

REVISÃO DA 1ª PARTE DO CURSO

1 – Aritmética de Ponto Flutuante e Erros em Maquinas digitais

- a. Notação ponto flutuante**
- b. Conversão decimal $\leftrightarrow$ binário**
- c. Principais fontes de erros de maquinas digitais (Mantissa finita)**
- d. Erro absoluto e erro relativo**
 - d1. Erros em operações aritméticas**
 - d2. Erros devido a representação truncada ou arredondada dos números**

2 – Métodos iterativos para achar zeros (raízes) de funções reais

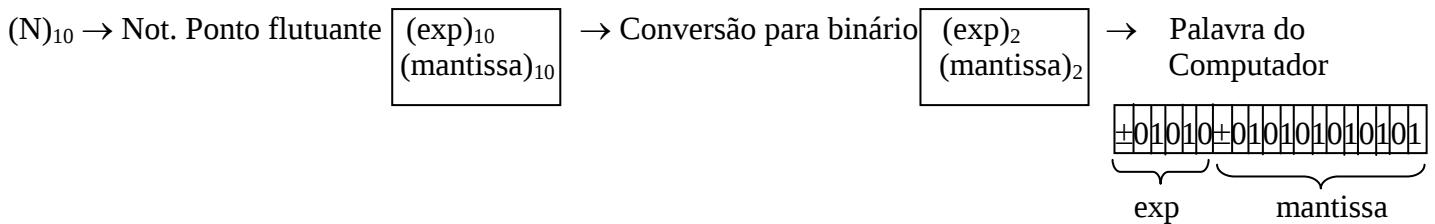
- a. Identificando intervalos que contem raízes de funções.**
- b. Quando parar de fazer as contas? Critérios de parada**
- c. Métodos iterativos**
 - Met. Bisseccão**
 - Met. Posição Falsa**
 - Met. Ponto Fixo**
 - Met. Newton**
 - Met. Secante.**

3 - Métodos numéricos para resolver sistema de equações.

- a. Met. Direto de eliminação de Gauss.**
- b. Met. Iterativos.**
 - Critérios de parada**
 - Método de Gauss-Jacobi**
 - Métodos de Gauss-Seidel**
- c. Critérios de convergência dos Met. Iterativos: Linhas para o met. Gauss-Jacobi e Sassenfeld para o met. Gauss-Seidel**

1 – Aritmética de Ponto Flutuante e Erros em Maquinas digitais

Como um máquina digital armazena um número internamente:



a. Notação ponto flutuante

sinial	mantissa				expoente
$\pm$	a_1	a_2	$\dots$	a_t	e

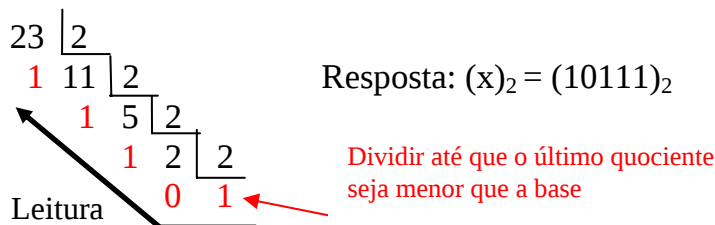
Observe que como a mantissa m satisfaz a desigualdade $0.1 \leq |m| < 1$ ela pode sempre ser escrita como

$$m = \pm 0.a_1a_2a_3 \dots a_t \text{ com } a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\} \text{ e } a_1 \neq 0$$

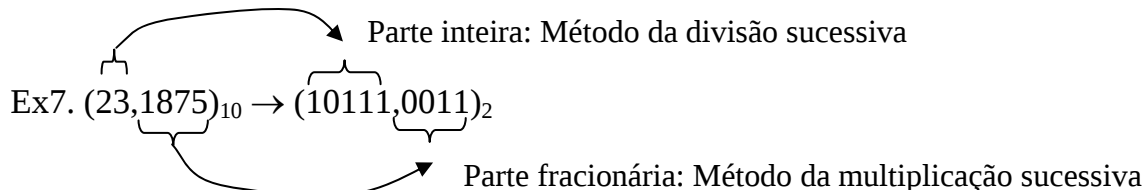
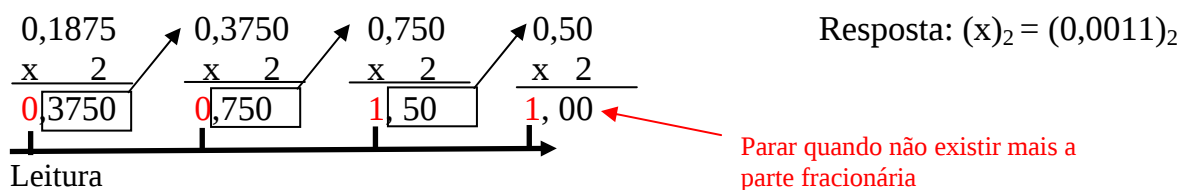
- t = mantissa
- o que é overflow?
- o que é underflow?

