Parte 3 - Integrais: Noções iniciais

Primitivas e integrais indefinidas. Problema de valor inicial. Propriedades.
Técnicas de integração: Regra da potência e regra da substituição.

1) Introdução.

Vimos como a necessidade de calcular taxas de variação instantâneas levou os descobridores do cálculo a uma investigação sobre os coeficientes angulares de retas tangentes e, por fim, às derivadas — ao que chamamos de cálculo *diferencial*. Mas eles sabiam que as derivadas contavam só a metade da história. Além de um método de cálculo (um 'cálculo') para descrever como as funções estavam variando em um dado momento, eles também precisavam de um método para descrever como essas variações instantâneas poderiam se acumular ao longo de um intervalo para produzir a função. Ou seja, estudando como um comportamento *variou*, eles queriam conhecer o comportamento em si. Por exemplo, partindo da velocidade de um objeto em movimento, eles queriam ter condições de determinar sua posição em função do tempo. É por isso que eles também investigavam *áreas sob curvas*, uma pesquisa que acabou por levar ao segundo ramo principal do cálculo, chamado cálculo *integral*.

Como eles tinham o cálculo para determinar coeficientes angulares de retas tangentes e também para determinar áreas sob curvas, duas operações geométricas que pareciam não ter relação entre si, o desafio para Newton e Leibniz era demonstrar a ligação que eles sabiam intuitivamente existir. A descoberta dessa ligação (chamada de Teorema Fundamental do Cálculo) reuniu os cálculos diferencial e integral, tornando-os a ferramenta mais poderosa que os matemáticos já obtiveram para entender o universo.

2) Primitivas e Integrais indefinidas

O processo para determinar uma função $f(x)$ a partir de um de seus valores conhecidos e sua derivada $f'(x)$ tem dois passos. O primeiro é encontrar uma fórmula que dê todas as funções que poderiam ter f como derivada. Essas funções são chamadas *primitivas* de f, e a fórmula que fornece todas elas é chamada *integral indefinida* de f. O segundo passo é usar o valor conhecido para selecionar a primitiva particular desejada a partir daquelas na integral indefinida.

Determinando Primitivas: Integrais Indefinidas

Vamos começar com uma definição.

Definição Primitiva de uma Função

Uma função $F(x)$ é uma **primitiva** de uma função $f(x)$ se

$$F'(x) = f(x)$$

para qualquer x no domínio de f. O conjunto de todas as primitivas de f é a **integral indefinida** de f em relação a x, denotada por

$$\int f(x)\,dx.$$

$\int$ é o **símbolo de uma integral**. A função f é o **integrando** de uma integral e x é a **variável de integração.**

De acordo com o Corolário 2 do Teorema do Valor Médio (Seção 3.2),

Corolário 2 Funções com a Mesma Função Derivada em um Intervalo Diferem por uma Constante

Se $f'(x) = g'(x)$ em todo ponto de um intervalo I, então existe uma constante C tal que $f(x) = g(x) + C$ para qualquer x em I.

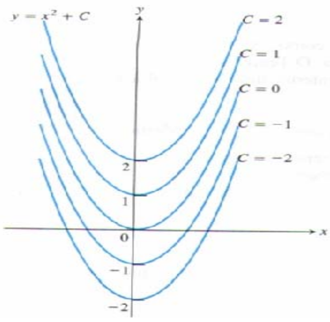


FIGURA 3.18 Do ponto de vista geométrico, o Corolário 2 do Teorema do Valor Médio diz que os gráficos das funções com derivadas idênticas em um intervalo podem diferir apenas por um deslocamento vertical. Os gráficos das funções com derivada $2x$ são as parábolas $y = x^2 + C$, apresentadas aqui para alguns valores escolhidos de C.

uma vez que encontramos uma primitiva F de uma função f, as outras primitivas diferem dela por uma constante. Indicamos isso em notação integral da seguinte maneira:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{1}$$

A constante C é a **constante de integração** ou **constante arbitrária**. A Equação 1 deve ser lida como "a integral indefinida de f em relação a x é $F(x) + C$". Quando encontramos $F(x) + C$, dizemos que conseguimos **integrar e calcular** a integral.

