3) = -2u_3 = -0.55488$$
$$y_3 = y_2 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 0.4624 + 0.1(-0.9248 - 0.55488) = 0.314432 \quad \text{(Corretor)}$$

(4)

$$x_3 = 0.6\ ,\ y_3 = 0.314432$$
$$\Rightarrow\ k_1 = f(x_3, y_3) = -2y_3 = -0.628864$$
$$u_4 = y_3 + hk_1 = 0.314432 + 0.2(-0.628864) = 0.1886592 \quad \text{(Preditor)}$$
$$k_2 = f(x_4, u_4) = -2u_4 = -2(0.1886592) = -0.3773184$$
$$y_4 = y_3 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 0.314432 + 0.1(-0.628864 - 0.3773184) = 0.21381376 \quad \text{(Corretor)}$$

(5)

$$x_4 = 0.8\ ,\ y_4 = 0.21381376$$
$$\Rightarrow\ k_1 = f(x_4, y_4) = -2y_4 = -0.42762752$$
$$u_5 = y_4 + hk_1 = 0.21381376 + 0.2(-0.42762752) = 0.128288256 \quad \text{(Preditor)}$$
$$k_2 = f(x_5, u_5) = -2u_5 = -0.256576512$$
$$y_5 = y_4 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 0.21381376 + 0.1(-0.684204032) = 0.145393356 \quad \text{(Corretor)}$$

(6)

$$\boldsymbol{x_5 = 1.0\ ,\ y_5 = 0.145393356} \quad \textbf{(Euler Aperfeiçoado)}$$

(c) Método de Runge-Kutta (ou Runge-Kutta de 4ª Ordem):

Suponha que queremos calcular as aproximações y_1, y_2, ... , y_n para os valores verdadeiros $y(x_1)$, $y(x_2)$, ... , $y(x_n)$ e agora queremos calcular $y_{n+1} \approx y(x_{n+1})$.

Então,

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)dx = \int_{x_n}^{x_n+h} y'(x)dx$$

pelo teorema fundamental do cálculo. Assim, a Regra de Simpson para integração numérica fornece:

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) \approx \frac{h}{6}\left[y'(x_n) + 4y'\left(x_n + \frac{h}{2}\right) + y'(x_{n+1})\right] = \frac{h}{6}\left[y'(x_n) + 2y'\left(x_n + \frac{h}{2}\right) + 2y'\left(x_n + \frac{h}{2}\right) + y'(x_{n+1})\right]$$

Repare que separamos em soma de termos o termo $4y'\left(x_n + \frac{h}{2}\right)$ porque serão inclinações diferentes para o método.

Dessa forma, usando $y'(x_n) \approx y'_n = f(x_n, y_n)$, chamaremos as inclinações de :

$$\boldsymbol{k_1 = f(x_n, y_n)}$$

$$\boldsymbol{k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)}$$

$$\boldsymbol{k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)}$$

$$\boldsymbol{k_4 = f(x_{n+1}, y_n + hk_3)}$$

Quando estas substituições são feitas, o resultado é a fórmula :

$$\boldsymbol{y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}$$

Então, para este exercício, faremos:

(1)

$x_0 = 0\,,\, y_0 = 1$

$\Rightarrow k_1 = f(x_0, y_0) = -2y_0 = -2$

$k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) = f(0.1, 0.8) = -2(0.8) = -1.6$

$k_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_2\right) = f(0.1, 0.84) = -2(0.84) = -1.68$

$k_4 = f(x_1, y_0 + hk_3) = f(0.2, 0.664) = -2(0.664) = -1.328$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1 + \frac{0.2}{6}(-2 - 3.2 - 3.36 - 1.328) = 0.6704$$

(2)

$$x_1 = 0.2\ ,\ y_1 = 0.6704$$

$$\Rightarrow k_1 = f(x_1, y_1) = -2y_1 = -2(0.6704) = -1.3408$$

$$k_2 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_1\right) = -2y_1 - 0.2k_1 = -1.07264$$

$$k_3 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_2\right) = -2y_1 - 0.2k_2 = -1.126272$$

$$k_4 = f(x_2, y_1 + hk_3) = f(0.4, 0.4451456) = -2(0.4451456) = -0.8902912$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.44943616$$

