Parte 3 – Integrais definidas
Somas finitas, Limites de somas finitas e integração definida.

1) Introdução.

Um dos grandes avanços da geometria clássica foi obter fórmulas para determinar área e volume de triângulos, esferas e cones. Neste capítulo, estudaremos um método para calcular área e volume destas e de outras formas mais gerais. Mas o método que apresentaremos — a *integração* — não serve apenas para isso. A *integral* tem muitas aplicações em estatística, economia, ciências e engenharia. Ela nos permite calcular quantidades que vão desde probabilidades e médias até consumo de energia e forças que atuam contra as comportas de uma represa.

A idéia básica da integração é que muitas quantidades podem ser calculadas se são quebradas em pedaços pequenos e, depois, soma-se a contribuição que cada parte dá. Apresentamos a teoria da integral no campo da área, no qual ela revela sua natureza de modo mais claro. Começaremos com exemplos envolvendo somas finitas. Isso levará naturalmente à pergunta sobre o que acontece quando mais e mais termos são somados. Passando para o limite, quando o número de termos tende ao infinito, chegamos a uma integral. Embora integração e derivação estejam intimamente relacionadas, não veremos o papel da derivada e da primitiva antes da Seção 5.4. A natureza de sua relação, contida no teorema fundamental do cálculo, é uma das mais importantes idéias do cálculo.

2) Estimando valores utilizando somas finitas

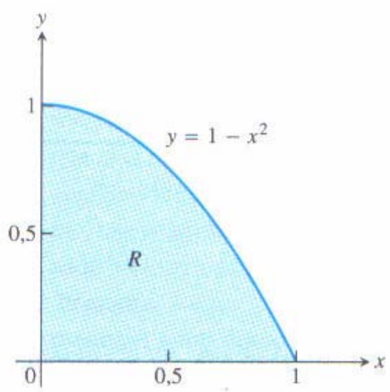


FIGURA 5.1 A área da região R não pode ser encontrada com uma fórmula simples (Exemplo 1).

Esta seção mostra como área, valores médios e distância percorrida por um objeto ao longo do tempo podem ser todos aproximados por somas finitas. Somas finitas são a base da definição de integrais, que será dada na Seção 5.3.

Área

Podemos aproximar a área de uma região com contorno curvo somando as áreas de um conjunto de retângulos. Usar uma quantidade maior de retângulos pode aumentar a precisão da sua aproximação.

EXEMPLO 1 Aproximando área

Qual é a área da região sombreada R que se encontra acima do eixo x, abaixo da curva de $y = 1 - x^2$, e entre as retas verticais $x = 0$ e $x = 1$? (Veja a Figura 5.1.) Um arquiteto pode querer saber essa área para calcular o peso de uma janela feita sob medida, cujo formato é descrito por R.

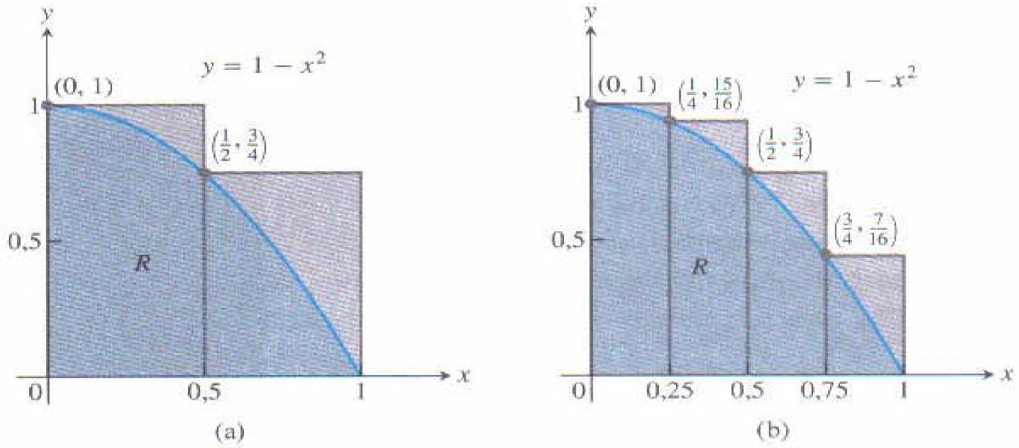


FIGURA 5.2 (a) Usando dois retângulos que contêm R, obtemos uma estimativa superior da área de R. (b) Quatro retângulos fornecem uma estimativa superior melhor. Ambas as alternativas ultrapassam o valor real da área.

Infelizmente, não existe uma fórmula geométrica simples para calcular a área de formas com contorno curvo como a região R.

Embora não tenhamos ainda um método para determinar a área exata de R, podemos aproximá-la de um modo simples. A Figura 5.2a mostra dois retângulos que, juntos, contêm a região R. Cada retângulo tem largura 1/2; o primeiro da esquerda para a direita tem altura 1, e o segundo, 3/4. A altura de cada retângulo é o valor máximo da função f, valor que se obtém calculando f na extremidade esquerda do subintervalo de [0, 1] que forma a base do retângulo. A área total dos dois retângulos aproxima a área A da região R,

$$A \approx 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8} = 0{,}875$$

Essa estimativa é maior do que a área real A, uma vez que os dois retângulos contêm R. Dizemos que 0,875 é uma **soma superior**, pois é obtida considerando-se a altura de cada retângulo como o valor máximo (o ponto mais alto) de $f(x)$, sendo x um ponto no intervalo da base do retângulo. Na Figura 5.2b, melhoramos nossa estimativa usando retângulos mais estreitos, cada qual com largura de 1/4, os quais, se considerados em conjunto, contêm a região R. Esses quatro retângulos nos fornecem a aproximação

$$A \approx 1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{32} = 0{,}78125$$

que ainda é maior do que A, uma vez que os dois retângulos contêm R.

