

III – Resolução de sistemas lineares por métodos numéricos.

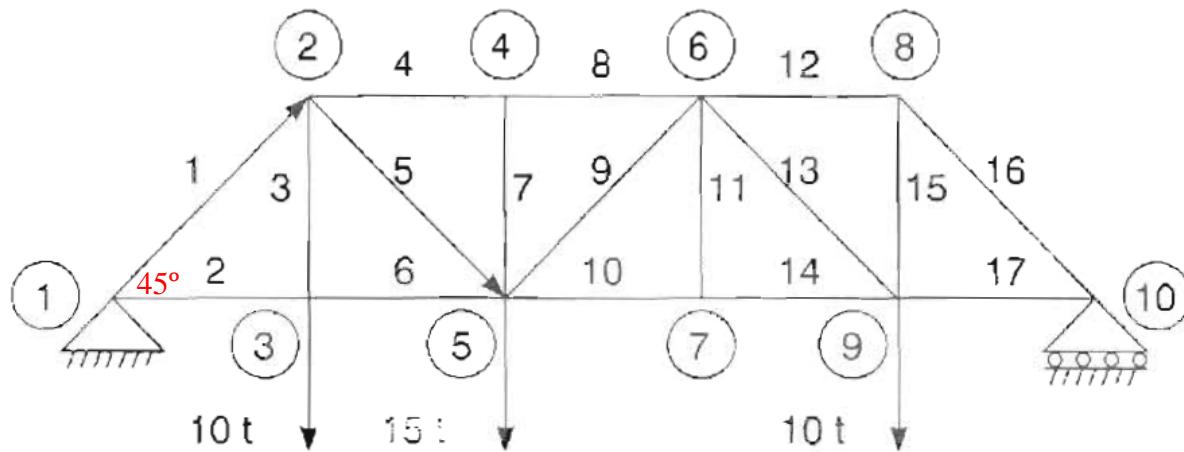
Objetivos: Veremos nessa aula alguns métodos numéricos (diretos e iterativos) para resolvemos sistemas de equações lineares.

1. Introdução

A resolução de sistemas lineares é um problema que surge nas mais diversas áreas (ex. previsão do tempo, otimização de sinais de transito e linhas de metro, mecânica quântica, etc..).

Exemplo 1.

Considere, por exemplo, o problema de determinar as componentes horizontal e vertical das forças que atuam nas junções da treliça abaixo (ex. ponte de ferro).



Para isto, temos de determinar as 17 forças desconhecidas que atuam nesta treliça. As componentes da treliça são supostamente presas nas junções por pinos, sem fricção.

Um teorema da mecânica elementar nos diz que, como o número de junções j está relacionado ao numero de componentes m por $2j - 3 = m$, a treliça é estaticamente determinante: isto significa que **as forças componentes são determinadas completamente pelas condições de equilíbrio estático nos nós.**

Sejam F_x e F_y as componentes horizontal e vertical, respectivamente. Fazendo $\alpha = \text{sen}(45^\circ) = \cos(45^\circ)$ e supondo pequenos deslocamentos, as condições de equilíbrio são:

$$\begin{aligned} \text{Junção 2} \quad & \begin{cases} \sum F_x = -\alpha f_1 + f_4 + \alpha f_5 = 0 \\ \sum F_y = -\alpha f_1 - f_3 - \alpha f_5 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Junção 3} \quad & \begin{cases} \sum F_x = -f_2 + f_6 = 0 \\ \sum F_y = f_3 - 10 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Junção 4} \begin{cases} \sum F_x = -f_4 + f_8 = 0 \\ \sum F_y = -f_7 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Junção 5} \begin{cases} \sum F_x = -\alpha f_5 - f_6 + \alpha f_9 + f_{10} = 0 \\ \sum F_y = \alpha f_5 + f_7 + \alpha f_9 - 15 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Junção 6} \begin{cases} \sum F_x = -f_8 - \alpha f_9 + f_{12} + \alpha f_{13} = 0 \\ \sum F_y = -\alpha f_9 - f_{11} - \alpha f_{13} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Junção 7} \begin{cases} \sum F_x = -f_{10} + f_{14} = 0 \\ \sum F_y = f_{11} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Junção 8} \begin{cases} \sum F_x = -f_{12} + \alpha f_{16} = 0 \\ \sum F_y = -f_{15} - \alpha f_{16} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Junção 9} \begin{cases} \sum F_x = -\alpha f_{13} - f_{14} + f_{17} = 0 \\ \sum F_y = \alpha f_{13} + f_{15} - f_{10} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Junção 10} \{ \sum F_x = -\alpha f_{16} - f_{17} = 0$$

Portanto, para obter as componentes perdidas é preciso resolver esse sistema linear que tem 17 variáveis: $f_1, f_2, f_3, \dots, f_{17}$ e 17 equações.

Um sistema linear com m equações e n variáveis é escrito usualmente na forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde

a_{ij} : coeficientes $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$

x_j : variáveis $j = 1, \dots, n$

b_i : constantes $i = 1, \dots, m$

A resolução de um sistema linear consiste em calcular os valores de x_j , ($j = 1, \dots, n$) caso eles existam, que satisfaçam as m equações simultaneamente.

Usando notação matricial, o sistema linear pode ser assim representado:

$$Ax = b$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

onde A é a matriz (m,n) dos coeficientes, x é o vetor $(n$ linhas) das variáveis e b (m linhas) é o vetor das constantes.

Chamaremos de x^* o vetor solução de x , uma solução aproximada do sistema linear $Ax=b$. No capítulo anterior a solução aproximada era chamada de \bar{x} .

A formulação matricial do sistema $Ax=b$ do Exemplo 1, que será resolvida no final desta aula é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & -1 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & -1 & 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 1 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha & 0 & 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & -1 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5 \ f_6 \ f_7 \ f_8 \ f_9 \ f_{10} \ f_{11} \ f_{12} \ f_{13} \ f_{14} \ f_{15} \ f_{16} \ f_{17}]^T$$

$$b = [0 \ 0 \ 0 \ 10 \ 0 \ 0 \ 0 \ 15 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10 \ 0]^T$$

$$\alpha = \sin(45^\circ) = \cos(45^\circ)$$

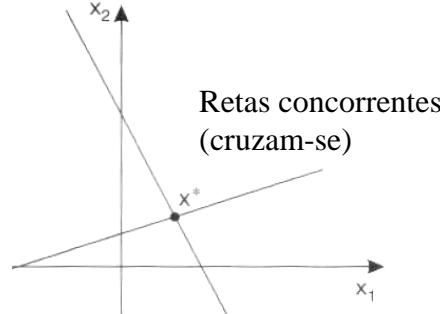
OBS. onde M^T é a matriz transposta de M . (troca se as colunas pelas linhas).

$$\text{Ex. } M = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad M^T = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Analisemos a seguir, através de exemplos com das equações e duas variáveis as situações que podem ocorrer com relação ao numero de soluções de um sistema linear:

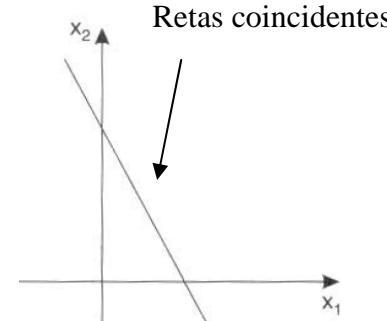
i) Solução única:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -2 \end{cases} \quad \text{com } x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



ii) Infinitas soluções:

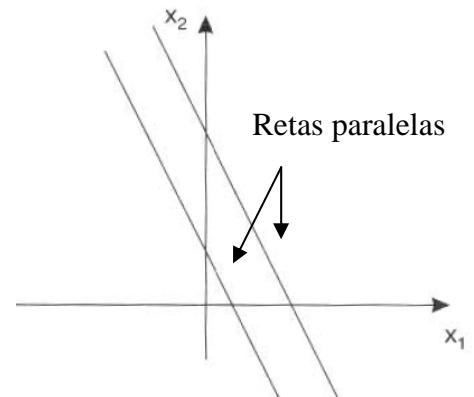
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$



para o qual, qualquer $x^* = (\alpha, 3 - 2\alpha)^T$ com $\alpha \in \mathbb{R}$, é solução.

iii) Nenhuma solução:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$



OBS: Mesmo no caso geral em que o sistema linear envolve m equações e n variáveis, apenas uma entre as situações abaixo irá ocorrer:

- i) o sistema linear tem solução única;
- ii) o sistema linear admite infinitas soluções;
- iii) o sistema linear não admite solução.

