

Parte 2 - Derivadas (continuação)

Derivadas de funções trigonométricas. Regra da cadeia.

1) Derivadas de funções trigonométricas (ex. sen x, cos x)

Muitos dos fenômenos sobre os quais desejamos informações são periódicos (campos eletromagnéticos, ritmo cardíaco, marés, tempo). Em cálculo avançado há um teorema surpreendente e muito interessante que afirma que as funções periódicas, que provavelmente usaremos na modelagem matemática, podem ser expressas em função de seno e cosseno. Então, as derivadas das funções desempenham um papel fundamental na descrição de mudanças periódicas. Esta seção mostra como derivar as seis funções trigonométricas básicas.

Derivada da Função Seno

Para calcular a derivada de $y = \text{sen } x$, combinamos os limites do Exemplo 10(a) e o Teorema 6 da Seção 1.2 com a identidade da soma do ângulo:

$$\text{sen}(x + h) = \text{sen } x \cos h + \cos x \text{sen } h. \quad (1)$$

Temos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x + h) - \text{sen } x}{h} && \text{Definição de derivada} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\text{sen } x \cos h + \cos x \text{sen } h) - \text{sen } x}{h} && \text{equação (1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x (\cos h - 1) + \cos x \text{sen } h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\text{sen } x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos x \cdot \frac{\text{sen } h}{h} \right) \\ &= \text{sen } x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h}{h} \\ &= \text{sen } x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 && \text{Exemplo 10(a) e Teorema 6 da Seção 1.2} \\ &= \cos x. \end{aligned}$$

A derivada da função seno é a função cosseno.

$$\frac{d}{dx}(\text{sen } x) = \cos x$$

Exemplo 1 Derivadas Envolvendo Seno

(a) $y = x^2 - \text{sen } x$:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2x - \frac{d}{dx}(\text{sen } x) && \text{Regra da Diferença} \\ &= 2x - \cos x.\end{aligned}$$

(b) $y = \frac{\text{sen } x}{x}$:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{x \cdot \frac{d}{dx}(\text{sen } x) - \text{sen } x \cdot 1}{x^2} && \text{Regra do Quociente} \\ &= \frac{x \cos x - \text{sen } x}{x^2}.\end{aligned}$$

Derivada da Função Cosseno

Com a ajuda da fórmula da soma do ângulo,

$$\cos(x + h) = \cos x \cos h - \text{sen } x \text{sen } h, \quad (2)$$

temos

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x + h) - \cos x}{h} \quad \text{Definição de derivada}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos x \cos h - \text{sen } x \text{sen } h) - \cos x}{h} \quad \text{Equação (2)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x (\cos h - 1) - \text{sen } x \text{sen } h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \text{sen } x \cdot \frac{\text{sen } h}{h}$$

$$= \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \text{sen } x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h}{h}$$

$$= \cos x \cdot 0 - \text{sen } x \cdot 1$$

$$= -\text{sen } x.$$

Exemplo 10(a) e
Teorema 6 da Seção 1.2

A derivada da função cosseno é a oposta da função seno.

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\text{sen } x$$

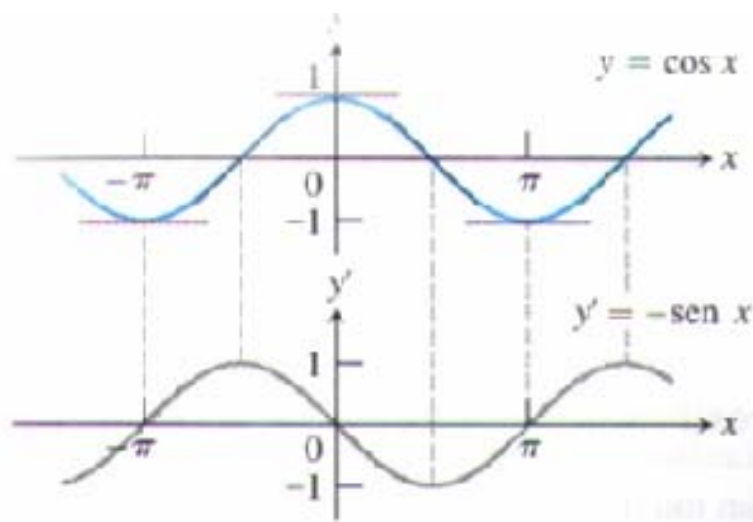


FIGURA 2.25 Curva $y' = -\text{sen } x$ e o gráfico dos coeficientes angulares das tangentes à curva $y = \text{cos } x$.