Suponha, em vez disso, que usemos quatro retângulos contidos *dentro* da região R para estimar a área, como mostra a Figura 5.3a. Cada retângulo tem largura 1/4, como antes, mas os retângulos são mais baixos e ficam inteiramente abaixo da curva de f. A função $f(x) = 1 - x^2$ é decrescente em [0, 1], portanto a altura de cada um dos retângulos é dada pelo valor de f na extremidade direita do subintervalo que forma sua base. O quarto retângulo tem altura zero e, assim, não contribui para a área. Somando esses retângulos com alturas iguais ao valor mínimo de $f(x)$, sendo x um ponto em cada subintervalo da base, temos uma aproximação de **soma inferior** para a área

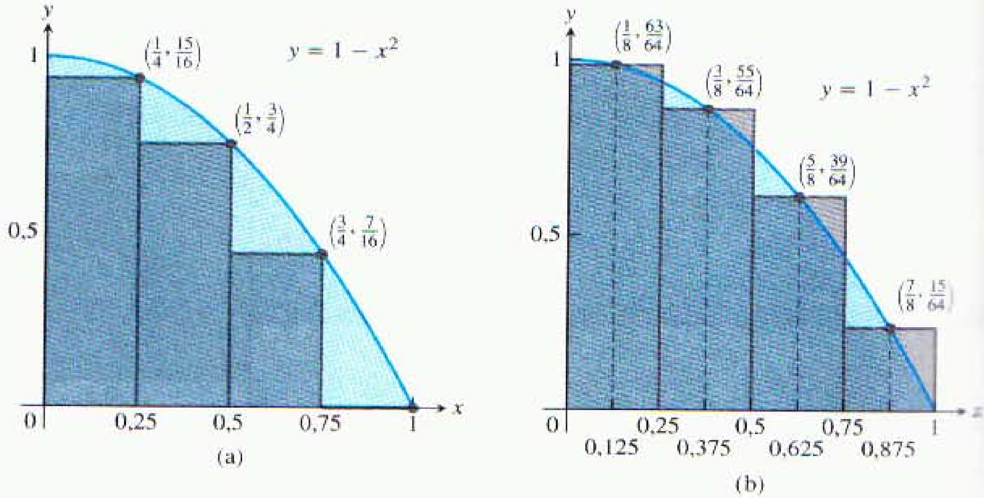


FIGURA 5.3 (a) Os retângulos contidos em R dão uma estimativa da área que subestima o valor real. (b) A regra do ponto médio usa retângulos cuja altura é o valor de $y = f(x)$ no ponto médio de suas bases.

$$A \approx \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} = \frac{17}{32} = 0{,}53125$$

Essa estimativa é menor que a área de A, pois todos os retângulos se situam dentro da região R. O verdadeiro valor de A fica em algum ponto entre as somas superior e inferior:

$$0{,}53125 < A < 0{,}78125$$

Considerando as duas aproximações, a de soma inferior e a de soma superior, conseguimos não apenas estimativas para a área, mas também um limite para o tamanho do possível erro nas estimativas, uma vez que o valor real da área fica em algum ponto entre elas. No presente caso, o erro não pode ser superior à diferença $0{,}78125 - 0{,}53125 = 0{,}25$.

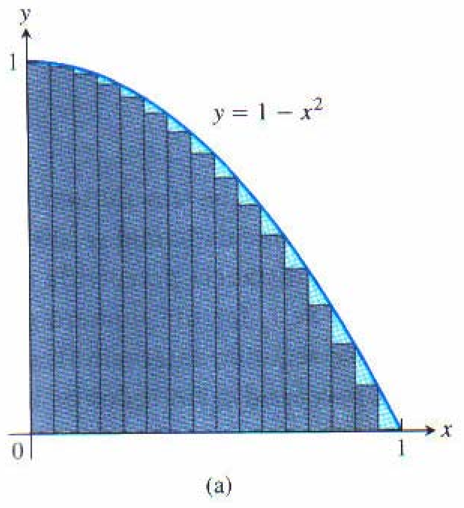
É possível, ainda, obter outra estimativa usando retângulos cujas alturas sejam valores de f em pontos médios de suas bases (Figura 5.3b). Esse método de estimação chama-se **regra do ponto médio** para aproximação da área. A regra do ponto médio fornece uma estimativa que fica entre uma soma inferior e uma superior, mas não fica claro se ela superestima ou subestima a área real. Com quatro retângulos de largura 1/4 como antes, a regra do ponto médio estima a área de R em

$$A \approx \frac{63}{64} \cdot \frac{1}{4} + \frac{55}{64} \cdot \frac{1}{4} + \frac{39}{64} \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{64} \cdot \frac{1}{4} = \frac{172}{64} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}671875$$

Em cada uma das nossas somas calculadas, o intervalo $[a, b]$ ao longo do qual a função f é definida foi subdividido em n subintervalos de igual largura (também chamada comprimento) $\Delta x = (b - a)/n$, e f foi calculada em um ponto em cada subintervalo: c_1 no primeiro subintervalo, c_2 no segundo subintervalo, e assim por diante. Desse modo, todas as somas finitas assumem esta forma:

$$f(c_1)\,\Delta x + f(c_2)\,\Delta x + f(c_3)\,\Delta x + \cdots + f(c_n)\,\Delta x$$

Pegando mais e mais retângulos, cada um deles mais estreito que os anteriores, parece que essas somas finitas fornecem aproximações cada vez melhores da área real da região R.