Exemplo 1 Encontrando uma Integral Indefinida

Calcule $\int e^{2x}\,dx$.

Solução

$$\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

uma primitiva de e^{2x}

a constante arbitrária

A fórmula $(1/2)e^{2x} + C$ gera todas as primitivas da função e^{2x}. As funções $(1/2)e^{2x} + 1$, $(1/2)e^{2x} - \pi$ e $(1/2)e^{2x} + \sqrt{2}$ são todas primitivas da função e^{2x}, e você pode verificar isso diferenciando.

EXEMPLO 2 Determinando uma primitiva específica

Determine uma primitiva de $f(x) = \operatorname{sen} x$ que satisfaça $F(0) = 3$.

SOLUÇÃO Como a derivada de $-\cos x$ é $\operatorname{sen} x$, a primitiva geral

$$F(x) = -\cos x + C$$

fornece todas as primitivas de $f(x)$. A condição $F(0) = 3$ determina um valor específico para C. Substituindo $x = 0$ em $F(x) = -\cos x + C$, temos

$$F(0) = -\cos 0 + C = -1 + C.$$

Como $F(0) = 3$, resolvendo em C, temos $C = 4$. Logo

$$F(x) = -\cos x + 4$$

é a primitiva que satisfaz $F(0) = 3$.

Muitas das integrais indefinidas necessárias ao trabalho científico são determinadas pela inversão de fórmulas de derivadas. Você verá o que queremos dizer olhando a Tabela 4.1, que enumera várias formas integrais-padrão lado a lado com as fórmulas das derivadas que as originaram.

Tabela 4.1 Fórmulas de primitivas, sendo k uma constante diferente de zero

	Função	Primitiva geral		Função	Primitiva geral
1.	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \quad n \neq -1$	8.	e^{kx}	$\frac{1}{k}e^{kx} + C$
2.	$\operatorname{sen} kx$	$-\frac{1}{k}\cos kx + C$	9.	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C, \quad x \neq 0$
3.	$\cos kx$	$\frac{1}{k}\operatorname{sen} kx + C$	10.	$\frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	$\frac{1}{k}\operatorname{sen}^{-1} kx + C$
4.	$\sec^2 kx$	$\frac{1}{k}\operatorname{tg} kx + C$	11.	$\frac{1}{1+k^2x^2}$	$\frac{1}{k}\operatorname{tg}^{-1} kx + C$
5.	$\operatorname{cosec}^2 kx$	$-\frac{1}{k}\operatorname{cotg} kx + C$	12.	$\frac{1}{x\sqrt{k^2x^2-1}}$	$\sec^{-1} kx + C, \quad kx > 1$
6.	$\sec kx \operatorname{tg} kx$	$\frac{1}{k}\sec kx + C$	13.	a^{kx}	$\left(\frac{1}{k\ln a}\right)a^{kx} + C, \quad a > 0, \ a \neq 1$
7.	$\operatorname{cosec} kx \operatorname{cotg} kx$	$-\frac{1}{k}\operatorname{cosec} kx + C$			

Exemplo 2b Integrais Selecionadas da Tabela 4.1

(a) $\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + C$ — Fórmula 1 com $n = 5$

(b) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-1/2}\,dx = 2x^{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C$ — Fórmula 1 com $n = -1/2$

(c) $\int \operatorname{sen} 2x\,dx = -\frac{\cos 2x}{2} + C$ — Fórmula 2 com $k = 2$

(d) $\int e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C$ — Fórmula 8 com $k = -3$

(e) $\int 2^x\,dx = \left(\frac{1}{\ln 2}\right)2^x + C$ — Fórmula 13 com $a = 2$

(f) $\int \cos\frac{x}{2}\,dx = \int \cos\left(\frac{1}{2}x\right)dx$

$$= \frac{\operatorname{sen}(1/2)x}{1/2} + C = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2} + C$$ Fórmula 3 com $k = 1/2$

Calcular uma integral indefinida às vezes pode ser difícil, mas depois de encontrá-la é relativamente fácil verificar sua validade: diferencie o lado direito. A derivada deve ser o integrando.

