2ª Lista de Exercícios

A. Exercícios sobre interpolação numérica

1) Considere os pontos da tabela abaixo:

x	1	1.5	3
y	330	710	2720

a) Encontre a função que interpola os dois primeiros pontos (x_0 e x_1), ou seja, obtenha $P_1(x)$.

b) Encontre a função que interpola os três pontos (x_0, x_1 e x_2), ou seja, obtenha $P_2(x)$.

c) Calcule $P_1(1.2)$ e $P_2(1.2)$ e compare com o valor da função $f(x)= 5+35x +290x^2$ original no ponto 1.2

d) Qual dos dois polinômios da um valor mais próximo de f(1.2).

DICA: Para encontrar o polinômio interpolador basta resolver o sistema de equações pelo método direto de eliminação de Gauss e encontrar os coeficientes (a_i) do polinômio.

2) Considere os pontos da tabela abaixo:

x	1	2	3
y	5	5.24	6.288

a) Encontre a função que interpola os dois últimos pontos (x_1 e x_2), ou seja, obtenha $P_1(x)$.

b) Encontre a função que interpola os três pontos (x_0, x_1 e x_2), ou seja, obtenha $P_2(x)$.

c) Calcule $P_1(2.5)$ e $P_2(2.5)$ e compare com o valor da função $f(x)= 5+\log(x)/10x^3$ original no ponto 2.5

d) Qual dos dois polinômios da um valor mais próximo de f(2.5).

DICA: Para encontrar o polinômio interpolador basta resolver o sistema de equações pelo método direto de eliminação de Gauss e encontrar os coeficientes (a_i) do polinômio.

3) Considerando um função do tipo f(x)= 5x + ln(x+1),

a) Escreva o polinômio **interpolador de Lagrange** de ordem 2 passando que passa pelos pontos x=1, 2 e 3. Calcule $P_2(1.3)$

b) Escreva o polinômio **interpolador de Lagrange** de ordem 3 passando que passa pelos pontos x=1, 2, 3 e 4. Calcule $P_3(1.3)$

Dica: f(1)=5.69; f(2);= 11.09; f(3)= 16.38; f(4)= 21.60

$$\mathbf{P_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)}$$

$$\mathbf{P_3(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x);}$$

$$\textbf{onde } \mathbf{L_k(x)= \prod_{\substack{J=0\\ J\neq k}}^{n} (x-x_j) \,/\, \prod_{\substack{J=0\\ J\neq k}}^{n} (x_k-x_j)}$$

4) Considerando uma função do tipo f(x)=5x + ln(x+1),

a) escreva o polinômio **interpolador de Newton** de ordem 2 passando que passa pelos pontos x=1, 2 e 3. Calcule $P_3(1.3)$.

b) escreva o polinômio **interpolador de Newton** de ordem 3 passando que passa pelos pontos x=1, 2, 3 e 4. Calcule $P_3(1.3)$.

Dica: f(1)=5.69; f(2);= 11.09; f(3)= 16.38; f(4)= 21.60

$$\mathbf{P_2(x) = f[x_0] + (x - x_0)\, f[x_0,x_1] + (x - x_0)\,(x - x_1)\, f[x_0,x_1,x_2]}$$

$$\mathbf{P_3(x) = f[x_0] + (x - x_0)\, f[x_0,x_1] + (x - x_0)\,(x - x_1)\, f[x_0,x_1,x_2] + {} + (x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_2)\, f[x_0,x_1,x_2,x_3]}$$

onde $\mathbf{f[x_0] = f(x_0)}$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} =$$

$$= \frac{\dfrac{\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} - \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}{x_3-x_1} - \dfrac{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}}{x_3-x_0}$$

B. Exercícios sobre ajuste de curvas pelo método dos mínimos quadrados

1 – Dada a tabela

x	1	3	4	6
$f(x)$	-2.1	-0.9	-0.6	0.9

Ajuste os dados para uma função do tipo $g(x) = ax + b$.

2 – Aproximar f dada pela tabela abaixo por uma função do tipo

$g(x) = c_0 sen(x) + c_1 cos(x)$.

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$
$f(x)$	-1	0.71	2

3 – Seja $g(x) = c_0 + c_1 ln(x)$. Ajustar $f(x)$ por uma função do tipo acima sabendo-se que f passa pelos pontos $(1,1); (2,2); (3,3)$.

4 – Seja $M(t)$ a massa de um material radioativo. Num laboratório foram feitas as seguintes medições

t	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$M(t)$	3.16	2.38	1.75	1.34	1.00

Determine o instante em que teremos uma massa de 0.1 sabendo-se que $M(t) = M_0 e^{\alpha t}$ onde M_0 e a massa do material no instante $t = 0$.

5 – A produção de aço de um certo país, em milhões de toneladas, durante os anos de 1960 a 1970 é dada pela tabela abaixo

Ano	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Aço	66	85	89	78	97	105	93	112	88	117	115

a) Determine uma reta que se ajusta aos dados.

b) Avaliar a produção para o ano de 1971.

6 – A dependência entre a velocidade de um navio e a sua potência é dada pela tabela abaixo

v	5	7	9	11	12
$P(v)$	290	560	1144	1810	2300

Supondo que a dependência é do tipo $P(v) = a + bv^2$, determine a e b de modo a ajustar a função à tabela.

C. Exercícios sobre Integração Numérica

1) Calcular o valor numérico das integrais abaixo utilizando a regra do trapézio e a regra 1/3 de Simpson:

a) $\int_0^{\pi} (e^x + sen(x) + 2)\ dx,$ **b)** $\int_1^3 ln(x+1)\ dx,$ **c)** $\int_1^4 ln(x)(x^3 + \sqrt{e^x + 1})\ dx,$

2) Determinar o valor das integrais abaixo utilizando a regra do trapézio repetida com n=5 subdivisões

$a)\ \int_1^3 x^3 ln(x)\ dx,$ $b)\ \int_0^2 \frac{e^{-cos(x)}}{\sqrt{2x+4}}\ dx,$

3) Seja a integral: $\int_0^2 \frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}\ dx,$

a) Calcular com a regra de Simpson repetida com 6 subdivisões o valor numérico da integral e dar uma estimativa para o erro utilizando este método.

b) Para obtermos uma precisão de $\varepsilon=10^{-8}$ utilizando esta técnica numérica seriam necessário termos quantas subdivisões?

2) Seja a integral: $\int_0^{2.7} \frac{x + sen(x)}{1 + cos(x)}\ dx,$

a) Calcular com a regra de Simpson repetida com 10 subdivisões o valor numérico da integral e dar uma estimativa para o erro utilizando este método.

b) Para obtermos uma precisão de $\varepsilon=10^{-6}$ utilizando esta técnica numérica seriam necessário termos quantas subdivisões?

Dicas: consular Revisão 2 no site do curso.