(3)

$$x_2 = 0.4\ ,\ y_2 = 0.44943616$$

$$\Rightarrow k_1 = f(x_2, y_2) = -2y_2 = -2(0.44943616) = -0.89887232$$

$$k_2 = f\left(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{h}{2}k_1\right) = -0.719097856$$

$$k_3 = f\left(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{h}{2}k_2\right) = -0.755052748$$

$$k_4 = f(x_3, y_2 + hk_3) = -0.59685122$$

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.301302001$$

(4)

$$x_3 = 0.6\ ,\ y_3 = 0.301302001$$

$$\Rightarrow k_1 = f(x_3, y_3) = -2y_3 = -2(0.301302001) = -0.602604002$$

$$k_2 = f\left(x_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{h}{2}k_1\right) = -0.482083201$$

$$k_3 = f\left(x_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{h}{2}k_2\right) = -0.699020642$$

$$k_4 = f(x_4, y_3 + hk_3) = -0.322995745$$

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.191708419$$

(5)

$$x_4 = 0.8\ ,\ y_4 = 0.191708419$$

$$\Rightarrow k_1 = f(x_4, y_4) = -2y_4 = -2(0.191708419) = -0.383416839$$

$$k_2 = f\left(x_4 + \frac{h}{2}, y_4 + \frac{h}{2}k_1\right) = -0.306733471$$

$$k_3 = f\left(x_4 + \frac{h}{2}, y_4 + \frac{h}{2}k_2\right) = -0.322070144$$
$$k_4 = f(x_5, y_4 + hk_3) = -0.254588781$$

$$y_5 = y_4 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.128521324$$

(6) $\boldsymbol{x_5 = 1.0 \ , \ y_5 = 0.128521324}$ ***(RK 4)***

(d) Método da Predição-Correção de 4ª Ordem (Métodos de Adams):

(1) Adams-Bashforth (Preditor):

$$u_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}) \ , \quad \text{usando a notação } f_n = f(x_n, y_n)$$

(2) Adams-Moulton (Corretor):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left(9f_{n+1}^* + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}\right) \ , \ \text{onde } f_{n+1}^* = f\left(x_{n+1}, u_{n+1}\right)$$

Primeiro, devemos calcular y_1 , y_2 e y_3 por Runge-Kutta de 4ª Ordem(RK-4). Depois, para calcular de y_4 em diante, usamos o Preditor e o Corretor de Adams acima.

Então, agora vamos resolver o exercício com esse método:
(1)

Pela letra (c), temos $y_1 = 0.6704$, $y_2 = 0.44943616$ e $y_3 = 0.301302001$

Com as identificações $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ e $f(x,y) = -2y$, obtemos:

$$f_0 = f(x_0, y_0) = -2 \ ; \ f_1 = f(x_1, y_1) = -1.3408 \ ; \ f_2 = f(x_2, y_2) = -0.89887232 \ ;$$
$$f_3 = f(x_3, y_3) = -0.602604002$$

Com os valores acima, o Preditor (1) nos fornece então:

$$u_4 = y_3 + \frac{h}{24}(55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0) = 0.301302001 + \frac{0.2}{24}(-11.71935323) = 0.203640724$$

Para utilizar o corretor, precisamos primeiro de:

$$f_4^* = f(x_4, u_4) = -2u_4 = -0.407281448$$

Assim, temos:

$$y_4 = y_3 + \frac{0.2}{24}(9f_4^* + 19f_3 - 5f_2 + f_1) = 0.301302001 + \frac{0.2}{24}(-11.96144747) = 0.201623272$$

(2)

Ainda temos que calcular y_5. Vamos repetir o processo:

Preditor:

$$u_5 = y_4 + \frac{h}{24}(55f_4^* - 59f_3 + 37f_2 - 9f_1) = 0.201623272 + \frac{0.2}{24}(-8.037919362) = 0.13464061$$

Corretor:

$$y_5 = y_4 + \frac{0.2}{24}(9f_5^* + 19f_4^* - 5f_3 + f_2)\ ,\ onde\ f_5^* = f(x_5, u_5) = -2u_5 = -0.269281221$$

Assim, temos finalmente:

$$y_5 = 0.201623272 + \frac{0.2}{24}(-8.047730811) = 0.134558848$$

Portanto, $\boldsymbol{x_5 = 1.0}$ **,** $\boldsymbol{y_5 = 0.134558848}$ ***(Predição– Correção de Quarta Ordem)***

(e) $y(1) = e^{-2} = 0.135335283$

Portanto, o Método de Predição-Correção de 4ª Ordem se aproximou mais do resultado, mostrando que os algoritmos de ordem superior são mais precisos.