b. Conversão decimal $\leftrightarrow$ binário

Ex3. $(23)_{10} \rightarrow (x)_2$ Usando o método das divisões sucessivas.



Ex5. $(0,1875)_{10} \rightarrow (x)_2$ Usando o método das multiplicações sucessivas.



Ex9. $(110,11)_2 \rightarrow (x)_{10}$

Usando o método das multiplicações pelas potências da base

$$(110,11)_2 = \underbrace{1x2^2}_{4} + \underbrace{1x2^1}_{2} + \underbrace{0x2^0}_{0} + \underbrace{1x2^{-1}}_{1/2} + \underbrace{1x2^{-2}}_{1/4} = 6,75 = (6,75)_{10}$$

$\swarrow \quad \swarrow \quad \swarrow$
 $d_2 \quad d_1 \quad d_0$

c. Principais fontes de erros de maquinas digitais (Mantissa finita)

c1. Representação infinita de um numero binário!

$$(0,11)_{10} = (0,000111000010100011110101110000101000111101\dots\dots)_2$$

Repetições

Numa maquina com 6 digitos na matissa teremos:

$$(0,11)_{10} \rightarrow (0,000111)_2 \rightarrow (0,109375)_{10}$$

Truncado

c2. Mantissa finita para representação de números!

d. Erro absoluto (EA) e erro relativo (EA)

$$EA_x = |x - \bar{x}| \qquad ER_x = \left| \frac{EA_x}{\bar{x}} \right| = \left| \frac{x - \bar{x}}{\bar{x}} \right|$$

onde x é o valor preciso e $\bar{x}$ é o valor aproximado (armazenado na máquina). $\bar{x}$ pode ser ainda um valor truncado ou arredondado.

d1. Erros em operações aritméticas (propagação dos erros)

i) Propagação dos erros absolutos:

Soma e Subtração $EA_{(x \pm y)} = EA_x \pm EA_y $	Multiplicação $EA_{(xy)} = \bar{x}EA_y + \bar{y}EA_x $	Divisão $EA_{(x/y)} = \left \frac{EA_x}{\bar{y}} - \frac{\bar{x}EA_y}{\bar{y}^2} \right $
---	---	--

ii) Propagação dos erros relativos:

Soma e Subtração $ER_{(x \pm y)} = \left \frac{\bar{x}}{\bar{x} \pm \bar{y}} ER_x \pm \frac{\bar{y}}{\bar{x} \pm \bar{y}} ER_y \right + \delta$	Multiplicação $ER_{(xy)} = ER_x + ER_y + \delta$	Divisão $ER_{(x/y)} = ER_x - ER_y + \delta$
---	--	---

onde o fator δ , associado ao erro devido ao fato do computador trabalhar com números truncados ou arredondados é dado por:

$\swarrow$ $t = \text{número de dígitos da mantissa}$
 $\delta = 10^{-t+1}$ (no caso de truncamento)

$\delta = \frac{1}{2} 10^{-t+1}$ (no caso de arredondamento)

2 – Métodos iterativos para achar zeros (raízes) de funções reais

a. Identificando intervalos que contem raízes de funções.

Seja $f(x)$ contínua num intervalo $[a,b]$

- Se $f(a)f(b) < 0$ existe PELO MENOS uma raiz dentro desse intervalo.

- Se $f'(a)f'(b) > 0$ existe 1 única raiz dentro desse intervalo.

b. Quando parar de fazer as contas? Quando se atingir a precisão desejada.