No caso em que $m=n=2$ (visto acima), este fato foi facilmente verificado através dos gráficos das retas envolvidas no sistema. Contudo, para analisar o caso geral, m equações e n variáveis, usaremos conceitos de **Álgebra linear**.

Veremos nesta aula alguns métodos numéricos para resolução de sistemas lineares do tipo $n \times n$ (n equações e n incógnitas; Matriz quadrada $A_{n \times n}$)

Os métodos numéricos para resolução de um sistema linear podem ser divididos em dois grupos: métodos diretos e métodos iterativos.

Métodos diretos são aqueles que, a menos de erros de arredondamento, fornecem a solução exata do sistema linear, caso ela exista, após um número finito de operações.

Os métodos iterativos geram uma seqüência de vetores $\{x^{(k)}\}$, a partir de uma aproximação inicial $x^{(0)}$. Sob certas condições esta seqüência converge para a solução x^* , caso ela exista.

5.2. Métodos diretos

Pertencem a esta classe todos os métodos estudados nos cursos de 1º e 2º graus, destacando-se a regra de Cramer. Este método, aplicado à resolução de um sistema $n \times n$ envolve o cálculo de $(n + 1)$ determinantes de ordem n . Se n for igual a 20 podemos mostrar que o número total de operações efetuadas será $21 \times 20! \times 19$ multiplicações mais um número semelhante de adições. Assim, um computador que efetue cerca de cem milhões de multiplicações por segundo levaria 3×10^5 anos para efetuar as operações necessárias.

$$\boxed{\text{Matriz inversa de } A: \quad A A^{-1} = 1 \text{ (identidade)}}$$

Devemos observar que no caso de sistemas lineares $n \times n$, com solução única, o vetor x^* é dado por: $x^* = A^{-1}b$. No entanto, calcular explicitamente a matriz A^{-1} e em seguida efetuar o produto $A^{-1}b$ é desaconselhável, uma vez que o número de operações envolvidas é grande, o que torna este processo não competitivo com os métodos que estudaremos a seguir.

5.2.1 Método da eliminação de Gauss

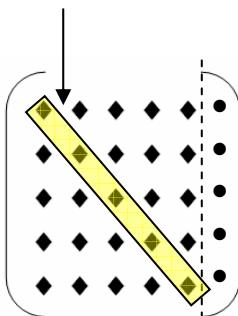
Entre os métodos diretos, destacam-se os métodos de eliminação que evitam o cálculo direto da matriz inversa de A e além disto não apresentam problemas com tempo de execução como a regra de Cramer.

O método da Eliminação de Gauss consiste em transformar o sistema linear original num sistema linear equivalente com matriz dos coeficientes triangular superior, pois estes são de resolução imediata. Dizemos que dois sistemas lineares são *equivalentes* quando possuem a mesma solução.

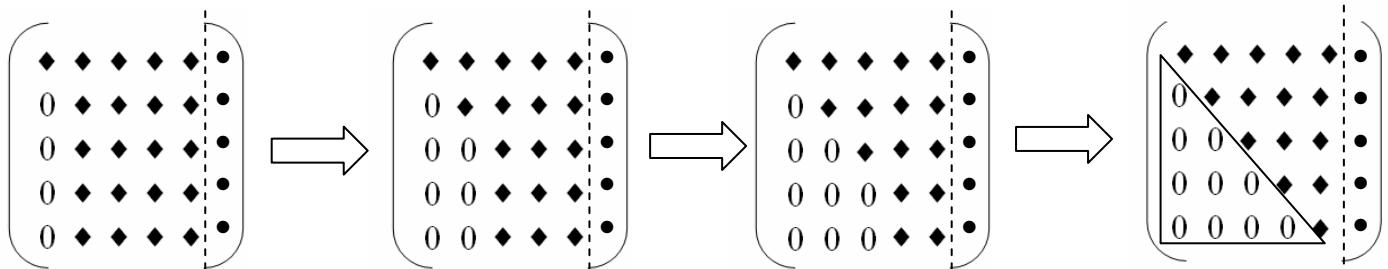
Etapa 0: Matriz sanduíche

$$\left\{ \begin{array}{l} \spadesuit x_1 + \spadesuit x_2 + \spadesuit x_3 + \spadesuit x_4 + \spadesuit x_5 = \bullet \\ \spadesuit x_1 + \spadesuit x_2 + \spadesuit x_3 + \spadesuit x_4 + \spadesuit x_5 = \bullet \\ \spadesuit x_1 + \spadesuit x_2 + \spadesuit x_3 + \spadesuit x_4 + \spadesuit x_5 = \bullet \\ \spadesuit x_1 + \spadesuit x_2 + \spadesuit x_3 + \spadesuit x_4 + \spadesuit x_5 = \bullet \\ \spadesuit x_1 + \spadesuit x_2 + \spadesuit x_3 + \spadesuit x_4 + \spadesuit x_5 = \bullet \end{array} \right. \quad \rightarrow$$

Diagonal principal: Posição dos “pivos”



Etapa 1, 2, 3, ... : Eliminação ($L_i' \leftarrow L_i - m_{ik} L_k$ onde $m_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$)



Etapa Final: Solução do sistema (de baixo pra cima)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \bullet \\ 0 & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \bullet \\ 0 & 0 & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \spadesuit & \spadesuit & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \spadesuit & \bullet \end{array} \right) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \spadesuit x_1 + \spadesuit x_2 + \spadesuit x_3 + \spadesuit x_4 + \spadesuit x_5 = \bullet \\ \spadesuit x_2 + \spadesuit x_3 + \spadesuit x_4 + \spadesuit x_5 = \bullet \\ \spadesuit x_3 + \spadesuit x_4 + \spadesuit x_5 = \bullet \\ \spadesuit x_4 + \spadesuit x_5 = \bullet \\ \spadesuit x_5 = \bullet \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} x^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \clubsuit \\ \spadesuit \\ \heartsuit \\ \clubsuit \\ \bullet \end{pmatrix} \end{matrix}$$

seguir um algoritmo para resolução de sistemas estuda-
como o método da Eliminação de Gauss efetua a transformação do sistema linear
remos 1 no sistema triangular equivalente.

Seja o sistema linear $Ax = b$, onde A : matriz $n \times n$, triangular superior, com elementos da diagonal diferentes de zero. Escrevendo as equações deste sistema, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

Somente zeros!

Da última equação, temos

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

x_{n-1} pode então ser obtido da penúltima equação:

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

e assim sucessivamente obtém-se x_{n-2}, \dots, x_2 e finalmente x_1 :

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

ALGORITMO 1: Resolução de um Sistema Triangular Superior

Dado um sistema triangular superior $n \times n$ com elementos da diagonal da matriz A não nulos, as variáveis $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1$ são assim obtidas:

$$x_n = b_n / a_{nn}$$

Para $k = (n-1), \dots, 1$

$$\left[\begin{array}{l} s = 0 \\ \text{Para } j = (k+1), \dots, n \\ s = s + a_{kj}x_j \\ x_k = (b_k - s) / a_{kk} \end{array} \right]$$

DESCRÍÇÃO DO MÉTODO DA ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Conforme dissemos anteriormente, o método consiste em transformar convenientemente o sistema linear original para obter um sistema linear equivalente com matriz dos coeficientes triangular superior.

Para modificar convenientemente o sistema linear dado de forma a obter um sistema equivalente, faremos uso do teorema, a seguir:

TEOREMA 1 - *Procedimentos para triangularizar uma matriz e estratégias para o pivoteamento.*

Seja $Ax = b$ um sistema linear. Aplicando sobre as equações deste sistema uma seqüência de operações elementares escolhidas entre:

- i) trocar duas equações; Ex. $L_1 \leftrightarrow L_5$
- ii) multiplicar uma equação por uma constante não nula; Ex. $L_3' \leftarrow 8L_3$
- iii) adicionar um múltiplo de uma equação a uma outra equação; Ex. $L_2' \leftarrow L_2 - 5L_1$

obtemos um novo sistema $\tilde{A}x = \tilde{b}$ e os sistemas $Ax = b$ e $\tilde{A}x = \tilde{b}$ são equivalentes. para triangularizar a matriz A. Vamos supor que $\det(A) \neq 0$.