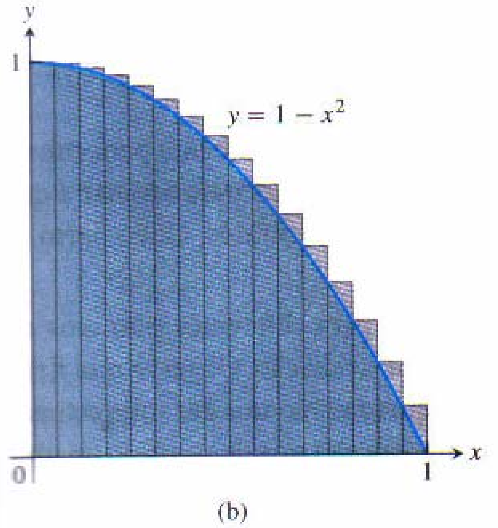


FIGURA 5.4 (a) Soma inferior usando 16 retângulos de igual largura $\Delta x = 1/16$. (b) Soma superior usando 16 retângulos.

A Figura 5.4a mostra uma aproximação de soma inferior para a área de R usando 16 retângulos de igual largura. A soma de suas áreas é 0,634765625, que parece próximo da área real, mas ainda é menor porque os retângulos estão dentro de R.

A Figura 5.4b mostra uma aproximação de soma superior usando 16 retângulos de igual largura. A soma de suas áreas é 0,697265625, um pouco maior que a área real, pois os retângulos, juntos, contêm R. A regra do ponto médio para 16 retângulos dá uma aproximação da área total de 0,6669921875, mas não fica imediatamente evidente se essa estimativa é maior ou menor que a área real.

TABELA 5.1 Aproximações finitas da área de R

Número de subintervalos	Soma inferior	Regra do ponto médio	Soma superior
2	,375	,6875	,875
4	,53125	,671875	,78125
16	,634765625	,6669921875	,697265625
50	,6566	,6667	,6766
100	,66165	,666675	,67165
1.000	,6661665	,66666675	,6671665

A Tabela 5.1 mostra os valores de aproximações de somas superior e inferior para a área de R, usando até 1.000 retângulos. Na Seção 5.2, veremos como obter o valor exato da área de regiões como R determinando o limite quando a largura da base de cada retângulo tende a zero e o número de retângulos tende a infinito. Com as técnicas que desenvolveremos, conseguiremos demonstrar que a área de R é exatamente 2/3.

3) Somas finitas, limites de somas infinitas e integração definida.

Na seção anterior vimos um exemplo de como calcular a área de uma curva utilizando o conceito de somas finitas. Os termos nas somas foram obtidos multiplicando-se valores de funções escolhidas pelos comprimentos dos intervalos. Nesta seção iremos além de somas finitas para verificar o que acontece no limite, quando os comprimentos dos intervalos tornam-se infinitamente pequenos e seu numero infinitamente grande.

Somas finitas e notação sigma

A *notação sigma* permite expressar uma grande soma em forma compacta.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

A letra grega maiúscula Σ significa 'soma'. O índice k diz onde começa a soma (no número sob o Σ) e onde ela termina (no número acima do Σ). Quando o símbolo ∞ aparece acima do Σ, isso indica que os termos continuam indefinidamente.

O índice k termina em $k = n$.

O símbolo de somatório (letra grega sigma)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

a_k é a fórmula para o k-ésimo termo.

O índice k começa em $k = 1$.

EXEMPLO 1 Usando a notação sigma

A soma em notação sigma	A soma escrita, um termo para cada valor de k	O valor da soma
$\sum_{k=1}^{5} k$	$1 + 2 + 3 + 4 + 5$	15
$\sum_{k=1}^{3} (-1)^k k$	$(-1)^1(1) + (-1)^2(2) + (-1)^3(3)$	$-1 + 2 - 3 = -2$
$\sum_{k=1}^{2} \frac{k}{k+1}$	$\frac{1}{1+1} + \frac{2}{2+1}$	$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$
$\sum_{k=4}^{5} \frac{k^2}{k-1}$	$\frac{4^2}{4-1} + \frac{5^2}{5-1}$	$\frac{16}{3} + \frac{25}{4} = \frac{139}{12}$

Veja abaixo um outro exemplo da notação sigma.

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(100) = \sum_{i=1}^{100} f(i)$$

Note que a notação sigma usada no lado direto dessa equação é muito mais compacta que a expressões de somatório de termos da esquerda.

O limite inferior do somatório não precisa ser 1; pode ser qualquer número inteiro.

EXEMPLO 2 Usando diferentes valores iniciais no índice

Expresse a soma $1 + 3 + 5 + 7 + 9$ em notação sigma.