Exercício 2:

$$xy'(x) - x^2 y(x) - 2 = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{\div x} y'(x) - xy(x) - \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow y'(x) = xy(x) + \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = xy + \frac{2}{x} = f(x,y)$$

Usar Euler Aperfeiçoado para:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = xy + \frac{2}{x}$$

$$y_0 = 3,\ x_0 = 1,\ h = 0.1$$

até $x_5 = 1.5$.

Exercício 3:

Obs.: Toda vez que tivermos um exercício sobre Equação Diferencial de Segunda Ordem, devemos transformá-la em um sistema de Equações de Primeira Ordem, fazendo a substituição y' = z (aqui usei z, mas poderia ser qualquer outra variável arbitrária).

$$y''(x) + y(x) = 0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \Rightarrow y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -y = f(x, y, y')$$

Vou fazer as seguintes substituições :

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) = z \quad , \quad y_0 = 0 \\ z' = g(x, y, z) = -y \quad , \quad z_0 = \dfrac{1}{\pi} \end{cases}$$

(a) *Usando Método de Euler, temos que resolver o sistema:*

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n, z_n) = y_n + hz_n \\ z_{n+1} = z_n + hg(x_n, y_n, z_n) = z_n - hy_n \end{cases}$$

Assim, temos:

(1)

$$y_0 = 0, z_0 = \frac{1}{\pi}, x_0 = 0$$

$$\Rightarrow y_1 = y_0 + 0.2z_0 = 0 + 0.2\left(\frac{1}{\pi}\right) = 0.063661977$$

$$z_1 = z_0 - 0.2y_0 = \frac{1}{\pi} = 0.318309886$$

(2)

$$y_1 = 0.063661977, z_1 = 0.318309886, x_1 = 0.2$$

$$\Rightarrow y_2 = y_1 + 0.2z_1 = 0.127323954$$

$$z_2 = z_1 - 0.2y_1 = 0.30557749$$

(3)

$$y_2 = 0.127323954, z_2 = 0.30557749, x_2 = 0.4$$

$$\Rightarrow y_3 = y_2 + 0.2z_2 = 0.188439452$$

$$z_3 = z_2 - 0.2y_2 = 0.280112699$$

(4)

$$y_3 = 0.188439452, z_3 = 0.280112699, x_3 = 0.6$$

$$\Rightarrow y_4 = y_3 + 0.2z_3 = 0.244461991$$

$$z_4 = z_3 - 0.2y_3 = 0.242424808$$

(5)

$$y_4 = 0.244461991, z_4 = 0.242424808, x_4 = 0.8$$

$$\Rightarrow y_5 = y_4 + 0.2z_4 = 0.292946952$$

$$z_5 = z_4 - 0.2y_4 = 0.193532409$$

Em outras palavras,

$$\left.\begin{aligned} y(1.0) &\approx 0.292946952 \\ y'(1,0) &\approx 0.193532409 \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(Euler)}$$

(b) Usando o Método de Euler Aperfeiçoado:

Usando o mesmo sistema encontrado no item (a):

$$\begin{cases} y' = f(x,y,z) = z \quad , \quad y_0 = 0 \\ z' = g(x,y,z) = -y \quad , \quad z_0 = \dfrac{1}{\pi} \end{cases}$$

Temos para o Método de Euler Aperfeiçoado as seguintes fórmulas iterativas:

Preditores:

$$\begin{cases} u_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n, z_n) = y_n + hz_n \\ v_{n+1} = z_n + hg(x_n, y_n, z_n) = z_n - hy_n \end{cases}$$