- Critérios de paradas dos métodos iterativos

b1. Nos métodos com intervalo inicial $I=[a,b]$ (Bisseção e posição falsa). Paramos de fazer a conta quando $|f(x_k)| < \varepsilon$ ou $b_k - a_k < \varepsilon$. Qualquer uma das duas condições, a que vier primeiro!

b2. Nos métodos com chute inicial (MPF, Newton ou Secante). Paramos de fazer a conta quando $|f(x_k)| < \varepsilon$ ou $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$. Qualquer uma das duas condições, a que vier primeiro!

Em geral ε (precisão estipulada) é um número muito pequeno, por exemplo, $\varepsilon \sim 0,000001 = 10^{-6}$

c. Os métodos iterativos.

- Mecanismos de iteração dos Métodos de obtenção de zeros de funções reais:

I) Método da Bisseção

A cada iteração diminui-se o intervalo tomando uma media dos valores anteriores.

Função recursiva

$$\phi(x_k) = x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$$

Numero de iterações no método da bissecção:

Intervalo inicial

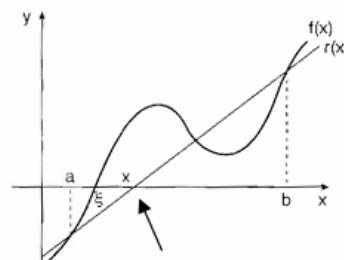
$$k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\varepsilon)}{\log(2)} \quad \rightarrow \quad b-a < \varepsilon \text{ (precisão)}$$

II) Método da Posição Falsa

Assim, em vez de tomar a média aritmética entre a e b , o método da posição falsa toma a média aritmética ponderada entre a e b com pesos $|f(b)|$ e $|f(a)|$, respectivamente:

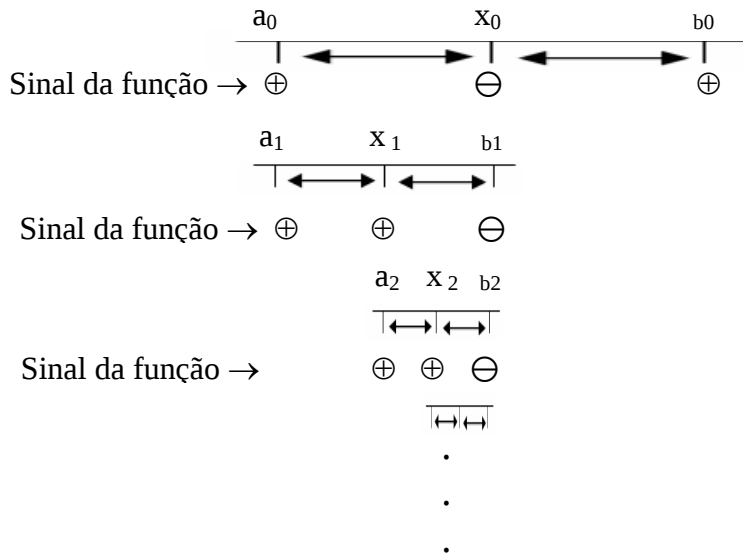
Função recursiva

$$\phi(x_k) = x_k = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$$



Graficamente, este ponto x é a intersecção entre o eixo ox e a reta $r(x)$ que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$:

Os métodos da bissecao e da Posição Falsa tem convergência garantida pois os intervalos a cada interação sempre contem a raiz. Para ambos os métodos temos o seguinte esquema iterativo:



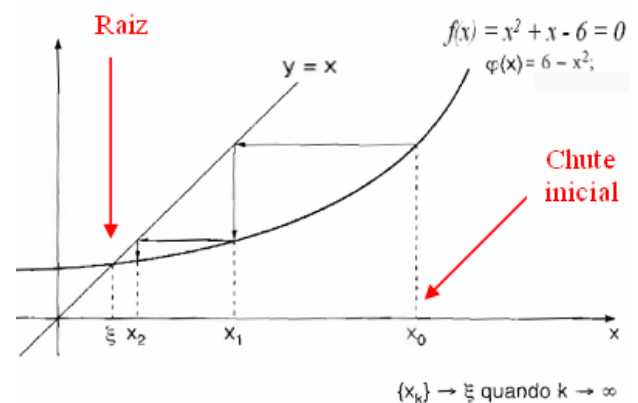
Paramos de fazer a conta quando é satisfeito o critério de parada $|f(x_k)| < \varepsilon$ ou $b_k - a_k < \varepsilon$, o que vier primeiro e a solução aproximada será $x = x_k$