A eliminação é efetuada por colunas e chamaremos de etapa k do processo a fase em que se elimina a variável x_k das equações $k+1, k+2, \dots, n$.

Usaremos a notação $a_{ij}^{(k)}$ para denotar o coeficiente da linha i e coluna j no final da k-ésima etapa, bem como $b_i^{(k)}$ será o i-ésimo elemento do vetor constante no final da etapa k.

Exemplo 2

Seja o sistema linear:
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Etapa 0: Escrever a matriz dos coeficientes junto do vetor das constantes: Matriz sanduíche.

$$A^{(0)} \mid b^{(0)} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & b_3^{(0)} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \end{array} \right)$$

Etapa 1: Eliminação dos elementos a_{j1} ($j=2, \dots, n$), também chamada de 1º pivoteamento.

Eliminar x_1 das equações 2 e 3:

Para facilitar o entendimento do processo, de agora em diante usaremos a notação L_i para indicar o vetor linha formado pelos elementos da linha i da matriz $A^{(k)} | b^{(k)}$. Assim, nesta etapa, $L_1 = (3 \ 2 \ 4 \ 1)$.

$$\text{Pivô: } a_{11}^{(0)} = 3$$

$$m_{21} = 1/3$$

$$m_{31} = 4/3$$

$$L_2' \leftarrow L_2 - m_{21} L_1$$

$$L_3' \leftarrow L_3 - m_{31} L_1$$

Fator multiplicador

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

Elemento a ser zerado

Pivô

Linha do pivô

Operações aritméticas com as linhas

Etapa 1

$$\Rightarrow A^{(1)} | b^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 1/3 & -2/3 & 5/3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & b_3^{(1)} \end{array} \right)$$

$$1 - \frac{1}{3}3 = 0 \quad 1 - \frac{1}{3}2 = \frac{1}{3} \quad 2 - \frac{1}{3}4 = \frac{2}{3} \quad 2 - \frac{1}{3}1 = \frac{5}{3}$$

$$4 - \frac{4}{3}3 = 0 \quad 3 - \frac{4}{3}2 = 0 \quad -2 - \frac{4}{3}4 = 0 \quad 3 - \frac{4}{3}1 = \frac{5}{3}$$

Etapa 2: Eliminação dos elementos a_{j2} ($j=3, \dots, n$), também chamada de 2º pivoteamento.

Eliminar x_2 da equação 3:

$$\text{Pivô: } a_{22}^{(1)} = 1/3$$

$$m_{32} = \frac{1/3}{1/3} = 1$$

$$L_3' \leftarrow L_3 - m_{32} L_2$$

Linha do pivô

Etapa 2

$$\Rightarrow A^{(2)} | b^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array} \right)$$

Triangularizou!!!!

Assim, resolver $Ax = b$ é equivalente a resolver $A^{(2)}x = b^{(2)}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 1/3x_2 + 2/3x_3 = 5/3 \\ - 8x_3 = 0 \end{array} \right. \quad \boxed{x_3 = 0}$$

A solução deste sistema é o vetor $x^* = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

ALGORITMO 2: Resolução de $Ax = b$ através da Eliminação de Gauss.

Seja o sistema linear $Ax = b$, $A: n \times n$, $x: n \times 1$, $b: n \times 1$.

Supor que o elemento que está na posição a_{kk} é diferente de zero no início da etapa k.

Eliminação
(Triangularização)

Para $k = 1, \dots, n-1$

 Para $i = k+1, \dots, n$

$m = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$

$a_{ik} = 0$

 Para $j = k+1, \dots, n$

$a_{ij} = a_{ij} - ma_{kj}$

$b_i = b_i - mb_k$

 } Loop 3

 } Loop 2

 } Loop 1

Resolução do sistema:
já triangularizado!
ALGORITMO 1

$x_n = b_n/a_{nn}$

Para $k = (n-1), \dots, 2, 1$

$s = 0$

 Para $j = (k+1), \dots, n$

$[s = s + a_{kj} x_j]$

$x_k = (b_k - s)/a_{kk}$

O algoritmo acima efetua, na fase da eliminação, $(4n^3 + 3n^2 - 7n)/6$ operações e, para resolver o sistema triangular superior, o número de operações efetuadas é n^2 .

Assim, o total de operações para se resolver um sistema linear pelo método da Eliminação de Gauss é $(4n^3 + 9n^2 - 7n)/6$. Isso é muito menor que o método da

Bem menor que o método de Kramer: $2(n+1) \times n! \times (n-1)$

ESTRATÉGIAS DE PIVOTEAMENTO

Vimos que o algoritmo para o método da Eliminação de Gauss requer o cálculo dos multiplicadores:

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \quad i = k + 1, \dots, n$$

em cada etapa k do processo.

O que acontece se o pivô for nulo? E se o pivô estiver próximo de zero?

Estes dois casos merecem atenção especial pois é impossível trabalhar com um pivô nulo. E trabalhar com um pivô próximo de zero pode conduzir a resultados totalmente imprecisos. Isto porque em qualquer calculadora ou computador os cálculos são efetuados com aritmética de precisão finita, e pivôs próximos de zero dão origem a multiplicadores bem maiores que a unidade que, por sua vez, origina uma ampliação dos erros de arredondamento.

Para se contornar estes problemas devemos adotar uma estratégia de pivoteamento ou seja, adotar um processo de escolha da linha e/ou coluna pivotal.

ESTRATEGIA DE PIVOTEAMENTO PARCIAL

Esta estratégia consiste em:

- i) no início da etapa k da fase de eliminação, escolher para pivô o elemento de maior módulo entre os coeficientes: $a_{ik}^{(k-1)}$, $i = k, k+1, \dots, n$; **(de uma dada coluna)**
 - ii) trocar as linhas k e i se for necessário.

Exemplo 3

Consideremos uma matriz 4×4 após a primeira etapa de pivoteamento:

$$A^{(1)} \mid b^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{array} \right)$$

Este elemento é o maior desta coluna, em modulo.

Início da etapa 2:

$$\max_{j=2,3,4} |a_{j2}^{(1)}| = |a_{32}^{(1)}| = 3 \Rightarrow \text{pivô} = -3 \quad \text{Assim,}$$

e os multiplicadores desta etapa serão:

$$m_{32} = \frac{1}{-3} = -1/3$$

$$m_{42} = \frac{2}{-3} = -2/3$$

$$A^{(1)} \mid b^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

Em seguida fazemos as operações: $L_3' \leftarrow L_3 - \overbrace{m_{32}}^1 L_2$; $L_4' \leftarrow L_4 - \overbrace{m_{42}}^1 L_2$ e o processo continua até triangularizarmos a matriz dos coeficientes.

Observamos que a escolha do maior elemento em módulo entre os candidatos a pivô faz com que os multiplicadores, em módulo, estejam entre zero e um, o que evita a ampliação dos erros de arredondamento.

Leitura complementar

ESTRATÉGIA DE PIVOTEAMENTO COMPLETO

Nesta estratégia, no início da etapa k é escolhido para pivô o elemento de maior módulo, entre todos os elementos que ainda atuam no processo de eliminação:

$$\max_{i,j \geq k} |a_{ij}^{(k-1)}| = |a_{rs}^{(k-1)}| \Rightarrow \text{pivô} = a_{rs}^{(k-1)}$$

Observamos que, no Exemplo 3, se fosse adotada esta estratégia, o pivô da etapa 2 seria $a_{34}^{(1)} = 7$, o que acarretaria a troca das colunas 2 e 4 e, em seguida, das linhas 2 e 3, donde:

$$A^{(1)} \mid b^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & -5 & -3 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 15 \end{array} \right)$$

Obs. Nesse caso temos que inverter a posição das incógnitas na matriz das incógnitas também!