Corretores:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}\left[f(x_n, y_n, z_n) + f(x_{n+1}, u_{n+1}, v_{n+1})\right] = y_n + \dfrac{h}{2}\left[z_n + v_{n+1}\right] \\ z_{n+1} = z_n + \dfrac{h}{2}\left[g(x_n, y_n, z_n) + g(x_{n+1}, u_{n+1}, v_{n+1})\right] = z_n - \dfrac{h}{2}\left[y_n + u_{n+1}\right] \end{cases}$$

(1)

$$y_0 = 0 \,, z_0 = \frac{1}{\pi} \,, h = 0.2$$

$$u_1 = y_0 + hz_0 = 0.063661977$$
$$v_1 = z_0 - hy_0 = 0.318309886$$
$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left[z_0 + v_1\right] = 0.063661977$$
$$z_1 = z_0 - \frac{h}{2}\left[y_0 + u_1\right] = 0.311943688$$

Agora, vocês terão que repetir esse processo até encontrar y_5 e z_5.

Exercício 4:

Neste exercício, aplique os métodos para:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2000 - 2v}{200 - t} = f(v, t)$$

$$v_0 = 0\,,\; t_0 = 0\,,\; h = 0.5$$

Exercício 5:

Após as devidas substituições, aplique os métodos para:

$$\frac{dy}{dt} = 0.2y - 0.000002y^2$$

$$y_0 = 1000,\; t_0 = 0$$

OBS.: Aqui, não foi fornecido o valor de h. Usei h = 0.5.

Exercício 6:

Obs.: O enunciado não disse o valor de h. Aqui, fiz com h=0.5.

$$\begin{cases} x' = 3x - 0.002xy = f(t, x, y) \quad , \qquad x_0 = 1000 \\ y' = 0.0006xy - 0.5y = g(t, x, y) \quad , \qquad y_0 = 500 \end{cases}$$

As fórmulas iterativas de Runge-Kutta para o passo de (x_n, y_n) à aproximação seguinte $(x_{n+1}, y_{n+1}) \approx (x(t_{n+1}), y(t_{n+1}))$ são:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(G_1 + 2G_2 + 2G_3 + G_4)$$

onde:

$$F_1 = f(t_n, x_n, y_n)$$

$$F_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}F_1, y_n + \frac{h}{2}G_1\right)$$

$$F_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}F_2, y_n + \frac{h}{2}G_2\right)$$

$$F_4 = f(t_n + h, x_n + hF_3, y_n + hG_3)$$

Analogamente fazemos isso para G_1, G_2, G_3, G_4.

(1)

$t_0 = 0$, $x_0 = 1000$, $y_0 = 500$

$F_1 = f(0,1000,500) = 3(1000) - 0.002(1000)(500) = 3000 - 1000 = 2000$

$G_1 = g(0,1000,500) = 0.0006(1000)(500) - 0.5(500) = 300 - 250 = 150$

$F_2 = f(0.25,1500,537.5) = 3(1500) - 0.002(1500)(537.5) = 4500 - 1612.5 = 2887.5$

$G_2 = g(0.25,1500,537.5) = 0.0006(1500)(537.5) - 0.5(537.5) = 483.75 - 268.75 = 215$

$F_3 = f(0.25,1721.875,553.75) = 3(1721.875) - 0.002(1721.875)(553.75) = 5165.625 - 1906.9765 =$
$= 3258.6485$

$G_3 = g(0.25,1721.875,553.75) = 0.0006(1721.875)(553.75) - 0.5(553.75) = 512.09296 - 276.875 =$
$= 235.21796$

$F_4 = f(0.5,2629.3242,617.6398) = 3(2629.3242) - 0.002(2629.3242)(617.6398) = 7887.9726 - 3247.9505 =$
$= 4640.0221$

$G_4 = g(0.5,2629.3242,617.6398) = 0.0006(2629.3242)(617.6398) - 0.5(617.6398) = 974.38515 - 308.8199 =$
$= 665.56525$

Então,

$$x_1 = x_0 + \frac{h}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4) = 1000 + \frac{1}{6}(2000 + 5775 + 6517.297 + 4640.0221) = 4155.3865$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(G_1 + 2G_2 + 2G_3 + G_4) = 500 + \frac{1}{6}(150 + 430 + 470.43592 + 665.56525) = 786.00018$$

Agora, é com vocês!

Façam até $t_8 = 4$.