III) Método da Ponto Fixo (MPF)

Transformar $f(x)=0$ numa equação equivalente $x=\varphi(x)$ e a partir de um chute inicial x_0 gerar uma sequência $\{x_k\}$ de aproximações através da relação

Função recursiva

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$



Graficamente, uma raiz da equação $x=\varphi(x)$ é a abscissa do ponto de intercessão da reta $y=x$ e da curva $y=\varphi(x)$

OBS: Esse método nem sempre converge. Uma condição para convergência é que a função equivalente escolhida tenha uma inclinação baixa nas proximidades da raiz, ou seja, que $|\varphi'(x_k)| < 1$ nas proximidades da raiz ξ . Além disso, a convergência será mais rápida quanto menor for $|\varphi'(\xi)|$

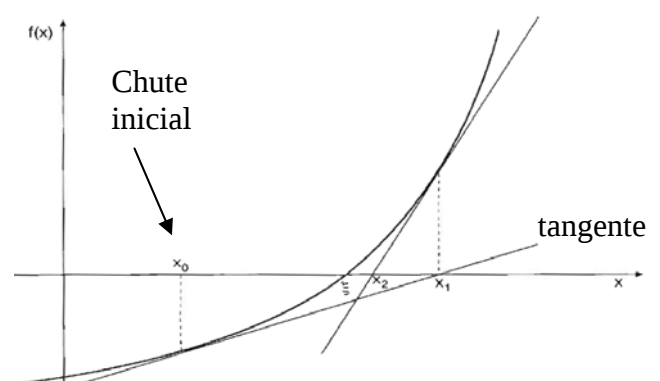
IV) Método de Newton ou Newton-Raphson

Esse método é bem parecido com o MPF, contudo para acelerar a convergência escolhe-se uma $\varphi(\xi)$ tal que $\varphi'(\xi) = 0$. Nesse método utilizamos a expressão abaixo no o processo iterativo:

Função recursiva

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

onde $x_{k=0}$ é um chute inicial para a raiz



OBS: Esse método nem sempre converge. Se $f'(x_k) \sim 0$ o método pode divergir.

IV) Método da Secante

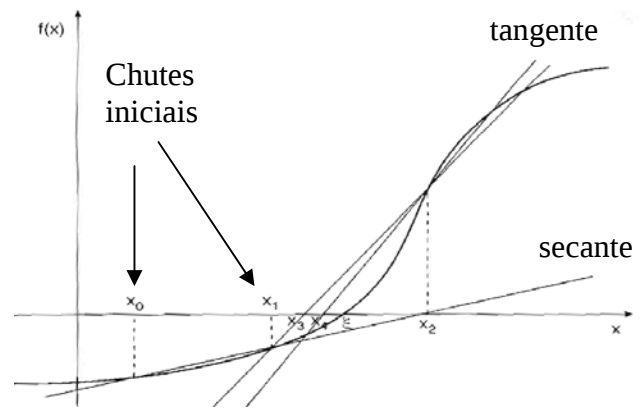
Uma das desvantagens no método de Newton é a necessidade de se obter $f'(x)$ e calcular seu valor numérico a cada iteração, nesse método a derivada da função é aproximada pela expressão abaixo:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

onde $x_{k=0}$ é $x_{k=1}$ são chutes iniciais para a raiz. Nesse método utilizamos a expressão abaixo no o processo iterativo:

Função recursiva

$$x_{k+1} = \varphi(x_k; x_{k-1}) = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$



OBS: Se nesse último método tivermos $f(x_k) \sim f(x_{k-1})$ o método pode divergir!

3 – Métodos numéricos para resolver sistemas de equações lineares

a. Método direto de eliminação de Gauss

Sistema → Matriz sanduíche → Aplicar estratégias para pivoteamento (parcial ou total) → Triangularizar a matriz sanduíche (Calcular o fator multiplicado e realizar operações envolvendo as linhas) → Solução trivial (de baixo pra cima)

Obs. Nas estratégias de pivoteamento parcial trocar a posição de linhas e na estratégia de pivoteamento parcial trocar a posição de colunas. Antes de eliminar os termos da próxima coluna aplicar as estratégias de pivoteamento novamente se necessário.