Ex. $a_i = (a_1 \ a_4 \ a_3 \ a_2)^T$

Esta estratégia não é muito empregada, pois envolve uma comparação extensa entre os elementos $a_{ij}^{(k-1)}$, $i, j \geq k$ e troca de linhas e colunas, conforme vimos no exemplo anterior; é evidente que todo este processo acarreta um esforço computacional maior que a estratégia de pivoteamento parcial. **Deve-se inverter a posição das incógnitas na matriz das incógnitas também!**

Exemplo 4

Consideremos o sistema linear

$$\begin{cases} 0.0002x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

Inicialmente vamos resolvê-lo sem a estratégia de pivoteamento parcial e vamos supor que temos de trabalhar com aritmética de dois dígitos. Nossa sistema é:

$$\begin{cases} 0.2 \times 10^{-3}x_1 + 0.2 \times 10^1x_2 = 0.5 \times 10^1 \\ 0.2 \times 10^1x_1 + 0.2 \times 10^1x_2 = 0.6 \times 10^1 \end{cases}$$

Usamos a notação de ponto flutuante!
 $r = \pm 0.d_1d_2 \times 10^e$

Então:

Etapa 0 – Matriz sanduíche

$$A^{(0)} \mid b^{(0)} = \left(\begin{array}{cc|c} 0.2 \times 10^{-3} & 0.2 \times 10^1 & 0.5 \times 10^1 \\ 0.2 \times 10^1 & 0.2 \times 10^1 & 0.6 \times 10^1 \end{array} \right)$$

Etapa 1: Eliminação dos elementos a_{j1} ($j=2, \dots, n$); 1º pivoteamento.

Pivô: 0.2×10^{-3}

$$m_{21} = (0.2 \times 10^1) / (0.2 \times 10^{-3}) = 1 \times 10^4 = 0.1 \times 10^5 \text{ e } a_{21}^{(1)} = 0$$

$$a_{22}^{(1)} = a_{22}^{(0)} - a_{12}^{(0)} \times m_{21} = 0.2 \times 10^1 - (0.2 \times 10^1) \times (0.1 \times 10^5) = \\ = 0.2 \times 10^1 - 0.2 \times 10^5 = -0.2 \times 10^5$$

$$b_2^{(1)} = b_2^{(0)} - b_1^{(0)} \times m_{21} = 0.6 \times 10^1 - (0.5 \times 10^1) \times (0.1 \times 10^5) = \\ = 0.6 \times 10^1 - 0.5 \times 10^5 = -0.5 \times 10^5$$

Etapa 1

$$\Rightarrow A^{(1)} \mid b^{(1)} = \left(\begin{array}{cc|c} 0.2 \times 10^{-3} & 0.2 \times 10^1 & 0.5 \times 10^1 \\ 0 & -0.2 \times 10^5 & -0.5 \times 10^5 \end{array} \right)$$

E a solução do sistema $A^{(1)}x = b^{(1)}$ resultante é

$$-0.2 \times 10^5 x_2 = -0.5 \times 10^5 \Rightarrow x_2 = (0.5) / (0.2) = 2.5 = 0.25 \times 10$$

$$\Rightarrow 0.2 \times 10^{-3} x_1 + 0.2 \times 10^1 \times \frac{0.25 \times 10^1}{x_2} = 0.5 \times 10^1$$

$$\Rightarrow 0.2 \times 10^{-3} x_1 = 0.5 \times 10^1 - 0.05 \times 10^2 = 0.5 \times 10^1 - 0.5 \times 10^1 = 0 \rightarrow x_1 = 0$$

$$\text{e, portanto, } \bar{x} = (0 \ 2.5)^T. \text{ ou } x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

lembrando que nosso sistema original era:

$$\begin{cases} 0.0002x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

É fácil verificar que \bar{x} não satisfaz a segunda equação, pois

$$2 \times 0 + 2 \times 2.5 = 5 \neq 6.$$

Usando agora a estratégia de **pivoteamento parcial** (e ainda a aritmética de 2 dígitos), o nosso

sistema original:
$$\begin{cases} 0.0002x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$
 fica como:

Etapa 0 – Matriz sanduíche após o pivoteamento parcial (troca de

$$A^{(0)} \mid b^{(0)} = \left(\begin{array}{cc|c} 0.2 \times 10^1 & 0.2 \times 10^1 & 0.6 \times 10^1 \\ 0.2 \times 10^{-3} & 0.2 \times 10^1 & 0.5 \times 10^1 \end{array} \right)$$

Etapa 1 – Eliminação dos elementos a_{j1} ($j=2, \dots, n$); - 1º

Assim o pivô é 0.2×10^1 e $m_{21} = (0.2 \times 10^{-3})/(0.2 \times 10^1) = 0.1 \times 10^{-3}$. De forma análoga ao que fizemos acima, obtemos o novo sistema

$$A^{(1)} \mid b^{(1)} = \left(\begin{array}{cc|c} 0.2 \times 10^1 & 0.2 \times 10^1 & 0.6 \times 10^1 \\ 0 & 0.2 \times 10^1 & 0.5 \times 10^1 \end{array} \right)$$

cuja solução é $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.25 \times 10^1 \end{pmatrix}$ No caso anterior tinha dado zero!

E o vetor \bar{x} é realmente a solução do nosso sistema, pois

$$0.2 \times 10^{-3} \times \frac{0.5}{x_1} + 0.2 \times 10^1 \times \frac{0.25 \times 10^1}{x_2} = 0.1 \times 10^{-3} + 0.05 \times 10^2 = 0.5 \times 10^1 = 5$$

e

$$0.2 \times 10^1 \times \frac{0.5}{x_1} + 0.2 \times 10^1 \times \frac{0.25 \times 10^1}{x_2} = 0.1 \times 10^1 + 0.05 \times 10^2 = \\ = 0.01 \times 10^2 + 0.05 \times 10^2 = 0.06 \times 10^2 = 0.6 \times 10^1 = 6.$$

Exercício 1.

Resolva os sistemas lineares abaixo usando o método direto de eliminação de Gauss (com pivoteamento e triangularização da matriz dos coeficientes). Use a técnica de pivoteamento parcial se necessário (se o pivô for zero).

a)

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 5 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 7 \\ -6x_1 + 7x_2 - 8x_3 + x_4 = -9 \\ 9x_1 - 6x_2 + 19x_3 + x_4 = 23 \\ 6x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 15x_4 = 11 \end{cases}$$

Compare os resultados com o programa [VCN_5p1.exe](#)

5.3. Métodos Iterativos

A idéia central dos métodos iterativos é **generalizar o método do ponto fixo** utilizado na busca de raízes de uma equação que foi visto em uma das aulas anteriores.

Seja o sistema linear $Ax = b$, onde:

A: matriz dos coeficientes, $n \times n$;

x: vetor das variáveis, $n \times 1$;

b: vetor dos termos constantes, $n \times 1$.

Este sistema é convertido, de alguma forma, num sistema do tipo $x = Cx + g$ onde C é matriz $n \times n$ e g vetor $n \times 1$. Observamos que $\varphi(x) = Cx + g$ é uma função de iteração dada na forma matricial.

É então proposto o esquema iterativo:

Partimos de $x^{(0)}$ (vetor aproximação inicial) e então construimos consecutivamente os vetores:

$$x^{(1)} = Cx^{(0)} + g = \varphi(x^{(0)}), \quad (\text{primeira aproximação}),$$

$$x^{(2)} = Cx^{(1)} + g = \varphi(x^{(1)}), \quad (\text{segunda aproximação}) \text{ etc.}$$

De um modo geral, a aproximação $x^{(k+1)}$ é calculada pela fórmula $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$, ou seja, $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$, $k = 0, 1, \dots$

É importante observar que se a seqüência de aproximações $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots$ é tal que, $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \alpha$, então $\alpha = C\alpha + g$, ou seja, α é solução do sistema linear $Ax = b$.

Valor máximo

TESTES DE PARADA

O processo iterativo é repetido até que o vetor $x^{(k)}$ esteja suficientemente próximo do vetor $x^{(k-1)}$.

Medimos a distância entre $x^{(k)}$ e $x^{(k-1)}$ por $d^{(k)} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|$.

Assim, dada uma precisão ε , o vetor $x^{(k)}$ será escolhido como \bar{x} , solução aproximada da solução exata, se $d^{(k)} < \varepsilon$.