SOLUÇÃO A fórmula que gera os termos muda conforme o limite inferior de somatório, mas os termos gerados permanecem os mesmos. Normalmente é mais simples começar com $k = 0$ ou $k = 1$.

Começando com $k = 0$: $\quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=0}^{4} (2k + 1)$

Começando com $k = 1$: $\quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=1}^{5} (2k - 1)$

Começando com $k = 2$: $\quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=2}^{6} (2k - 3)$

Começando com $k = -3$: $\quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=-3}^{1} (2k + 7)$

Quando temos uma soma do tipo

$$\sum_{k=1}^{3} (k + k^2)$$

podemos rearranjar os termos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3} (k + k^2) &= (1 + 1^2) + (2 + 2^2) + (3 + 3^2) \\ &= (1 + 2 + 3) + (1^2 + 2^2 + 3^2) \qquad \text{Termos reagrupados.} \\ &= \sum_{k=1}^{3} k + \sum_{k=1}^{3} k^2\end{aligned}$$

Isso ilustra uma regra para somas finitas:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Quatro regras desse tipo são apresentadas a seguir.

Regras algébricas para somas finitas

1. *Regra da soma:* $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

2. *Regra da diferença:* $\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

3. *Regra da multiplicação por constante:* $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$ (Qualquer número c)

4. *Regra do valor constante:* $\sum_{k=1}^{n} c = n \cdot c$ (c é qualquer valor constante)

EXEMPLO 3 Usando as regras algébricas para somas finitas

(a) $\sum_{k=1}^{n}(3k - k^2) = 3\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2$ Regras da diferença e da multiplicação por constante.

(b) $\sum_{k=1}^{n}(-a_k) = \sum_{k=1}^{n}(-1) \cdot a_k = -1 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k = -\sum_{k=1}^{n} a_k$ Regra da multiplicação por constante.

(c) $\sum_{k=1}^{3}(k + 4) = \sum_{k=1}^{3} k + \sum_{k=1}^{3} 4$ Regra da soma.

$= (1 + 2 + 3) + (3 \cdot 4)$ Regra do valor constante.

$= 6 + 12 = 18$

(d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1$ Regra do valor constante ($1/n$ é constante).

Ao longo dos anos, foi descoberta uma série de fórmulas para os valores de somas finitas. As mais famosas são a fórmula para a soma dos primeiros n inteiros (conta-se que Gauss a descobriu aos 8 anos) e as fórmulas para as somas dos quadrados e cubos dos primeiros n inteiros.

Somas de Riemann

As somas nas quais estamos interessados são chamadas *somas de Riemann*, em homenagem a Georg Friedrich Bernhard Riemann. As somas de Riemann são construídas de um modo particular. Vamos descrever a construção formalmente, em um contexto mais geral que não nos limita a funções não negativas.

Começamos com uma função contínua arbitrária $f(x)$ definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Assim como a função traçada na Figura 4.6, ela pode ter valores negativos e positivos.

Depois dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos escolhendo $n - 1$ pontos, digamos $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$, entre a e b, sujeitos apenas à condição de que

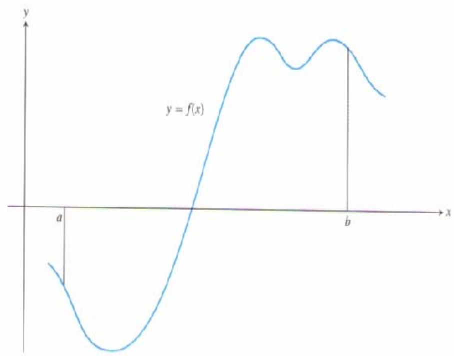


FIGURA 4.6 Uma função contínua típica $y = f(x)$ ao longo de um intervalo fechado $[a, b]$.

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b.$$

Para tornar a notação coerente, denotamos a por x_0 e b por x_n. O conjunto

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

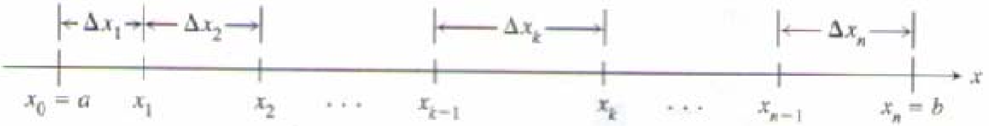
é chamado **partição de** $[a, b]$.

A partição P define n **subintervalos** fechados.

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n].$$

O subintervalo fechado típico $[x_{k-1}, x_k]$ é chamado ***k*-ésimo subintervalo** de P.

O comprimento do k-ésimo subintervalo é $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.



Em cada subintervalo selecionamos algum número. Denote o número escolhido do k-ésimo subintervalo por c_k.

Depois, em cada subintervalo construímos um retângulo com uma base no eixo x e que toca a curva em $(c_k, f(c_k))$. Esses retângulos podem estar tanto acima como abaixo do eixo (Figura 4.7).