Exemplo de operações: $L_2' \leftarrow L_2 - m_{21} L_1$
 $L_3' \leftarrow L_3 - m_{31} L_1$

Linha do pivô

Fator multiplicador

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

Elemento a ser zerado

Pivô

b. Métodos Iterativos

Sistema → Verificar se tem convergência garantida para um dado método (critério das linhas ou Sassenfeld) → Escrever o sistema equivalente (isolar x_i de cada linha i) → Aplicar o método escolhido → parar o cálculo ao atingir o critério de parada.

Obs. Se o critério de verificação de convergência falhar, trocar a posição das linhas e colunas do sistema e aplicar o critério de verificação novamente.

Exercício resolvido mostrando uma comparação entre dois métodos iterativos: Calcule as duas primeiras iterações dos métodos **Gauss-Jacobi** e **Gauss-Seidel** do sistema linear abaixo:

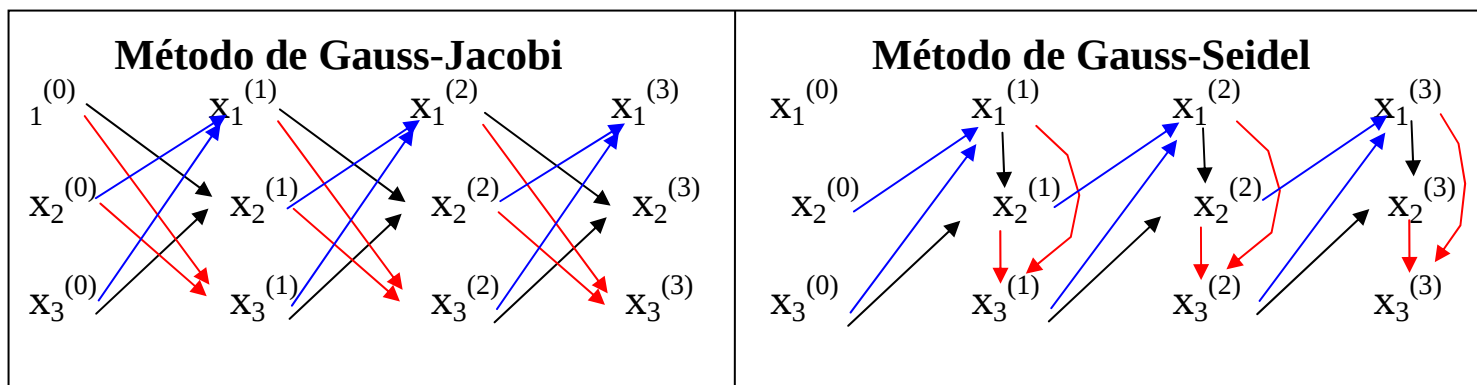
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 9x_3 = 7 \\ 5x_1 - 6x_2 - 8x_3 = 3 \\ 1x_1 - 2x_2 + 15x_3 = 5 \end{cases}$$

Use como chute inicial o vetor (matriz coluna) $x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Etapa inicial – Isolar os x_i de cada linha i e escrever o **sistema de equações equivalentes**.

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 9x_3 = 7 \\ 5x_1 - 6x_2 - 8x_3 = 3 \\ 1x_1 - 2x_2 + 15x_3 = -5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{+7 - 2x_2 + 9x_3}{4} \\ x_2 = \frac{+3 - 5x_1 + 8x_3}{-6} \\ x_3 = \frac{-5 - 1x_1 + 2x_2}{15} \end{cases}$$

Abaixo temos um diagrama mostrando de forma esquemática a dependência de cada um dos termos nas três primeiras iterações de uma matriz $A:3 \times 3$ dos **métodos de Gauss-Jacobi** e **Gauss-Seidel**.