Exemplo 2 Revendo as Regras da Derivada

(a) $y = \text{sen } x \cos x$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \text{sen } x \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(\text{sen } x) \\ &= \text{sen } x (-\text{sen } x) + \cos x (\cos x) \\ &= \cos^2 x - \text{sen}^2 x. \end{aligned}$$

Regra do Produto

(b) $y = \frac{\cos x}{1 - \text{sen } x}$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(1 - \text{sen } x) \frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{d}{dx}(1 - \text{sen } x)}{(1 - \text{sen } x)^2} \\ &= \frac{(1 - \text{sen } x)(-\text{sen } x) - \cos x (0 - \cos x)}{(1 - \text{sen } x)^2} \\ &= \frac{1 - \text{sen } x}{(1 - \text{sen } x)^2} \\ &= \frac{1}{1 - \text{sen } x}. \end{aligned}$$

Regra do Quociente

$$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$$

Movimento Harmônico Simples

O movimento de um corpo oscilando livremente para cima e para baixo na ponta de uma mola ou corda elástica é um exemplo de *movimento harmônico simples*. O próximo exemplo descreve um caso em que não há forças opostas como atrito ou empuxo para retardar o movimento.

Exemplo 3 Movimento em uma Mola

Um corpo suspenso em uma mola (Figura 2.26) é deslocado em cinco unidades da posição de repouso e solto, no instante $t = 0$, para oscilar para cima e para baixo. Sua posição em qualquer instante t é

$$s = 5 \cos t.$$

Quais são sua velocidade e aceleração no instante t ?

Solução Temos

Posição: $s = 5 \cos t$

Velocidade: $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(5 \cos t) = -5 \sin t$

Aceleração: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-5 \sin t) = -5 \cos t.$

Veja o que podemos aprender com essas equações:

1. Com o passar do tempo, o peso se desloca para cima e para baixo entre $s = -5$ e $s = 5$ no eixo s . A amplitude do movimento é 5. O período do movimento é 2π .
2. A velocidade $v = -5 \sin t$ atinge sua maior magnitude, 5, quando $\cos t = 0$, como mostram os gráficos da Figura 2.27. Portanto, a velocidade do peso, $|v| = 5 |\sin t|$, é máxima quando $\cos t = 0$, ou seja, quando $s = 0$ (posição de repouso). A velocidade do peso é zero quando $\sin t = 0$. Isso ocorre quando $s = 5 \cos t = \pm 5$, nas extremidades do intervalo do movimento.
3. O valor da aceleração é sempre o oposto do valor da posição. Quando o peso está acima da posição de repouso, a gravidade o puxa para baixo; quando o peso está abaixo, a mola o puxa para cima.
4. A aceleração, $a = -5 \cos t$, é zero somente na posição de repouso, onde $\cos t = 0$ e a força da gravidade anula a força da mola. Quando o peso está em qualquer outro lugar, as duas forças são desiguais e a aceleração é diferente de zero. A aceleração é máxima em magnitude nos pontos mais distantes da posição de repouso, onde $\cos t = \pm 1$.

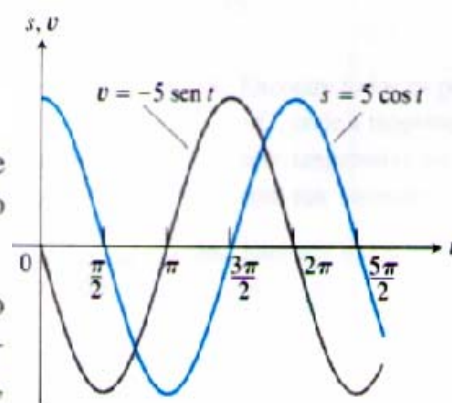
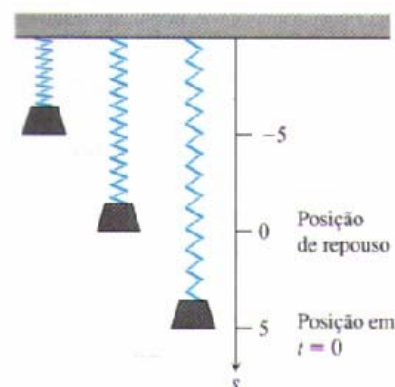


FIGURA 2.27 Gráficos de posição e velocidade do corpo

Derivadas de Outras Funções Trigonométricas Básicas

Como $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{cos} x$ são funções deriváveis de x , as funções relacionadas

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\operatorname{sec} x = \frac{1}{\operatorname{cos} x}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

são deriváveis para qualquer valor de x nos quais elas são definidas. Suas derivadas, calculadas pela Regra do Quociente, são dadas pelas fórmulas a seguir:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sec} x) = \sec x \operatorname{tg} x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cotg} x) = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$$

Exemplo 5 Derivadas da Função Tangente

Encontre $d(\operatorname{tg} x)/dx$.