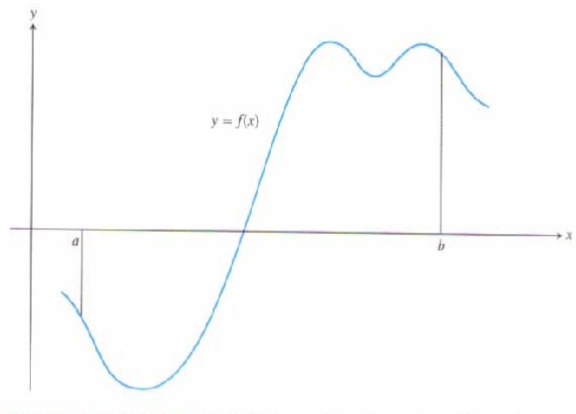


FIGURA 4.6 Uma função contínua típica $y = f(x)$ ao longo de um intervalo fechado $[a, b]$.

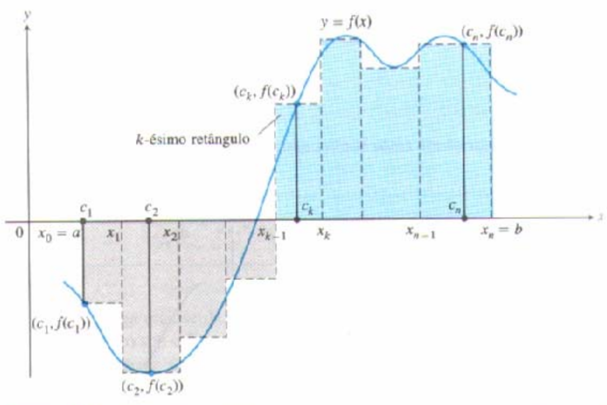


FIGURA 4.7 Os retângulos permitem fazer uma aproximação para o cálculo da região que fica entre o gráfico da função $y = f(x)$ e o eixo x.

Em cada subintervalo, formamos o produto $f(c_k) \cdot \Delta x_k$. Esse produto pode ser positivo, negativo ou nulo, dependendo de $f(c_k)$.

Por fim, tomamos a soma desses produtos:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k.$$

Essa soma, que depende da partição P e da escolha dos números c_k, é uma **soma de Riemann para f no intervalo $[a, b]$**.

À medida que as partições de $[a, b]$ se tornam cada vez menores esperamos que os retângulos definidos pelas partições aproximem a região entre o eixo x e o gráfico de f com precisão cada vez maior (Figura 4.8). Portanto, esperamos que as somas de Riemann associadas tenham um valor-limite. O Teorema 1, abaixo, nos assegura isso, desde que todos os comprimentos dos intervalos tendam a zero. Esta última condição é assegurada exigindo-se que o comprimento do maior subintervalo, chamado **norma** da partição e denotado por $\| P \|$, tenda a zero.

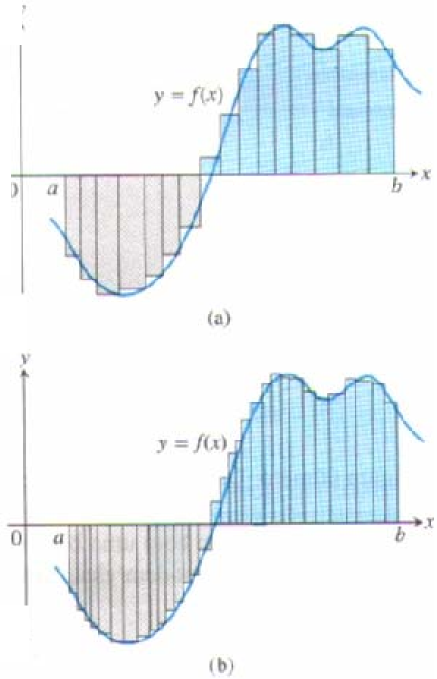


FIGURA 4.8 A curva da Figura 4.7 com retângulos obtidos de partições menores de $[a, b]$. Partições menores criam mais retângulos com bases menores.

Apesar do potencial para variação nas somas $\Sigma f(c_k)\, \Delta x_k$ conforme as partições mudam e os c_k são escolhidos arbitrariamente nos subintervalos de cada partição, as somas sempre têm o mesmo limite para $\| P \| \to 0$ quando f é *contínua* em $[a, b]$.

Definição A Integral Definida como Limite de Somas de Riemann

Seja f uma função definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Para qualquer partição P de $[a, b]$, escolha os números c_k arbitrariamente nos subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$.

Se houver um número I tal que

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, \Delta x_k = I$$

independentemente de como P e os c_k forem escolhidos, então f será **integrável** em $[a, b]$ e I será a **integral definida** de f em $[a, b]$.

Teorema 1 A Existência de Integrais Definidas

Todas as funções contínuas são integráveis. Isto é, se uma função f é contínua em um intervalo $[a, b]$, então sua integral definida em $[a, b]$ existe.

Terminologia e Notação de Integração

A escolha engenhosa de Leibniz para a notação da derivada, dy/dx, teve a vantagem de manter uma identidade como uma 'fração', embora numerador e denominador tendessem a zero. Mesmo não sendo realmente frações, as derivadas podem *comportar-se* como tal, de modo que a notação faz resultados profundos, como a Regra da Cadeia

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

parecerem relativamente simples.