Segue abaixo exemplos para o cálculo das três primeiras iterações ($x^{(1)}$, $x^{(2)}$ e $x^{(3)}$) pelo

método de Gauss-Jacobi usando como chute inicial: $x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= (+7 - 2x_2^{(0)} + 9x_3^{(0)})/4 = 7.50 \\ x_2^{(1)} &= (+3 - 5x_1^{(0)} + 8x_3^{(0)})/(-6) = -3.667 \\ x_3^{(1)} &= (-5 - 1x_1^{(0)} + 2x_2^{(0)})/(15) = -0.133 \end{aligned}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.50 \\ -3.667 \\ -0.133 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= (+7 - 2x_2^{(1)} + 9x_3^{(1)})/4 = 3.882 \\ x_2^{(2)} &= (+3 - 5x_1^{(1)} + 8x_3^{(1)})/(-6) = 5.572 \\ x_3^{(2)} &= (-5 - 1x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)})/(15) = -1.322 \end{aligned}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.882 \\ 5.572 \\ -1.322 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1^{(3)} &= (+7 - 2x_2^{(2)} + 9x_3^{(2)})/4 = -4.010 \\ x_2^{(3)} &= (+3 - 5x_1^{(2)} + 8x_3^{(2)})/(-6) = 4.497 \\ x_3^{(3)} &= (-5 - 1x_1^{(2)} + 2x_2^{(2)})/(15) = 0.150 \end{aligned}$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.010 \\ 4.497 \\ 0.150 \end{pmatrix}$$

Segue abaixo exemplos para o calculo das três primeiras iterações ($x^{(1)}$, $x^{(2)}$ e $x^{(3)}$) pelo

método de Gauss-Seidel usando como chute inicial: $x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= (+7 - 2x_2^{(0)} + 9x_3^{(0)})/4 = 7.50 \\ x_2^{(1)} &= (+3 - 5x_1^{(1)} + 8x_3^{(0)})/(-6) = 1.75 \\ x_3^{(1)} &= (-5 - 1x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)})/(15) = -0.60 \end{aligned} \longrightarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.50 \\ 1.75 \\ -0.60 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= (+7 - 2x_2^{(1)} + 9x_3^{(1)})/4 = -0.475 \\ x_2^{(2)} &= (+3 - 5x_1^{(2)} + 8x_3^{(1)})/(-6) = -0.095 \\ x_3^{(2)} &= (-5 - 1x_1^{(2)} + 2x_2^{(2)})/(15) = -0.314 \end{aligned} \longrightarrow x^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.475 \\ -0.095 \\ -0.314 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1^{(3)} &= (+7 - 2x_2^{(2)} + 9x_3^{(2)})/4 = 1.091 \\ x_2^{(3)} &= (+3 - 5x_1^{(3)} + 8x_3^{(2)})/(-6) = 0.827 \\ x_3^{(3)} &= (-5 - 1x_1^{(3)} + 2x_2^{(3)})/(15) = -0.295 \end{aligned} \longrightarrow x^{(3)} = \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.091 \\ 0.827 \\ -0.295 \end{pmatrix}$$

Se for dada uma precisão ε quando parar de fazer os cálculos? Quando tivermos satisfeito o critério de parada.

Critério de parada

Distancia relativa entre duas iterações numa certa etapa k , $d^{(k)}$, deve ser menor que ε

$$d^{(k)} = \frac{\overset{\text{Valor máximo}}{\max_i |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|}}{\max_i |x_i^{(k)}|} < \varepsilon$$

Obs: No exemplo anterior não fizemos nenhum teste para saber se os métodos iterativos teriam convergência assegurada ou não. Na prática antes de utilizarmos esses métodos numa maquina digital verificamos se o critério das linhas é satisfeito (no caso da utilização o método de Gauss-Jacobi) ou o critério de Sassenfeld (no caso da utilização do método de Gauss-Seidel).

Critério das linhas ($\alpha_i < 1$)

Lembremos que:

$$\alpha_k = \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| \right) / |a_{kk}|$$

Pivô

Outros elementos

Critério de Sassenfeld ($\beta_i < 1$)

(ex A:4x4)

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}|}{|a_{11}|} \equiv \alpha_1$$

$$\beta_2 = \frac{|a_{21}| \beta_1 + |a_{23}| + |a_{24}|}{|a_{22}|}$$

$$\beta_3 = \frac{|a_{31}| \beta_1 + |a_{32}| \beta_2 + |a_{34}|}{|a_{33}|}$$

$$\beta_4 = \frac{|a_{41}| \beta_1 + |a_{42}| \beta_2 + |a_{43}| \beta_3}{|a_{44}|}$$