Exemplo 3 Verificando se uma Integral Indefinida Está Correta

Certa: $\int x\cos x\,dx = x\operatorname{sen} x + \cos x + C$

Razão: A derivada do lado direito é o integrando:

$$\frac{d}{dx}(x\operatorname{sen} x + \cos x + C) = x\cos x + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x + 0 = x\cos x.$$

Errada: $\int x\cos x\,dx = x\operatorname{sen} x + C$

Razão: A derivada do lado direito não é o integrando:

$$\frac{d}{dx}(x\operatorname{sen} x + C) = x\cos x + \operatorname{sen} x + 0 \neq x\cos x.$$

Problemas de Valor Inicial

O problema de determinar uma função y de x quando sabemos sua derivada e seu valor y_0 em um ponto particular x_0 é chamado **problema de valor inicial**. Resolvemos esse tipo de problema em dois passos, como está demonstrado no Exemplo 4.

Exemplo 4 Determinando uma Curva a Partir de Sua Função Coeficiente Angular e um Ponto

Determine a curva cujo coeficiente angular no ponto (x, y) é $3x^2$ sabendo que ela deve passar pelo ponto $(1, -1)$.

Solução Em linguagem matemática, pediu-se para resolver o problema do valor inicial, que consiste no seguinte.

A equação diferencial: $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$ — O coeficiente angular da curva é $3x^2$.

A condição inicial: $y(1) = -1$

1. Resolva a equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\int \frac{dy}{dx}\,dx = \int 3x^2\,dx$$

$$y + C_1 = x^3 + C_2$$

$$y = x^3 + C$$

Constantes de integração combinadas, dando a solução geral.

Esse resultado nos diz que y é igual a $x^3 + C$ para algum valor de C. Determinamos esse valor a partir da condição $y(1) = -1$.

2. Calcule C:

$$y = x^3 + C$$

$$-1 = (1)^3 + C \quad \text{Condição inicial } y(1) = -1$$

$$C = -2.$$

A curva que desejamos é $y = x^3 - 2$ (Figura 4.1).

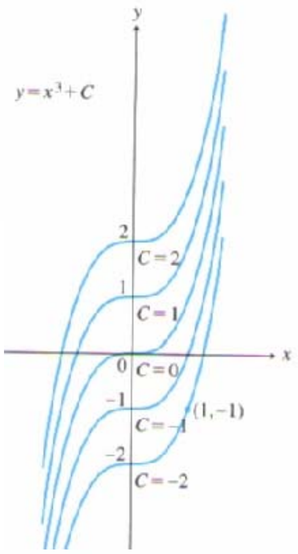


FIGURA 4.1 As curvas $y = x^3 + C$ ocupam o plano cartesiano sem se sobrepor. No Exemplo 4, identificamos a curva $y = x^3 - 2$ como aquela que passa pelo ponto dado $(1, -1)$.

A integral indefinida $F(x) + C$ da função $f(x)$ fornece a **solução geral** $y = F(x) + C$ da equação diferencial $dy/dx = f(x)$. A solução geral dá todas as soluções da equação (há infinitas, uma para cada valor de C). **Resolvemos** a equação diferencial determinando a solução geral. Então resolvemos o problema do valor inicial determinando a **solução particular** que satisfaz a condição inicial $y(x_0) = y_0$ (y tem o valor y_0 quando $x = x_0$).