A notação que Leibniz introduziu para a integral definida foi igualmente inspirada. Em sua notação para derivada, a letra grega ('Δ' de 'diferença') muda para romana ('*d*' de 'diferencial') no limite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}.$$

Em sua notação para integral definida, as letras gregas tornam-se novamente romanas no limite:

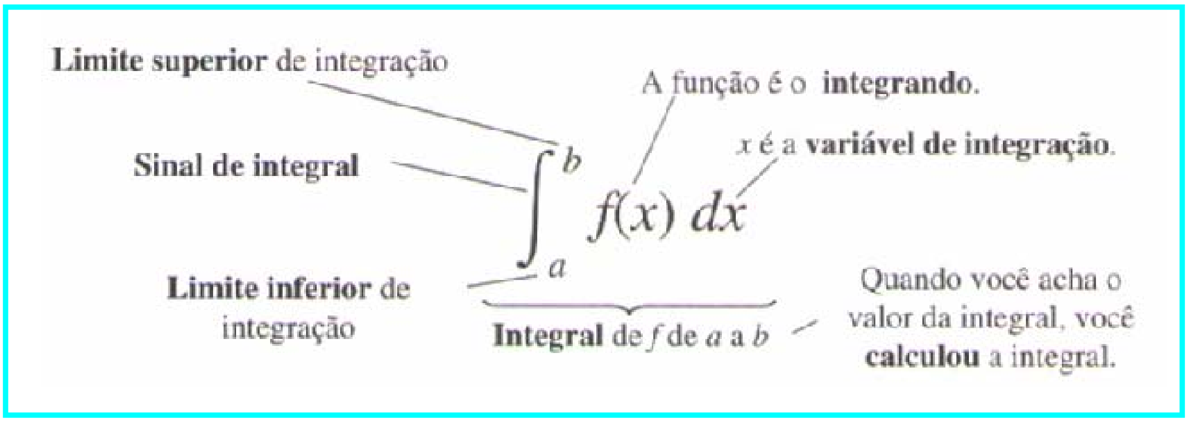
$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, \Delta x = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Observe que a diferença Δx novamente tendeu a zero, tornando-se uma diferencial dx. A letra grega 'Σ' tornou-se uma letra 'S' alongada, de modo que a integral pode manter sua identidade como 'soma'. Os c_k tornaram-se tão numerosos no limite que não pensamos mais em uma seleção discreta de valores de x entre a e b, mas em uma amostragem contínua, sem quebras, dos valores de x desde a até b. É como se estivéssemos somando *todos* os produtos da forma $f(x)\, dx$ quando x vai de a até b, de modo que podemos abandonar o k e o n usados nas expressões de somas finitas.

O símbolo

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

é lido como "integral de a até b de f de x d x" ou às vezes como "integral de a até b de f de x em relação a x". Os outros componentes também têm nomes:



O valor da integral definida de uma função em qualquer intervalo específico depende da função e não da letra que escolhemos para representar a variável independente. Se decidirmos usar t ou u em vez de x, simplesmente escrevemos a integral como

$$\int_a^b f(t)\, dt \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(u)\, du \quad \text{em vez de} \quad \int_a^b f(x)\, dx.$$

Independentemente de como representamos a integral, o *número* é o mesmo, definido como o limite das somas de Riemann. Como não importa qual letra usamos para ir de a até b, a variável de integração é chamada **variável boba.**

Exemplo 2 Usando a Notação

O intervalo $[-1, 3]$ é dividido em n subintervalos de igual comprimento $\Delta x = 4/n$. Seja m_k o ponto médio do k-ésimo subintervalo. Expresse o limite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (3(m_k)^2 - 2m_k + 5)\,\Delta x$$

como integral.

Solução Como os pontos médios m_k foram escolhidos a partir dos subintervalos do particionamento, esta expressão é certamente um limite das somas de Riemann. (Os pontos escolhidos não precisariam ser pontos médios; poderiam ter sido escolhidos arbitrariamente a partir dos subintervalos). A função que está sendo integrada é $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ ao longo do intervalo $[-1, 3]$. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (3(m_k)^2 - 2m_k + 5)\,\Delta x = \int_{-1}^{3} (3x^2 - 2x + 5)\,dx.$$

Área sob o Gráfico de uma Função não Negativa

No Exemplo 1, Seção 4.3, vimos que é possível fazer uma aproximação para o cálculo da área sob o gráfico de uma função contínua não negativa $y = f(x)$ somando-se as áreas dos vários retângulos finitos com altura igual à altura da curva acima do ponto médio do subintervalo que forma a base. Agora sabemos porque isso é verdade. Se uma função integrável $y = f(x)$ for não negativa ao longo de um intervalo $[a, b]$, cada termo não nulo $f(c_k)\Delta x_k$ será a área de um retângulo que se estende do eixo x até a curva $y = f(x)$. (Veja a Figura 4.9.)

A soma de Riemann

$$\sum f(c_k)\,\Delta x_k,$$

que é a soma das áreas desses retângulos, fornece uma estimativa para a área da região entre a curva e o eixo x desde a até b. Como os retângulos dão uma aproximação cada vez melhor da região, à medida que usamos partições com normas cada vez menores, chamamos esse valor limite de área sob a curva.

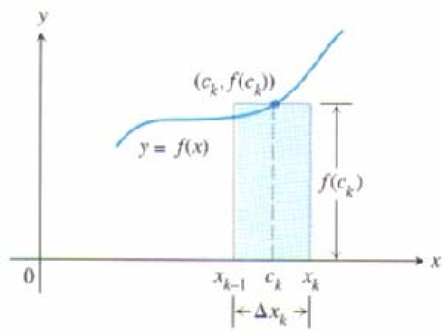


FIGURA 4.9 Um termo de uma soma de Riemann $\Sigma f(c_k)\,\Delta x_k$ para uma função não negativa f será zero ou a área de um retângulo como o apresentado na figura.