Solução

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}\right) = \frac{\operatorname{cos} x \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}(\operatorname{cos} x)}{\operatorname{cos}^2 x} \quad \begin{array}{l} \text{Regra do} \\ \text{Quociente} \end{array} \\ &= \frac{\operatorname{cos} x \operatorname{cos} x - \operatorname{sen} x (-\operatorname{sen} x)}{\operatorname{cos}^2 x} \\ &= \frac{\operatorname{cos}^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{cos}^2 x} \\ &= \frac{1}{\operatorname{cos}^2 x} = \sec^2 x \end{aligned}$$

Exemplo 6 Segunda Derivada de uma Função Trigonométrica

Determine y'' se $y = \sec x$.

Solução

$$y = \sec x$$

$$y' = \sec x \operatorname{tg} x$$

Derivada da secante (ver regra)

$$y'' = \frac{d}{dx} (\sec x \operatorname{tg} x)$$

$$= \sec x \frac{d}{dx} (\operatorname{tg} x) + \operatorname{tg} x \frac{d}{dx} (\sec x)$$

Regra do Produto

$$= \sec x (\sec^2 x) + \operatorname{tg} x (\sec x \operatorname{tg} x)$$

$$= \sec^3 x + \sec x \operatorname{tg}^2 x$$

Exercício 1

Determine a derivada das funções abaixo:

1. $y = -10x + 3 \cos x$

2. $y = \frac{3}{x} + 5 \operatorname{sen} x$

3. $y = \operatorname{cosec} x - 4\sqrt{x} + 7$

4. $y = x^2 \operatorname{cotg} x - \frac{1}{x^2}$

5. $y = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$

6. $y = \frac{\cos x}{x} + \frac{x}{\cos x}$

2) A regra da cadeia

Como veremos nas aulas seguintes várias aplicações do cálculo na engenharia envolvem a busca de uma função com alguma derivada. Às vezes identificamos este tipo de função imediatamente. Por exemplo, sabemos que $\cos x$ é a derivada de $\operatorname{sen} x$ ou que $2x$ é a derivada de x^2 e que a soma $\cos x + 2x$ é a derivada de $\operatorname{sen} x + x^2$. Mas e se utilizarmos o *produto* de duas derivadas em vez da soma? Sabemos que o resultado não vem do produto das funções derivadas porque a derivada de seus produtos não é o produto de suas derivadas.

Então de onde vem o produto de derivadas? A resposta está em uma regra para derivação de funções compostas, chamada Regra da Cadeia. Esta seção descreverá essa regra, mostrando como usá-la.

Derivada de uma Função Composta

Começaremos com exemplos.

Exemplo 1 Relacionando Derivadas

A função $y = 6x - 10 = 2(3x - 5)$ é a função composta de $y = 2u$ e $u = 3x - 5$. Como as derivadas dessas funções se relacionam?

Solução Temos

$$\frac{dy}{dx} = 6, \quad \frac{dy}{du} = 2 \quad \text{e} \quad \frac{du}{dx} = 3.$$

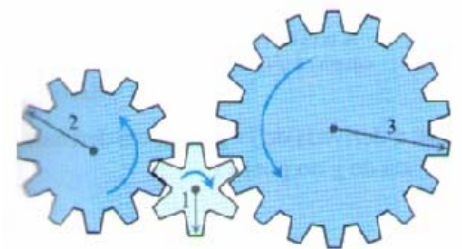
Uma vez que $6 = 2 \cdot 3$, observamos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Seria coincidência que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}?$$

Se pensarmos em derivada como taxa de variação, a intuição nos leva a ver que essa relação é razoável. Se $y = f(u)$ muda duas vezes mais rápido que u e $u = g(x)$ muda três vezes mais rápido que x , esperamos que y mude seis vezes mais rápido que x . Esse efeito é bem parecido com engrenagens múltiplas de trem (Figura 2.28).