Resolver o problema de valor inicial é importante na modelagem matemática, processo pelo qual cientistas e engenheiros usam a matemática para conhecer melhor o mundo real.

EXERCÍCIOS

Determinando Primitivas

Nos exercícios 1-5, determine uma primitiva para cada função. Faça mentalmente quantas você puder. Verifique suas respostas diferenciando.

1. (a) $6x$ (b) x^7 (c) $x^7 - 6x + 8$

2. (a) $-3x^{-4}$ (b) x^{-4} (c) $x^{-4} + 2x + 3$

3. (a) $-\dfrac{2}{x^3}$ (b) $\dfrac{1}{2x^3}$ (c) $x^3 - \dfrac{1}{x^3}$

4. (a) $\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ (b) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (c) $\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

5. (a) $\dfrac{2}{3}x^{-1/3}$ (b) $\dfrac{1}{3}x^{-2/3}$ (c) $-\dfrac{1}{3}x^{-4/3}$

Calculando Integrais

Calcule as integrais nos exercícios 9-14. Verifique diferenciando.

9. $\int (x + 1)\, dx$

10. $\int \left(3t^2 + \dfrac{t}{2}\right) dt$

11. $\int \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{5}{x^2 + 1}\right) dx$

12. $\int \left(\dfrac{1}{x^2} - x^2 - \dfrac{1}{3}\right) dx$

13. $\int \left(e^{-x} + 4^x\right) dx$

14. $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})\, dx$

3 Propriedades da integral indefinida

Assim como os limites e derivadas, as primitivas e integrais indefinidas também obedecem a regras algébricas. Nesta seção, apresentamos e aplicamos essas regras para determinar primitivas de várias funções.

Propriedades das Primitivas

De nosso estudo anterior sobre primitivas sabemos o seguinte:

1. Uma função é uma primitiva de um múltiplo constante kf de uma função f se e somente se ela for k vezes uma primitiva de f.

2. Em particular, uma função é uma primitiva de $-f$ se e somente se ela for o oposto de uma primitiva de f.

3. Uma função é uma primitiva de uma soma ou de uma diferença $f \pm g$ se e somente se ela for a soma ou a diferença de uma primitiva de f e de uma primitiva de g.

Quando expressamos essas observações na notação integral, temos as propriedades da aritmética para a integração indefinida (Tabela 4.2).

Tabela 4.2 Propriedades da integral indefinida

1. *Multiplicação por Constante:* $\int kf(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$
(Não funciona se k variar com x.)

2. *Integral da Função Oposta:* $\int -f(x)\, dx = -\int f(x)\, dx$
(Regra 1 com $k = -1$)

3. *Soma e Diferença:* $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

Exemplo 1 Reescrevendo a Constante de Integração

$$\int 5 \sec x \operatorname{tg} x \, dx = 5 \int \sec x \operatorname{tg} x \, dx \qquad \text{Tabela 4.2, Regra 1}$$
$$= 5(\sec x + C) \qquad \text{Tabela 4.1, Fórmula 6}$$
$$= 5 \sec x + 5C \qquad \text{Primeira forma}$$
$$= 5 \sec x + C' \qquad \text{Forma menor, onde } C' \text{ é } 5C$$
$$= 5 \sec x + C$$

Forma usual. Uma vez que 5 vezes uma constante arbitrária é uma constante arbitrária, renomeamos C'.

E quanto às três formas diferentes no Exemplo 1? Cada uma dá todas as primitivas de $f(x) = 5 \sec x \operatorname{tg} x$, portanto cada resposta está correta, mas a menos complicada das três, e a escolha usual, é a última.

$$\int 5 \sec x \operatorname{tg} x \, dx = 5 \sec x + C.$$

A Regra da Soma e da Diferença para integração nos permite integrar expressões termo a termo. Quando fazemos isso, combinamos as constantes individuais de integração em uma única constante arbitrária no final.