Da mesma maneira que no teste de parada dos métodos iterativos para zeros de funções, podemos efetuar aqui o teste do erro relativo:

$$d_r^{(k)} = \frac{d^{(k)}}{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)}|} < \varepsilon$$

5.3.1 Método Iterativo de Gauss-Jacobi

A forma como o método de Gauss-Jacobi transforma o sistema linear $Ax = b$ em $x = Cx + g$ é a seguinte:

Tomamos o sistema original:

Para os métodos iterativos os pivôs de cada (elementos da diagonal principal) coluna **DEVEM** ser $\neq 0$!

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

e supondo $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$, isolamos o vetor x mediante a separação pela diagonal, assim:

Desta forma, temos $x = Cx + g$, onde

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \dots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & \dots & -a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & -a_{n3}/a_{nn} & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{pmatrix}$$

O método de Gauss-Jacobi consiste em, dado $x^{(0)}$, aproximação inicial, obter $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, \dots$ através da relação recursiva $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}) \end{array} \right.$$

Exemplo 5

Resolva o sistema linear abaixo pelo mét. de Gauss-Jacobi com $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -1.6 \\ 0.6 \end{pmatrix}$ e $\varepsilon = 0.05$.

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

Chute inicial

Precisão do cálculo numérico

O processo iterativo é o seguinte:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10} (7 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) = 0x_1^{(k)} - \frac{2}{10} x_2^{(k)} - \frac{1}{10} x_3^{(k)} + \frac{7}{10} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5} (-8 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}) = -\frac{1}{5} x_1^{(k)} + 0x_2^{(k)} - \frac{1}{5} x_3^{(k)} - \frac{8}{5} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10} (6 - 2x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)}) = \underbrace{-\frac{2}{10} x_1^{(k)} - \frac{3}{10} x_2^{(k)}}_{=} + 0x_3^{(k)} + \frac{6}{10} \end{cases}$$

Na forma matricial $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$ temos

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -2/10 & -1/10 \\ -1/5 & 0 & -1/5 \\ -1/5 & -3/10 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } g = \begin{pmatrix} 7/10 \\ -8/5 \\ 6/10 \end{pmatrix}.$$

Obs. $x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}$

Assim ($k = 0$) temos

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -0.2x_2^{(0)} - 0.1x_3^{(0)} + 0.7 = -0.2(-1.6) - 0.1 \times 0.6 + 0.7 = 0.96 \\ x_2^{(1)} = -0.2x_1^{(0)} - 0.2x_3^{(0)} - 1.6 = -0.2 \times 0.7 - 0.2 \times 0.6 - 1.6 = -1.86 \\ x_3^{(1)} = -0.2x_1^{(0)} - 0.3x_2^{(0)} + 0.6 = -0.2 \times 0.7 - 0.3(-1.6) + 0.6 = 0.94 \end{cases}$$

Ou ainda:

$$x^{(1)} = Cx^{(0)} + g = \begin{pmatrix} 0.96 \\ -1.86 \\ 0.94 \end{pmatrix}.$$

Calculando $d_r^{(1)}$, temos:

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = 0.26$$

$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = 0.26$$

$$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = \frac{0.34}{\max}$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -1.6 \\ 0.6 \end{pmatrix} \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.96 \\ -1.86 \\ 0.94 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = 0.05.$$

Prosseguindo com as iterações temos:

Para $k=1$: $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.978 \\ -1.98 \\ 0.966 \end{pmatrix} \Rightarrow d_r^{(2)} = \frac{0.12}{1.98} = 0.0606 > \varepsilon$

Para $k=2$: $x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.9994 \\ -1.9888 \\ 0.9984 \end{pmatrix} \Rightarrow d_r^{(3)} = \frac{0.0324}{1.9888} = 0.0163 < \varepsilon$

OK! Satisfaz o critério de parada !!!

Então, a solução \bar{x} do sistema linear acima, com erro menor que 0.05, obtida pelo método de Gauss-Jacobi, é

$$\bar{x} = x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.9994 \\ -1.9888 \\ 0.9984 \end{pmatrix}$$

OBS: Neste exemplo tomamos $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -1.6 \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ b_3/a_{33} \end{pmatrix}$. No entanto, o valor de $x^{(0)}$ é arbitrário, pois veremos mais adiante que a convergência ou não de um método iterativo para a solução de um sistema linear de equações é independente da aproximação inicial escolhida.

UM CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA

Daremos aqui um teorema que estabelece uma condição suficiente para a convergência do método iterativo de Gauss-Jacobi.

Somatório dos elementos da linha k (exceto o pivô)

TEOREMA 4: Critério das linhas

Seja o sistema linear $Ax = b$ e seja $\alpha_k = \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| \right) / |a_{kk}|$. Se $\alpha = \max_{1 \leq k \leq n} \alpha_k < 1$, então o

método de Gauss-Jacobi gera uma seqüência $\{x^{(k)}\}$ convergente para a solução do sistema dado, independentemente da escolha da aproximação inicial, $x^{(0)}$.

Exemplo 6

Analizando a matriz A do sistema linear do exemplo anterior:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}, \text{ temos}$$

Lembremos que:

$$\alpha_k = \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| \right) / |a_{kk}|$$

Pivô

Outros elementos

$$\alpha_1 = \frac{2+1}{10} = \frac{3}{10} = 0.3 < 1; \alpha_2 = \frac{1+1}{5} = 0.4 < 1; \alpha_3 = \frac{2+3}{10} = 0.5 < 1 \text{ e}$$

então $\max_{1 \leq k \leq 3} \alpha_k = 0.5 < 1$ donde, pelo critério das linhas, temos garantia de convergência

para o método de Gauss-Jacobi.

Exemplo 7

Para o sistema linear $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -3 \end{cases}$ o método de Gauss-Jacobi gera uma seqüência convergente para a solução exata $x^* = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$. (Verifique!) No entanto, o critério das linhas não é satisfeito, visto que $\alpha_1 = \frac{1}{1} = 1$. Isto mostra que a condição do Teorema 4 é apenas suficiente.

Exemplo 8

A matriz A do sistema linear $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases}$ não satisfaz o critério das linhas

pois $\alpha_1 = \frac{3+1}{1} = 4 > 1$. Contudo, se permutarmos a primeira equação com a segunda,

temos o sistema linear $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases}$ que é equivalente ao sistema original e a

matriz $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ deste novo sistema satisfaz o critério das linhas.

Assim, é conveniente aplicarmos o método de Gauss-Jacobi a esta nova disposição do sistema, pois desta forma a convergência está assegurada.

Concluindo, sempre que o critério das linhas não for satisfeito, devemos tentar uma permutação de linhas e/ou colunas de forma a obtermos uma disposição para a qual a matriz dos coeficientes satisfaça o critério das linhas. No entanto, nem sempre é possível obter tal disposição, como facilmente verificamos com o sistema linear do Exemplo 7

5.3.2 Método Iterativo de Gauss-Seidel

Da mesma forma que no método de Gauss-Jacobi, no método de Gauss-Seidel o sistema linear $Ax = b$ é escrito na forma equivalente $x = Cx + g$ por separação da diagonal.

O processo iterativo consiste em, sendo $x^{(0)}$ uma aproximação inicial, calcular $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, \dots$ por:

Pivô da coluna 1

Pivô da coluna 2

Essa eq. é igual ao do método de Gauss-Jacobi

$$\begin{aligned}
 x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\
 x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\
 x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{34}x_4^{(k)} - \dots - a_{3n}x_n^{(k)}) \\
 &\vdots & & \vdots \\
 &\vdots & & \vdots \\
 &\vdots & & \vdots \\
 x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)})
 \end{aligned}$$

Portanto, no processo iterativo de Gauss-Seidel, no momento de se calcular $x_j^{(k+1)}$ usamos todos os valores $x_1^{(k+1)}, \dots, x_{j-1}^{(k+1)}$ que já foram calculados e os valores $x_{j+1}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$ restantes.

Exemplo 9

Resolva o sistema linear abaixo pelo mét. de Gauss-Seidel com $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\varepsilon = 5 \times 10^{-2}$.