Definição Área sob uma Curva (como uma Integral Definida)

Se $y = f(x)$ for não negativa e integrável em um intervalo fechado $[a, b]$, então a **área sob a curva $y = f(x)$ desde a até b** será a integral de f de a até b,

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Essa definição vale nos dois sentidos: podemos usar integrais para calcular áreas *e* usar áreas para calcular integrais.

Exemplo 3 Área sob a Curva $f(x) = x$

Calcule

$$\int_a^b x\,dx, \qquad 0 < a < b.$$

Solução Esboçamos a região sob a curva $y = x$, $a \leq x \leq b$ (Figura 4.10) e vemos que é um trapézio com altura $(b - a)$ e bases a e b. O valor da integral é a área desse trapézio:

$$\int_a^b x\,dx = (b - a)\cdot\frac{a + b}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

Portanto,

$$\int_1^{\sqrt{5}} x\,dx = \frac{(\sqrt{5})^2}{2} - \frac{(1)^2}{2} = 2$$

e assim por diante.

Observe que $x^2/2$ é uma primitiva de x, evidência adicional de que há uma ligação entre primitivas e cálculo de integrais.

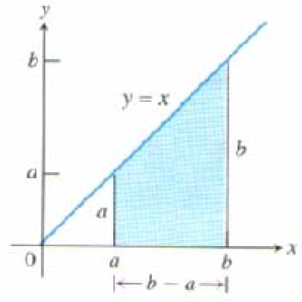


FIGURA 4.10 A região do Exemplo 3.

Definição Valor Médio (Média)

Se f for integrável em $[a, b]$, então seu **valor médio (média)** em $[a, b]$ é

$$M(f) = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Exemplo 4 Determinando um Valor Médio

Determine o valor médio de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ em $[-2, 2]$.

Solução Reconhecemos $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ como uma função cujo gráfico é o semicírculo superior de raio 2 centrado na origem.

A área entre o semicírculo e o eixo x desde -2 até 2 pode ser calculada usando-se a fórmula geométrica

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\cdot\pi r^2 = \frac{1}{2}\cdot\pi(2)^2 = 2\pi.$$

Como a área também é o valor da integral de f de -2 até 2,

$$\int_{-2}^{2}\sqrt{4 - x^2}\,dx = 2\pi.$$

Portanto, o valor médio de f é

$$M(f) = \frac{1}{2 - (-2)}\int_{-2}^{2}\sqrt{4 - x^2}\,dx = \frac{1}{4}(2\pi) = \frac{\pi}{2}.$$

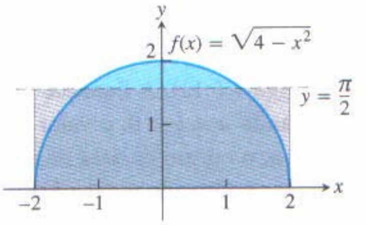


FIGURA 5.15 O valor médio de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ em $[-2, 2]$ é $\pi/2$

Propriedades das Integrais Definidas

Ao definir $\int_a^b f(x)\,dx$ como um limite das somas $\sum f(c_k)\,\Delta x_k$, caminhamos da esquerda para a direita ao longo do intervalo $[a, b]$. O que aconteceria se integrássemos no sentido *oposto*? A integral se tornaria $\int_b^a f(x)\,dx$ — novamente um limite de somas da forma $\sum f(c_k)\,\Delta x_k$ — mas dessa vez cada um dos Δx_k seria negativo à medida que os valores de x *diminuíssem* de b para a. Isso mudaria os sinais de todos os termos em cada soma de Riemann e, por fim, o sinal da integral definida. Isso sugere a regra

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Como a definição original não se aplicava a integração no sentido reverso ao longo de um intervalo, podemos tratar essa regra como uma extensão lógica da definição.