Exemplo 2 Integração Termo a Termo

Calcule

$$\int (x^2 - 2x + 5)\, dx.$$

Solução Se reconhecermos que $(x^3/3) - x^2 + 5x$ é uma primitiva de $x^2 - 2x + 5$, podemos calcular a integral como

$$\int (x^2 - 2x + 5)\, dx = \overbrace{\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x}^{\text{primitiva}} \underbrace{+ C}_{\text{constante arbitrária}}.$$

Se não reconhecermos a primitiva imediatamente, podemos gerá-la termo a termo usando a Regra da Soma e da Diferença:

$$\int (x^2 - 2x + 5)\, dx = \int x^2\, dx - \int 2x\, dx + \int 5\, dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + C_1 - x^2 + C_2 + 5x + C_3.$$

Essa fórmula é mais complicada do que deveria ser. Se combinarmos C_1, C_2 e C_3 em uma única constante $C = C_1 + C_2 + C_3$, a fórmula é simplificada para

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C$$

e *ainda* fornece todas as primitivas existentes. Por isso recomendamos que vá diretamente para a forma final, mesmo que você escolha integrar termo a termo. Escreva

$$\int (x^2 - 2x + 5)\, dx = \int x^2\, dx - \int 2x\, dx + \int 5\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C.$$

Determine a primitiva mais simples que você puder para cada parte e acrescente a constante de integração no final.

As Integrais de $\operatorname{sen}^2 x$ e de $\cos^2 x$

Às vezes podemos usar identidades trigonométricas para transformar integrais que não sabemos como calcular em integrais que sabemos calcular. As fórmulas das integrais de $\operatorname{sen}^2 x$ e de $\cos^2 x$ surgem freqüentemente em aplicações.

Exemplo 3 Integrando $\operatorname{sen}^2 x$ e $\cos^2 x$

(a) $$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x)\, dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + C = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

(b) $$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2}\, dx \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$ Como na parte (a), mas com uma mudança de sinal

4 Técnicas simples de integração

A Regra da Potência na Forma Integral

Quando u é uma função diferenciável de x e n é um número racional diferente de -1, a Regra da Cadeia nos diz que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) = u^n \frac{du}{dx}.$$

Essa mesma equação, de outro ponto de vista, diz que $u^{n+1}/(n+1)$ é uma das primitivas da função $u^n\,(du/dx)$. Portanto,

$$\int\left(u^n \frac{du}{dx}\right)dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C.$$

A integral no lado esquerdo dessa equação geralmente é escrita na forma 'diferencial' mais simples,

$$\int u^n\,du,$$

obtida tratando-se os dx como diferenciais que se cancelam. Temos então a seguinte regra:

Se u é uma função diferenciável qualquer, então

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1,\ n \text{ racional}). \tag{1}$$

Exemplo 4 Usando a Regra da Potência

$$\int \sqrt{1+y^2}\cdot 2y\,dy = \int u^{1/2}\,du$$ Faça $u = 1 + y^2$, $du = 2y\,dy$.

$$= \frac{u^{(1/2)+1}}{(1/2)+1} + C$$ Integre, usando a eq. (1) com $n = 1/2$.

$$= \frac{2}{3}u^{3/2} + C$$ Forma simplificada

$$= \frac{2}{3}(1+y^2)^{3/2} + C$$ Troque u por $1 + y^2$.

Exemplo 5 Ajustando o Integrando com uma Constante

$$\int \sqrt{4t-1}\,dt = \int u^{1/2} \cdot \frac{1}{4}\,du$$ Faça $u = 4t - 1$, $du = 4\,dt$, $(1/4)\,du = dt$.

$$= \frac{1}{4}\int u^{1/2}\,du$$ Com o 1/4 à frente, a integral está agora na forma-padrão.

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} + C$$ Integre, usando a eq. (1) com $n = 1/2$.

$$= \frac{1}{6}u^{3/2} + C$$ Forma simplificada

$$= \frac{1}{6}(4t-1)^{3/2} + C$$ Troque u por $4t - 1$.