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

↑
Chute inicial ↑
Precisão

O processo iterativo é:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1 - 0.2x_2^{(k)} - 0.2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 1.5 - 0.75x_1^{(k+1)} - 0.25x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 0 - 0.5x_1^{(k+1)} - 0.5x_2^{(k+1)} \end{cases}$$

Como $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$(k = 0)$:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1 - 0 - 0 = 1 \\ x_2^{(1)} = 1.5 - 0.75 \times 1 - 0 = 0.75 \\ x_3^{(1)} = -0.5 \times 1 - 0.5 \times 0.75 = -0.875 \end{cases} \Rightarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.75 \\ -0.875 \end{pmatrix}, \text{ donde}$$

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = 1$$

$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = 0.75$$

$$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = 0.875$$

$$\Rightarrow d_r^{(1)} = \frac{1}{\max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(1)}|} = 1 > \varepsilon$$

Lembremos que nesse caso $\varepsilon = 5 \times 10^{-2} = 0.05$

Assim, ($k = 1$) e

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(2)} = 1 - 0.2 \times 0.75 + 0.2 \times 0.875 = 1.025 \\ x_2^{(2)} = 1.5 - 0.75 \times 1.025 - 0.25 \times (-0.875) = 0.95 \\ x_3^{(2)} = -0.5 \times 1.025 - 0.5 \times 0.95 = -0.9875 \end{array} \right. \Rightarrow x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.025 \\ 0.95 \\ -0.9875 \end{pmatrix}, \text{ donde}$$

$$|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| = 0.025$$

$$|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| = 0.20 \Rightarrow d_r^{(2)} = \frac{0.2}{\max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(2)}|} = \frac{0.2}{1.025} = 0.1951 > \varepsilon$$

$$|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}| = 0.1125$$

Continuando as iterações obtemos:

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1.0075 \\ 0.9912 \\ -0.9993 \end{pmatrix} \Rightarrow d_r^{(3)} = 0.0409 < \varepsilon. \quad \text{OK. Satisfaz o critério de parada !!!}$$

Assim, a solução \bar{x} do sistema linear dado com erro menor que ε , pelo método de Gauss-Seidel, é

$$\bar{x} = x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1.0075 \\ 0.9912 \\ -0.9993 \end{pmatrix}$$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA NO CASO 2×2

Consideremos a aplicação geométrica dos métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel ao sistema linear:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -3 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{Preparação}} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 3 - x_2 \\ x_2 = \frac{1}{3} (3 + x_1) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x_1 = 3 - x_2 = \frac{1}{3} (3 - x_2) \\ x_2 = \frac{1}{3} (3 + x_1) \end{array}$$

O esquema iterativo para **Gauss-Jacobi** é:

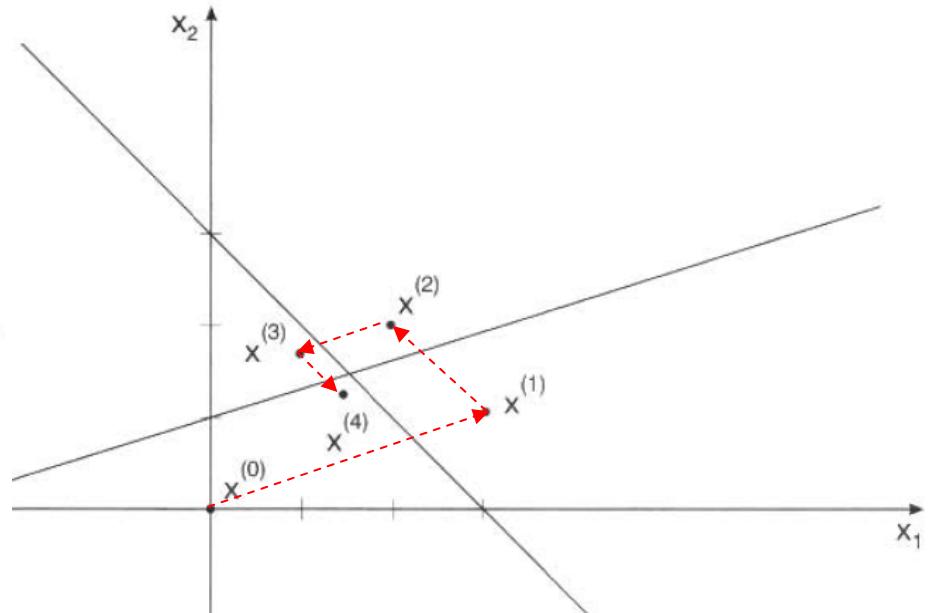
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = 3 - x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3} (3 + x_1^{(k)}) \end{array} \right.$$

Teremos:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5/3 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$



O esquema iterativo para **Gauss-Seidel** é:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 3 - x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3} (3 + x_1^{(k+1)}) \end{cases}$$

Para melhor visualização gráfica, marcaremos no gráfico os pontos $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$; $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)})$; $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)})$, ... para $k = 0, 1, 2, \dots$

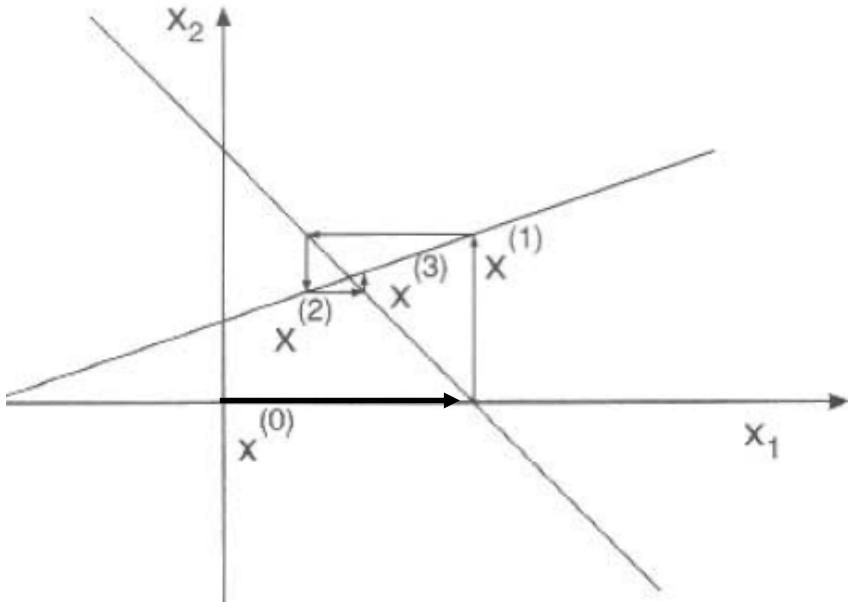
$\underbrace{(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}_{x^0 \text{ da figura}} \text{ abaixo}$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 14/9 \end{pmatrix}, \dots$$

Observamos que os pontos $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)})$ satisfazem a primeira equação e os pontos $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)})$ satisfazem a segunda equação.



Embora a ordem das equações num sistema linear não mude a solução exata, as seqüências geradas pelos métodos de Gauss-Seidel e de Gauss-Jacobi dependem fundamentalmente da disposição das equações.

É fácil verificar que a seqüência $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots$ está convergindo para a solução exata do sistema linear que é $x^* = (1.5, 1.5)$, tanto no método de Gauss-Jacobi quanto no de Gauss-Seidel.

No entanto, o método de Gauss-Seidel gera uma seqüência divergente para este mesmo sistema escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -3 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases} \quad \text{Obs. Nesse caso trocamos } L_1 \leftrightarrow L_2$$

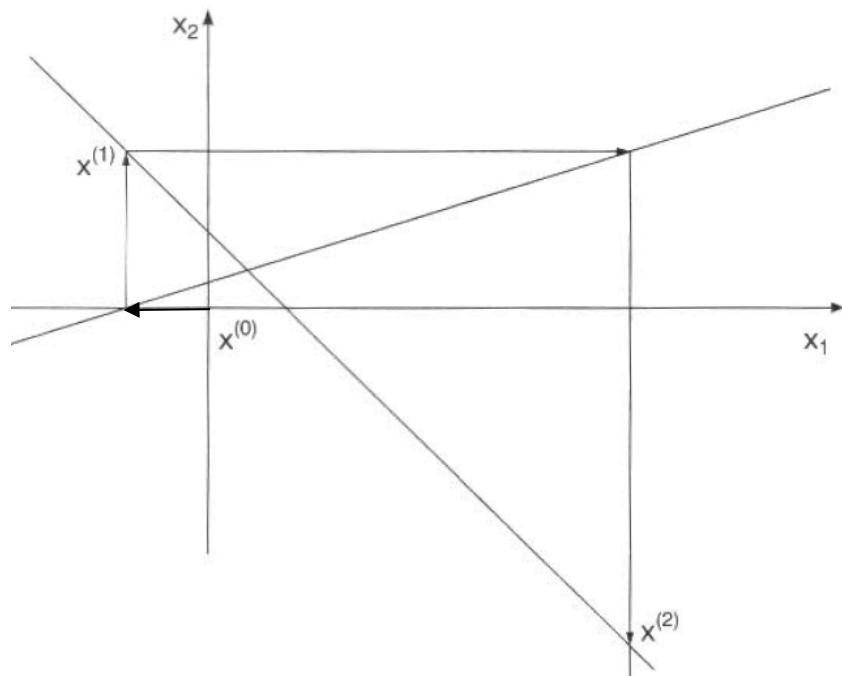
para a qual o esquema iterativo será:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -3 + 3x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 3 - x_1^{(k+1)} \end{cases} \quad \text{Para } x^{(0)} = (0, 0)^T \text{ teremos:}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -12 \end{pmatrix}, \dots$$

Graficamente, comprovamos a divergência de $x^* = (1.5, 1.5)^T$:



ESTUDO DA CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

Como em todo processo iterativo, precisamos de critérios que nos forneçam garantia de convergência.

