Cálculo Numérico

Faculdade de Ciências Sociais Aplicadas e Comunicação – FCSAC
Faculdade de Engenharia, Arquiteturas e Urbanismo – FEAU

Prof. Dr. Sergio Pilling (IPD/ Física e Astronomia)

UNIVERSIDADE DO VALE DO PARAÍBA
São José dos Campos - SP

REVISÃO DA 2ª PARTE DO CURSO

1 – Interpolação polinomial
a. Método direto (resolução de sistema de equações)
b. Método de Lagrange (calculando os fatores de Lagrange)
c. Método de Newton (calculando os operadores diferenças dividas)

2 – Ajuste de Funções pelo método dos mínimos quadrados (MMQ)
a. Caso discreto

3 – Integração numérica
a. regra do trapezio
b. regra do trapézio repetida
c. regra 1/3 de Simpson
d. regra 1/3 de Simpson repetida

3 – Métodos numéricos para resolver eq. diferenciais ordinárias (EM PREPARAÇÃO)

---

1 – Interpolação polinomial

Um polinômio de ordem n é escrito como:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n$$

a. Método direto

Nos nós da interpolação teremos sempre $P_n(x_k) = f(x_k) = y_k$ onde k = 0,1, 2, 3, 4, ..., n

Escrevendo essa condição para todos os pontos x_k teremos *n* equações e *n* incógnitas que serão as constantes do polinômio ($a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_n$). Para encontrar essas constantes temos que resolver o sistema de equação utilizando ou método direto de eliminação de Gauss (triangulariazação) ou algum método iterativo (Gauss-Jacobi ou Gauss-Seidel)

b. Forma de Lagrange

Na forma de Lagrange o polinômio de ordem n pode ser escrito por:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + ... + f(x_n)L_n(x)$$

onde $L_k(x)$ são equações de x conhecidas como fatores de Lagrange. Podem ser calculados a partir da formula recursiva a baixo:

$$L_k(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x_k - x_j)}$$

b. Forma de Newton

Na forma de Newton o polinômio de ordem n pode ser escrito por:

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0,..., x_k](x - x_0)...(x - x_{k-1}) =$$

$$= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) +$$

$$+ .... + f[x_0, x_1, x_2, x_3,....x_n](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)....(x - x_{n-1})$$

onde *f[x_k]* são números calculados a partir da tabela de pontos (x, f(x)) que se quer interpolar. Estes fatores são conhecidos como **operadores diferenças divididas** e são determinados pela regra geral abaixo:

$$f[x_i] \equiv f(x_i) \quad \text{e} \quad f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \quad \text{(Ordem n)}$$

Ex. $f[x_0]=f(x_0)$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$$

2 – Método dos mínimos quadrados

Sejam *m* pares de pontos oriundos de uma função *f(x)*. Queremos encontrar uma função *φ(x)* tal que:

$$f(x) \approx \phi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i g_i(x) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + a_3 g_3(x) ... + a_n g_n(x) \qquad n \in \mathrm{I}$$

As funções $g_i(x)$ são funções de qualquer tipo escolhidas para tentar ajustar o conjunto de dados experimentais, por exemplo, a partir da análise dos diagrama de dispersão (gráfico dos pontos experimentais). $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ são os coeficientes das funções $g_i(x)$ e vão dar o peso de cada uma delas na equação *φ(x)*.

No método dos mínimos quadrados temos a seguinte condição:

$$\frac{d\left(\sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - \phi(x_k))^2\right)}{da_j} = 0 \qquad j = 1,2,3...n$$

Segundo essa condição, para encontrarmos a função *φ(x)* (dentre as escolhidas previamente) que melhor ajusta os pontos experimentais utilizando o método MMQ teremos que resolver um sistema de n equações e n incógnitas $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$. Na forma matricial esse sistema pode ser escrito como $\hat{A} \times \hat{a}_i = \hat{b}_i$, ou ainda:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$$

onde

m= num. de pontos experimentais

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} g_i(x_k) g_j(x_k) = a_{ji}$$

$$b_i = \sum_{k=1}^{m} f(x_k) g_i(x_k)$$

Para encontrar essas incógnitas e, portanto, escrever a função que melhor ajusta os pontos experimentais pelo método dos mínimos quadrados, temos que resolver o sistema de equações utilizando o método direto de eliminação de Gauss (triangulariazação) ou algum método iterativo (Gauss-Jacobi ou Gauss-Seidel).