Substituição: Usando a Regra da Cadeia Inversamente

As substituições nos exemplos 4 e 5 são casos particulares da regra geral a seguir.

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$ 1. Substituir $u = g(x)$, $du = g'(x)\,dx$.

$$= F(u) + C$$ 2. Calcular achando uma primitiva F de $f(u)$. (Qualquer uma servirá.)

$$= F(g(x)) + C$$ 3. Troque u por $g(x)$.

Esses três passos são os do método da substituição para a integração. O método funciona porque $F(g(x))$ será primitiva de $f(g(x)) \cdot g'(x)$ sempre que F for primitiva de f:

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x)) \cdot g'(x)$$ Regra da Cadeia

$$= f(g(x)) \cdot g'(x).$$ Porque $F' = f$

Exemplo 6 Usando a Substituição

$$\int \cos(7\theta + 5)\,d\theta = \int \cos u \cdot \frac{1}{7}\,du$$ Faça $u = 7\theta + 5$, $du = 7\,d\theta$, $(1/7)\,du = d\theta$.

$$= \frac{1}{7}\int \cos u\,du$$ Com o 1/7 à frente a integral está agora na forma-padrão.

$$= \frac{1}{7}\operatorname{sen} u + C$$ Integrar em relação a u.

$$= \frac{1}{7}\operatorname{sen}(7\theta + 5) + C$$ Troque por $7\theta + 5$.

Exemplo 7 Usando a Substituição

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x^3)\,dx = \int \operatorname{sen}(x^3)\cdot x^2\,dx$$

$$= \int \operatorname{sen} u \cdot \frac{1}{3}\,du$$ Faça $u = x^3$, $du = 3x^2 dx$, $(1/3)\,du = x^2 dx$.

$$= \frac{1}{3}\int \operatorname{sen} u\,du$$

$$= \frac{1}{3}(-\cos u) + C$$ Integre em relação a u.

$$= -\frac{1}{3}\cos(x^3) + C$$ Substitua u por x^3.

Exemplo 8 Usando Identidades e Substituição

Calcule

$$\int \frac{e^t\,dt}{\cos^2(e^t - 2)}.$$

Solução

$$\int \frac{e^t\,dt}{\cos^2(e^t-2)} = \int \frac{du}{\cos^2 u}$$ $u = e^t - 2$, $du = e^t dt$

$$= \int \sec^2 u\,du$$ $\frac{1}{\cos u} = \sec u$

$$= \operatorname{tg} u + C$$

$$= \operatorname{tg}(e^t - 2) + C$$ $\frac{d}{du}\operatorname{tg} u = \sec^2 u$

Resumindo:

O Método da Substituição para a Integração

Siga os passos a seguir para calcular a integral

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx$$

quando f e g' são funções contínuas:

Passo 1. Substitua $u = g(x)$ e $du = g'(x)\,dx$ para obter a integral

$$\int f(u)\,du.$$

Passo 2. Integre em relação a u.

Passo 3. Substitua u por $g(x)$ no resultado.

A Integral $\int (1/u)\, du$

A equação

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}, \qquad u > 0$$

conduz à fórmula da integral

$$\int \frac{1}{u}\, du = \ln u + C \tag{2}$$

quando u é uma função diferenciável positiva, mas o que ocorre se u for negativa? Se u for negativa, então $-u$ será positiva, portanto

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{u}\, du &= \int \frac{1}{(-u)}\, d(-u) \\ &= \ln(-u) + C. \qquad \text{Eq. (2) com } u \text{ trocado por } -u \qquad (3)\end{aligned}$$

Podemos combinar as equações (2) e (3) em uma única fórmula observando que em cada caso a expressão à direita é $\ln|u| + C$. Na equação (2), $\ln u = \ln|u|$ porque $u > 0$; na equação (3), $\ln(-u) = \ln|u|$ pois $u < 0$. Sempre que u for positiva ou negativa, a integral de $(1/u)\, du$ é $\ln|u| + C$.

$$\boxed{\int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + C. \qquad (4)}$$

Admite-se que fórmulas como as da equação (4), com uma única constante de integração simples, são verdadeiras somente nos domínios que são intervalos.