Para o método de Gauss-Seidel analisaremos os seguintes critérios, que estabelecem condições suficientes de convergência: o critério de Sassenfeld e o critério das linhas.

CRITÉRIO DE SASSENFELD

Seja $x^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ a solução exata do sistema $Ax = b$ e seja $x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$ a k -ésima aproximação de x^* .

Definimos

$$\beta_1 = \sum_{j=2}^n |a_{1j}| / |a_{11}| \text{ e para } i = 2, 3, \dots, n \quad e \quad \beta_i = \left[\sum_{j=1}^{i-1} \beta_j |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}| \right] / |a_{ii}|$$

Igual ao α_1 do critério das linhas!

Com isto estabelecemos o *critério de Sassenfeld*:

$$\text{Sejam } \beta_1 = \frac{|\alpha_{12}| + |\alpha_{13}| + \dots + |\alpha_{1n}|}{|\alpha_{11}|}$$

Somas dos outros elementos da linha 1 (sem o pivô).

Pivô da linha 1

$$\text{e } \beta_j = \frac{|\alpha_{j1}| \beta_1 + |\alpha_{j2}| \beta_2 + \dots + |\alpha_{jj-1}| \beta_{j-1} + |\alpha_{jj+1}| + \dots + |\alpha_{jn}|}{|\alpha_{jj}|}$$

Pivô da linha J

Se $\beta = \max_{1 \leq j \leq n} \{\beta_j\} < 1$ o método de Gauss-Seidel gerará uma seqüência convergente qualquer que seja $x^{(0)}$. Além disso, quanto menor for o valor de β mais rápida será a convergência.

Obs. Exemplos de β_2 e β_3 de uma Matriz A:3x3

$$\beta_2 = \frac{|\alpha_{21}| \beta_1 + |\alpha_{23}|}{|\alpha_{22}|}$$

$$\beta_3 = \frac{|\alpha_{31}| \beta_1 + |\alpha_{32}| \beta_2}{|\alpha_{33}|}$$

Exemplo

a) Seja o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + 0.5x_2 - 0.1x_3 + 0.1x_4 = 0.2 \\ 0.2x_1 + x_2 + 0.2x_3 - 0.1x_4 = -2.6 \\ -0.1x_1 - 0.2x_2 + x_3 + 0.2x_4 = 1.0 \\ 0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 + x_4 = -2.5 \end{cases}$$

Para este sistema linear temos:

$$\beta_1 = [0.5 + 0.1 + 0.1]/1 = 0.7$$

$$\beta_2 = [(0.2)(0.7) + 0.2 + 0.1]/1 = 0.44$$

$$\beta_3 = [(0.1)(0.7) + (0.2)(0.44) + 0.2]/1 = 0.358$$

$$\beta_4 = [(0.1)(0.7) + (0.3)(0.44) + (0.2)(0.358)]/1 = 0.2736.$$

Lembremos que nesse caso:

$$\beta_1 = \frac{|\alpha_{12}| + |\alpha_{13}| + |\alpha_{14}|}{|\alpha_{11}|}$$

$$\beta_2 = \frac{|\alpha_{21}| \beta_1 + |\alpha_{23}| + |\alpha_{24}|}{|\alpha_{22}|}$$

$$\beta_3 = \frac{|\alpha_{31}| \beta_1 + |\alpha_{32}| \beta_2 + |\alpha_{34}|}{|\alpha_{33}|}$$

$$\beta_4 = \frac{|\alpha_{41}| \beta_1 + |\alpha_{42}| \beta_2 + |\alpha_{43}| \beta_3}{|\alpha_{44}|}$$

Nesse caso $\beta = \max \beta_j = 0.7 < 1$. Portanto o *critério de Sassenfeld* foi satisfeito e o método de Gauss-Seidel gerará uma seqüência convergente.

CRITÉRIO DAS LINHAS

O critério das linhas estudado no método de Gauss-Jacobi pode ser aplicado no estudo da convergência do método de Gauss-Seidel.

O critério das linhas diz que se $\alpha = \max_{1 \leq k \leq n} \{\alpha_k\} < 1$, onde $\alpha_k = \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| \right) / |a_{kk}|$

então o método de Gauss-Seidel gera uma seqüência convergente.

Exemplo

Seja o sistema linear ao lado

Temos

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases}$$

$\alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{3} < 1$ e $\alpha_2 = \frac{1}{1} = 1$; então o critério das linhas não é satisfeito.

No entanto,

$$\beta_2 = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3} < 1 \quad \text{e} \quad \beta_3 = \frac{3 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{2} = \frac{2}{3} < 1.$$

Portanto, o critério de Sassenfeld é satisfeito.

Lembremos que nesse caso:

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}|}{|a_{11}|}$$

$$\beta_2 = \frac{|a_{21}| \beta_1 + |a_{23}|}{|a_{22}|}$$

$$\beta_3 = \frac{|a_{31}| \beta_1 + |a_{32}| \beta_2}{|a_{33}|}$$

Considerações finais

Conforme vimos, os métodos diretos são processos finitos e, portanto, teoricamente, obtêm a solução de qualquer sistema não singular de equações. Já os métodos iterativos têm convergência assegurada apenas sob determinadas condições.

Vimos que os métodos diretos apresentam sérios problemas com erros de arredondamento. Uma forma de amenizar esses problemas é adotar técnicas de pivoteamento. Os métodos iterativos têm menos erros de arredondamento, visto que a convergência, uma vez assegurada, independe da aproximação inicial. Desta forma, somente os erros cometidos na última iteração afetam a solução, pois os erros cometidos nas iterações anteriores não levarão à divergência do processo nem à convergência a um outro vetor que não a solução.

Exemplo

Retomando o Exemplo 1 da Introdução, com $\alpha = \sin(45^\circ) = \sqrt{2}/2$, resolvemos o sistema linear resultante pelo método da Eliminação de Gauss com pivoteamento parcial. Obtemos o vetor solução:

$$(-29.247105, 19, 10, -28, 13.853892, 19, 0, -28, 9.235928, 22, 0, -16, -9.235928, 22, 16, -24.629141, 16)^T.$$

Permutando algumas linhas de forma que os elementos da diagonal principal fossem não nulos, conseguimos o esquema iterativo do método de Gauss-Seidel. No entanto, a seqüência gerada divergiu da solução.

Exemplo

Seja o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 & 4 & -3 & -1 & 4 & 4 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & -2 & 0 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 2 & 1 & -2 & 2 & 1 & 9 & -3 \\ 9 & 3 & 5 & 1 & 0 & 5 & 6 & -5 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 7 & 0 & -5 & 7 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 9 & 8 & 0 & 3 & 9 & 9 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 9 & 0 & 4 & 3 & 7 & -4 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 1 & 1 & 6 & 8 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 6 & 5 & 0 & -7 & 7 & -7 & 6 & 2 & -6 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & 4 & 8 & 3 & -5 & 0 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 86 \\ 45 \\ 52.5 \\ 108 \\ 66.5 \\ 90.5 \\ 139 \\ 61 \\ -43.5 \\ 31 \end{bmatrix}$$



A solução obtida pelo método da Eliminação de Gauss com pivoteamento parcial foi:

$$\bar{x} = (3, -4.5, 7, 8, 3.5, 2, 4, -3.5, 2, 1.5)^T.$$

Também para este exemplo, trocando apenas a nona equação com a décima, não conseguimos uma seqüência convergente para o método de Gauss-Seidel.