Exemplos de funções φ (x) típicas:

- Para ajustar os pontos a uma reta temos

  $\varphi(x) = a_1 + a_2 x \rightarrow g_1(x) = 1$ e $g_2(x) = x$ ⟶ Sistema com 2 eqs.!

- Para ajustar os pontos a uma parábola temos

  $\varphi(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 \rightarrow g_1(x) = 1$, $g_2(x) = x$ e $g_3(x) = x^2$ Sistema com 3 eqs.!

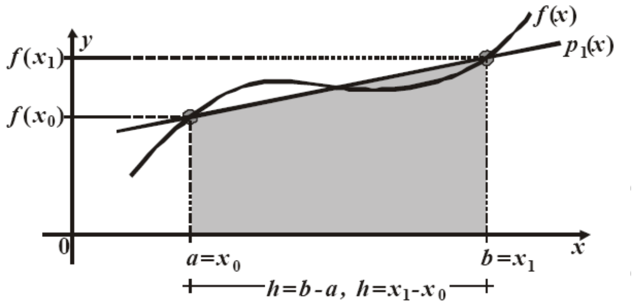
- Para ajustar os pontos a com uma função exponencial simples temos

  $\varphi(x) = a_1 e^x \rightarrow g_1(x) = e^x$ ⟶ 1 única equação!

2 – Interpolação Numérica

a. Regra do trapézio $\rightarrow f(x) \approx p_1(x)$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)] = I_T$$



h=(b-a)

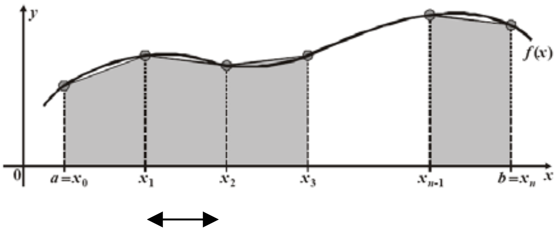
$$|E_T| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

b. Regra do trapézio repetida

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_n)+2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right] = I_{TR}$$

h=(b-a)/n

$$|E_{TR}| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

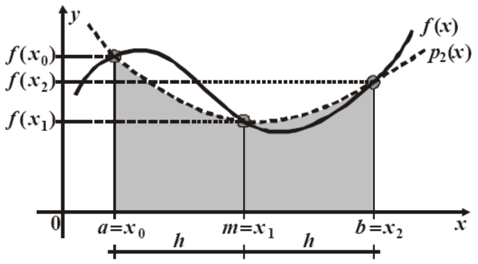


h=(b-a)/n

n sendo o número de subdivisões do intervalo $[a,b]$

c. Regra 1/3 de Simpson $\rightarrow f(x) \approx p_2(x)$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)] = I_S$$



h=(b-a)/2

h=(b-a)/2

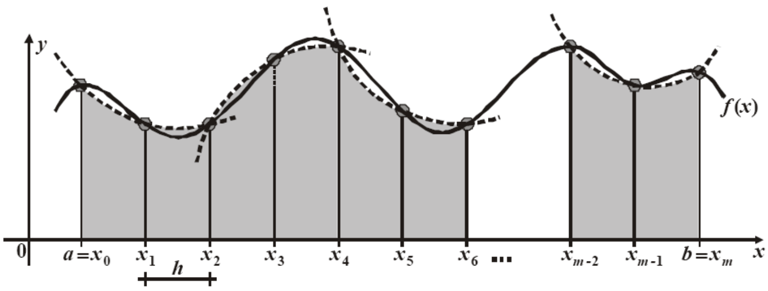
$$|E_S| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \cdot \max_{x\in[a,b]} |f^4(x)|.$$

c. Regra 1/3 de Simpson repetida

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[y_0 + y_m + 2\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1} y_{2i} + 4\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} y_{2i-1}\right] = I_{SR}$$

h=(b-a)/2n

$$|E_{SR}| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \cdot \max_{x\in[a,b]} |f^4(x)|$$



h=(b-a)/2n *m=2n*

n=m/2 **é a metade de subdivisões do intervalo [a,b]**