C: y gira B: u gira A: x gira

FIGURA 2.28 Quando a engrenagem A faz com que x gire, a B faz u girar e a C faz com que y gire. Comparando circunferências ou contando os dentes, notamos que $y = u/2$ e $u = 3x$, então $y = 3x/2$. Assim, $dy/du = 1/2$, $du/dx = 3$ e $dy/dx = 3/2 = (dy/du)(du/dx)$.

Exemplo 2 Relacionando Derivadas

A função

$$y = 9x^4 + 6x^2 + 1 = (3x^2 + 1)^2$$

é a função composta de $y = u^2$ e $u = 3x^2 + 1$. Calculando as derivadas, observamos que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} &= 2u \cdot 6x \\ &= 2(3x^2 + 1) \cdot 6x \quad u = 3x^2 + 1 \\ &= 36x^3 + 12x \end{aligned}$$

e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(9x^4 + 6x^2 + 1) = 36x^3 + 12x.$$

Mais uma vez,

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

A derivada de uma função composta $f(g(x))$ em x é a derivada de f em $g(x)$ multiplicada pela derivada de g em x . Essa observação é conhecida como Regra da Cadeia (Figura 2.29).

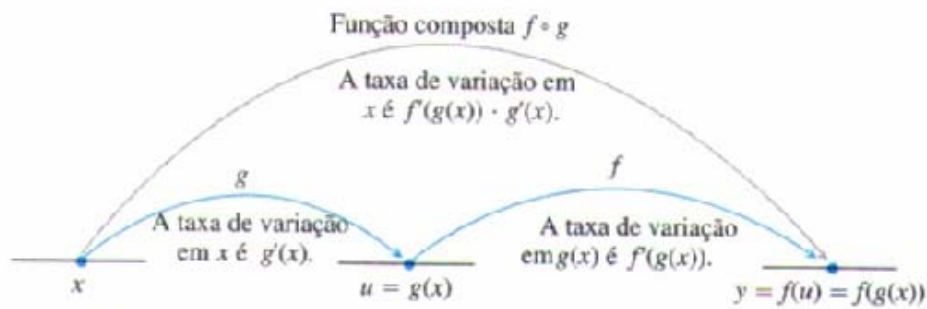


FIGURA 2.29 Taxas de variação múltiplas: a derivada de $f \circ g$ em x é a derivada de f no ponto $g(x)$ multiplicada pela derivada de g no ponto x .

Teorema 3 A Regra da Cadeia

Se $f(u)$ é derivável no ponto $u = g(x)$ e $g(x)$ é derivável em x , então a função composta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ é derivável em x e

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x). \quad (1)$$

Na notação de Leibniz, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \quad (2)$$

onde dy/du é calculada em $u = g(x)$.

Prova intuitiva da regra da cadeia pode ser visto no livro texto pg 181 (10Ed.) ou 189 (11Ed.) !

Exemplo 3 Aplicando a Regra da Cadeia

Um objeto se desloca ao longo do eixo x de modo que em qualquer instante $t \geq 0$ sua posição seja dada pela equação $x(t) = \cos(t^2 + 1)$. Determine a velocidade do objeto em função de t .

Solução Sabemos que a velocidade é dx/dt . Neste exemplo, x é uma função composta: $x = \cos(u)$ e $u = t^2 + 1$. Temos

$$\frac{dx}{du} = -\text{sen}(u) \quad x = \cos(u)$$

$$\frac{du}{dt} = 2t, \quad u = t^2 + 1$$

Pela Regra da Cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dt} \\ &= -\text{sen}(u) \cdot 2t \\ &= -\text{sen}(t^2 + 1) \cdot 2t \\ &= -2t \text{sen}(t^2 + 1). \end{aligned}$$

Regra do Externo-Interno

Às vezes, é mais fácil notar a Regra da Cadeia da seguinte maneira: se $y = f(g(x))$, então

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x). \quad (3)$$

Traduzindo em palavras, derive a função 'externa' f , calcule-a na função 'interna' $g(x)$ isolada, multiplicando-a depois pela derivada da 'função interna'.

Exemplo 4 Derivando de Fora para Dentro

Derive $\sin(x^2 + x)$ em relação a x .

Solução

$$\frac{d}{dx} \underbrace{\sin(x^2 + x)}_{\text{dentro}} = \underbrace{\cos(x^2 + x)}_{\text{dentro como está}} \cdot \underbrace{(2x + 1)}_{\text{derivada do de dentro}}$$

Exemplo 5 A 'Cadeia' de Três Elos

Encontre a derivada de $g(t) = \text{tg}(5 - \sin 2t)$.