Exemplo

Seja o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -110 \\ -30 \\ -40 \\ -110 \\ 0 \\ -15 \\ -90 \\ -25 \\ -55 \\ -65 \end{bmatrix}$$

Resolvendo pelo método da Eliminação de Gauss, com estratégia de pivoteamento parcial, obtivemos o seguinte vetor solução: 12005 iterações !!!

$$\bar{x} = (-48.646412, -35.4947917, -25.6157408, -49.0908565, -37.7170139, -26.9681713, -39.3142361, -29.5399306, -26.8773148, -22.9693287)^T.$$

Aplicando o método de Gauss-Seidel com o esquema iterativo montado a partir da disposição original das equações, com $x^{(0)} = (20, \dots, 20)^T$ e $\epsilon = 10^{-7}$, obtivemos o mesmo vetor \bar{x} após 28 iterações.

Exercício resolvido mostrando uma comparação entre dois métodos iterativos

Calcule as duas primeiras iterações dos métodos Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel do sistema linear abaixo:

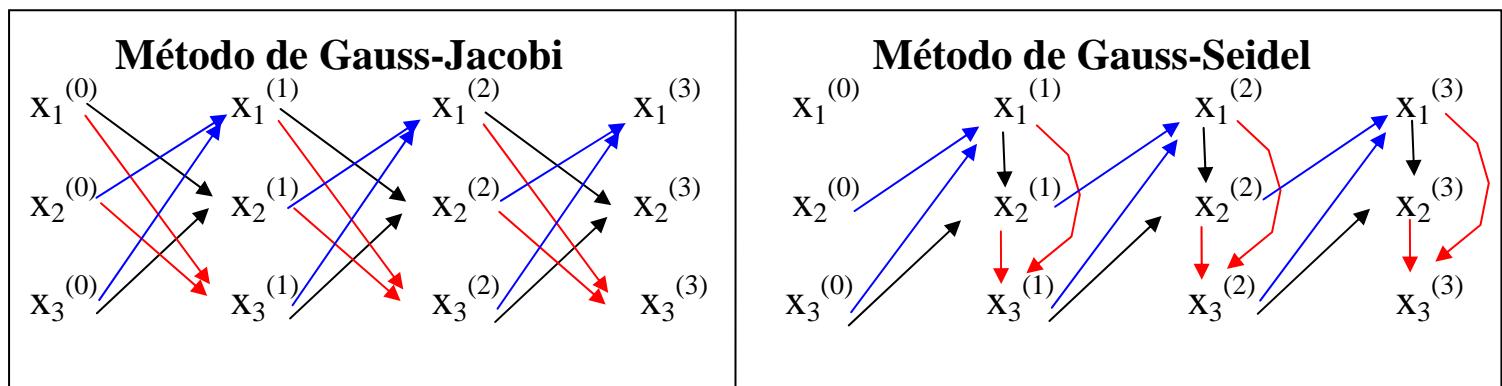
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 9x_3 = 7 \\ 5x_1 - 6x_2 - 8x_3 = 3 \\ 1x_1 - 2x_2 + 15x_3 = 5 \end{cases}$$

Use como chute inicial o vetor (matriz coluna) $x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Etapa inicial – Isolar os x_i de cada linha i e escrever o sistema de equações equivalentes.

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 9x_3 = 7 \\ 5x_1 - 6x_2 - 8x_3 = 3 \\ 1x_1 - 2x_2 + 15x_3 = 5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7 - 2x_2 + 9x_3}{4} \\ x_2 = \frac{3 - 5x_1 + 8x_3}{-6} \\ x_3 = \frac{5 - 1x_1 + 2x_2}{15} \end{cases}$$

Abaixo temos um diagrama mostrando de forma esquemática a dependência de cada um dos termos nas três primeiras iterações de uma matriz $A:3x3$ dos **métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel**.



Segue abaixo exemplos para o calculo das três primeiras iteracões ($x^{(1)}$, $x^{(2)}$ e $x^{(3)}$) pelo

método de Gauss-Jacobi usando como chute inicial: $x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= (+7 - 2x_2^{(0)} + 9x_3^{(0)})/4 = 7.50 \\ x_2^{(1)} &= (+3 - 5x_1^{(0)} + 8x_3^{(0)})/(-6) = -3.667 \\ x_3^{(1)} &= (-5 - 1x_1^{(0)} + 2x_2^{(0)})/(15) = -0.133 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\hspace{10em}} x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.50 \\ -3.667 \\ -0.133 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= (+7 - 2x_2^{(1)} + 9x_3^{(1)})/4 = 3.882 \\ x_2^{(2)} &= (+3 - 5x_1^{(1)} + 8x_3^{(1)})/(-6) = 5.572 \\ x_3^{(2)} &= (-5 - 1x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)})/(15) = -1.322 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\hspace{10em}} x^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.882 \\ 5.572 \\ -1.322 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1^{(3)} &= (+7 - 2x_2^{(2)} + 9x_3^{(2)})/4 = -4.010 \\ x_2^{(3)} &= (+3 - 5x_1^{(2)} + 8x_3^{(2)})/(-6) = 4.497 \\ x_3^{(3)} &= (-5 - 1x_1^{(2)} + 2x_2^{(2)})/(15) = 0.150 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\hspace{10em}} x^{(3)} = \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.010 \\ 4.497 \\ 0.150 \end{pmatrix}$$

Segue abaixo exemplos para o calculo das três primeiras iteracões ($x^{(1)}$, $x^{(2)}$ e $x^{(3)}$) pelo

método de Gauss-Seidel usando como chute inicial: $x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= (+7 - 2x_2^{(0)} + 9x_3^{(0)})/4 = 7.50 \\ x_2^{(1)} &= (+3 - 5x_1^{(1)} + 8x_3^{(0)})/(-6) = 1.75 \\ x_3^{(1)} &= (-5 - 1x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)})/(15) = -0.60 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\hspace{10em}} x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.50 \\ 1.75 \\ -0.60 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= (+7 - 2x_2^{(1)} + 9x_3^{(1)})/4 = -0.475 \\ x_2^{(2)} &= (+3 - 5x_1^{(2)} + 8x_3^{(1)})/(-6) = -0.095 \\ x_3^{(2)} &= (-5 - 1x_1^{(2)} + 2x_2^{(2)})/(15) = -0.314 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\hspace{10em}} x^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.475 \\ -0.095 \\ -0.314 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1^{(3)} &= (+7 - 2x_2^{(2)} + 9x_3^{(2)})/4 = 1.091 \\ x_2^{(3)} &= (+3 - 5x_1^{(3)} + 8x_3^{(2)})/(-6) = 0.827 \\ x_3^{(3)} &= (-5 - 1x_1^{(3)} + 2x_2^{(3)})/(15) = -0.295 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\hspace{10em}} x^{(3)} = \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.091 \\ 0.827 \\ -0.295 \end{pmatrix}$$

Obs: No exemplo anterior não fizemos nenhum teste para saber se os métodos iterativos teriam convergência assegurada ou não. Na prática antes de utilizarmos esses métodos numa máquina digital verificamos se o critério das linhas é satisfeito (no caso da utilização o método de Gauss-Jacobi) ou o critério de Sassenfeld (no caso da utilização do método de Gauss-Seidel).

Exercícios propostos

Verifique se a matriz dos sistemas abaixo tem convergência garantida pelos métodos numéricos iterativos. Dica: Aplique os critérios de linhas e de Sassenfeld.

a) b) c)

$$\begin{cases} 20x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 16 \\ 7x_1 + 30x_2 + 8x_3 = 38 \\ 9x_1 + 8x_2 + 30x_3 = 38 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 6x - 18y + 4z = 2 \\ -x + 3y - z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x = 1 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$$

Para os sistemas acima que tiverem convergência garantida encontre as 4 primeiras iterações usando os métodos de Gauss-Jacobi e de Gauss-Seidel. No caso do sistema que não tenha convergência garantida, o que poderíamos fazer para que ele tivesse convergência garantida nos métodos numéricos estudados?