Exemplo 10 Usando a Equação 4

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{x^2-5}\, dx &= \int \frac{du}{u} && u = x^2-5,\ du = 2x\, dx \\ &= \ln|u| + C && \text{Eq. (4)} \\ &= \ln|x^2-5| + C && u = x^2-5\end{aligned}$$

As Integrais de tg x e de cotg x

A equação (4) nos diz por fim como integrar as funções tangente e cotangente. Para a tangente,

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen}\ x}{\cos\ x}\, dx = \int \frac{-du}{u} \qquad \begin{array}{l} u = \cos x, \\ du = -\operatorname{sen} x\, dx \end{array}$$

$$= -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C \qquad \text{Eq. (4)}$$

$$= -\ln|\cos x| + C = \ln \frac{1}{|\cos x|} + C \qquad \text{Regra da Reciprocidade}$$

$$= \ln|\sec x| + C.$$

Para a cotangente,

$$\int \operatorname{cotg} x\, dx = \int \frac{\cos x\, dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{du}{u} \qquad \begin{array}{l} u = \operatorname{sen} x, \\ du = \cos x\, dx \end{array}$$

$$= \ln|u| + C = \ln|\operatorname{sen} x| + C = -\ln|\operatorname{cosec} x| + C.$$

$$\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln|\cos u| + C = \ln|\sec u| + C$$

$$\int \operatorname{cotg} u\, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C = -\ln|\operatorname{cosec} x| + C$$

EXERCÍCIOS

Calculando Integrais

Calcule as integrais indefinidas nos exercícios 1– 7 usando as substituições dadas para reduzir as integrais à forma padrão.

1. $\int x \operatorname{sen}(2x^2)\, dx, \quad u = 2x^2$

2. $\int \left(1 - \cos \frac{t}{2}\right)^2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}\, dt, \quad u = 1 - \cos \frac{t}{2}$

3. $\int 28(7x-2)^{-5}\, dx, \quad u = 7x - 2$

4. $\int x^3(x^4 - 1)^2\, dx, \quad u = x^4 - 1$

5. $\int \frac{9r^2\, dr}{\sqrt{1 - r^3}}, \quad u = 1 - r^3$

6. $\int 12(y^4 + 4y^2 + 1)^2(y^3 + 2y)\, dy, \quad u = y^4 + 4y^2 + 1$

7. $\int \sqrt{x} \operatorname{sen}^2(x^{3/2} - 1)\, dx, \quad u = x^{3/2} - 1$

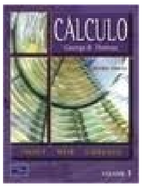
Problemas de Valor Inicial

Resolva os problemas de valor inicial nos exercícios 45–46.

45. $\frac{ds}{dt} = 12t(3t^2 - 1)^3, \quad s(1) = 3$

46. $\frac{dy}{dx} = 4x(x^2 + 8)^{-1/3}, \quad y(0) = 0$

Livro texto:



Thomas G. B., Finney R. L., Weir M. D., Giordano F. R., Cálculo, Vol. 1, Editora Pearson, Ed. 10 ou 11 – Addison Wesley, São Paulo.

Estudar os exercícios resolvidos sobre integrais nos endereços eletrônicos abaixo:
http://www.mtm.ufsc.br/~azeredo/calculos/Acalculo/x/listas/intsubst/intsubs.html
http://www.mtm.ufsc.br/~azeredo/calculos/Acalculo/x/listas/intpartes/intpart1.html
http://fisica.uems.br/arquivos/calc1not/integral_indefinida.pdf
http://www1.univap.br/~spilling