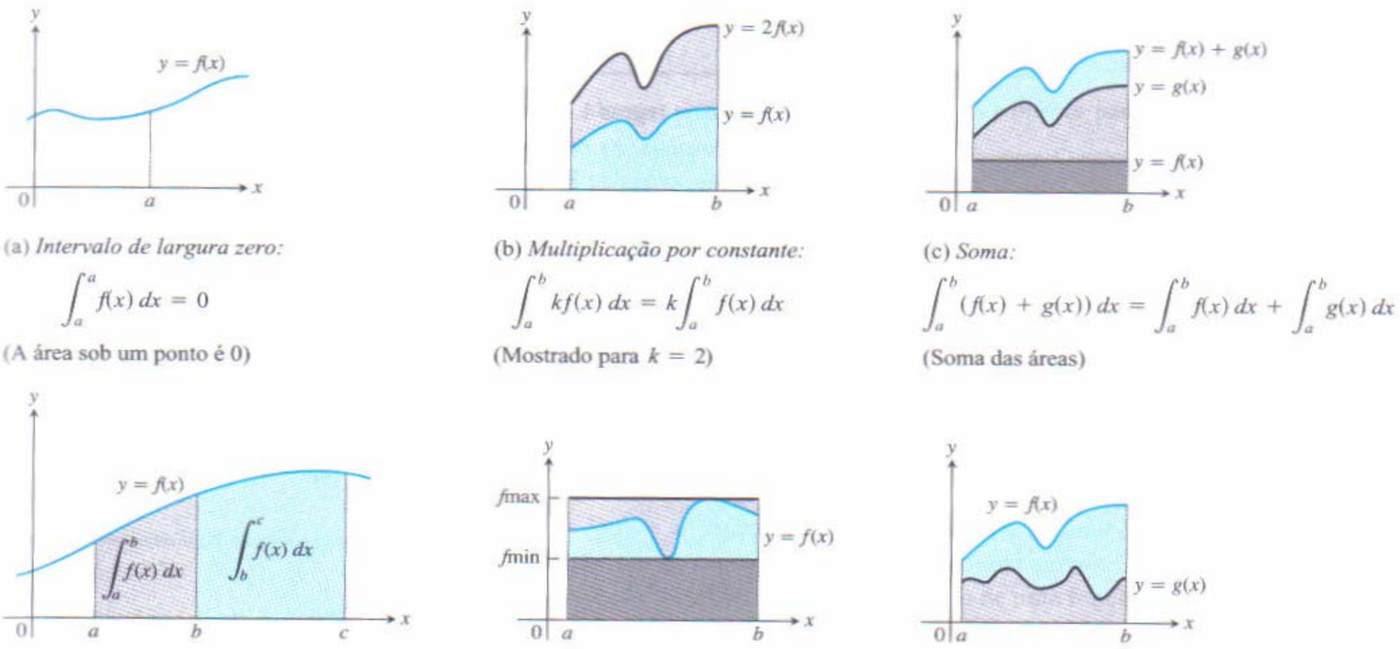
Embora $[a, a]$ tecnicamente não seja um intervalo, uma outra extensão lógica da definição é que $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Essas são as primeiras duas regras da Tabela 4.5. As outras foram herdadas de regras que se aplicam às somas de Riemann.

Tabela 4.5 Propriedades das Integrais Definidas

1.	*Ordem de integração:*	$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$	Uma definição.
2.	*Intervalo de largura zero:*	$\int_a^a f(x)\,dx = 0$	Também uma definição
3.	*Multiplicação por constante:*	$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$	Qualquer número
		$\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$	$k = -1$
4.	*Soma e subtração:*	$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$	
5.	*Aditividade:*	$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$	
6.	*Desigualdade max-min:*	Se f tem o valor máximo $\max f$ e o valor mínimo $\min f$ em $[a, b]$, então $\min f \cdot (b - a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \max f \cdot (b - a)$	
7.	*Dominação:*	$f(x) \ge g(x)$ em $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$	
		$f(x) \ge 0$ em $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$	(Caso especial)

As regras 2 a 7 têm interpretações geométricas, mostradas na Figura abaixo Os gráficos dessas figuras são de funções positivas, mas as regras se aplicam a funções integráveis em geral.



(a) *Intervalo de largura zero:*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

(A área sob um ponto é 0)

(b) *Multiplicação por constante:*

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

(Mostrado para $k = 2$)

(c) *Soma:*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(Soma das áreas)

(d) *Aditividade para integrais definidas:*

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

(e) *Desigualdade max-min:*

$$f\min \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le f\max \cdot (b-a)$$

(f) *Dominação:*

$f(x) \ge g(x)$ em $[a, b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$$

Exercícios Propostos.

Notação Sigma

Escreva as somas nos exercícios sem a notação sigma. Depois calcule-as.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2} \frac{6k}{k+1}$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{k-1}{k}$

Usando Propriedades e Valores Conhecidos para Encontrar Outras Integrais

Suponha que f e h sejam contínuas e que

$$\int_1^9 f(x)\,dx = -1, \qquad \int_7^9 f(x)\,dx = 5, \qquad \int_7^9 h(x)\,dx = 4.$$

Use as regras da Tabela 4.5 para obter as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_1^9 -2f(x)\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int_7^9 [f(x) + h(x)]\,dx$

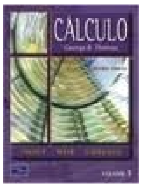
(c) $\displaystyle\int_7^9 [2f(x) - 3h(x)]\,dx$ **(d)** $\displaystyle\int_9^1 f(x)\,dx$

Suponha que $\int_1^2 f(x)\,dx = 5$. Calcule:

(a) $\displaystyle\int_1^2 f(u)\,du$ **(b)** $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{3}f(z)\,dz$

(c) $\displaystyle\int_2^1 f(t)\,dt$ **(d)** $\displaystyle\int_1^2 [-f(x)]\,dx$

Livro texto:



Thomas G. B., Finney R. L., Weir M. D., Giordano F. R., Cálculo, Vol. 1, Editora Pearson, Ed. 10 ou 11 – Addison Wesley, São Paulo.

Estudar os exercícios resolvidos sobre integrais nos endereços eletrônicos abaixo:
http://www.mtm.ufsc.br/~azeredo/calculos/Acalculo/x/listas/intsubst/intsubs.html
http://www.mtm.ufsc.br/~azeredo/calculos/Acalculo/x/listas/intpartes/intpart1.html
http://fisica.uems.br/arquivos/calc1not/integral_indefinida.pdf
http://www1.univap.br/~spilling