Solução Veja que nesse caso a tangente é uma função de $5 - \sin 2t$, enquanto o seno é uma função de $2t$, que é função de t . Portanto, pela Regra da Cadeia,

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{d}{dt} (\text{tg}(5 - \sin 2t)) \\ &= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot \frac{d}{dt} (5 - \sin 2t) && \text{Derivada de } \text{tg } u \\ & && \text{com } u = 5 - \sin 2t. \\ &= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot (0 - \cos 2t) \cdot \frac{d}{dt} (2t) && \text{Derivada de } 5 - \sin u \\ & && \text{com } u = 2t. \\ &= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot (-\cos 2t) \cdot 2 \\ &= -2(\cos 2t) \sec^2(5 - \sin 2t). \end{aligned}$$

Exemplo:

Derretendo Cubos de Gelo

O Estado da Califórnia tem períodos de muita seca e sempre se está buscando novas fontes de água. Uma das propostas é rebocar icebergs das águas polares para locais próximos das praias do sul da Califórnia, onde o derretimento do gelo geraria água doce. Para uma primeira análise dessa proposta, devemos imaginar o iceberg como um grande cubo (ou outra forma sólida regular, como um paralelepípedo ou uma pirâmide).

Exemplo 10 O Derretimento de um Cubo de Gelo

Quanto tempo um cubo de gelo leva para derreter?

Solução Começaremos com um modelo matemático. Consideraremos que o cubo mantenha a forma cúbica enquanto derrete. Se chamarmos o comprimento da aresta de s , seu volume será $V = s^3$ e a área da superfície, $6s^2$. Consideraremos que V e s são funções deriváveis do tempo t e que o volume do cubo diminui com taxa proporcional à sua área da superfície. A última suposição parece razoável se lembrarmos que o derretimento ocorre na superfície: mudando-se a área da superfície muda-se a quantidade de gelo exposta ao derretimento. Em termos matemáticos,

$$\frac{dV}{dt} = -k(6s^2), \quad k > 0.$$

O sinal negativo indica que o volume está diminuindo. Consideraremos que o fator de proporcionalidade k é constante. Provavelmente depende de vários fatores, como por exemplo temperatura e umidade relativa do ar, presença ou ausência de luz solar etc.

Por fim, precisamos de pelo menos mais uma informação: quanto tempo leva para uma porcentagem específica do gelo derreter? Não temos nada para nos orientar, a menos que façamos algumas observações, mas podemos considerar um conjunto específico de condições nas quais o cubo perde 1/4 de seu volume durante a primeira hora. (Você pode usar letras no lugar de números específicos, digamos $n\%$ em r horas. Então, sua resposta será em termos de n e r .) Agora, matematicamente temos o problema a seguir.

Dados: $V = s^3$ e $\frac{dV}{dt} = -k(6s^2)$

$$V = V_0 \quad \text{quando} \quad t = 0$$

$$V = (3/4)V_0 \quad \text{quando} \quad t = 1 \text{ h.}$$

Encontre: O valor de t quando $V = 0$.

Aplicamos a Regra da Cadeia para derivar $V = s^3$ em relação a t :

$$\frac{dV}{dt} = 3s^2 \frac{ds}{dt}.$$

Igualamos essa derivada à taxa dada, $-k(6s^2)$, para obter

$$3s^2 \frac{ds}{dt} = -6ks^2$$

$$\frac{ds}{dt} = -2k.$$

O tamanho da aresta está *diminuindo* a uma taxa constante de $2k$ unidades por hora. Logo, se o comprimento inicial da aresta do cubo é s_0 , depois de uma hora seu comprimento será $s_1 = s_0 - 2k$. Essa equação afirma que

$$2k = s_0 - s_1.$$

O tempo de derretimento é o valor de t que faz com que $2kt = s_0$. Conseqüentemente,

$$t_{\text{derret}} = \frac{s_0}{2k} = \frac{s_0}{s_0 - s_1} = \frac{1}{1 - (s_1/s_0)},$$

mas

$$\frac{s_1}{s_0} = \frac{\left(\frac{3}{4} V_0\right)^{1/3}}{(V_0)^{1/3}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{1/3} \approx 0,91.$$

Portanto,

$$t_{\text{derret}} = \frac{1}{1 - 0,91} \approx 11 \text{ h.}$$

Se 1/4 do cubo de gelo derrete em 1 h, o resto leva aproximadamente mais 10 h para derreter.

É claro que ainda há perguntas a responder como: quanto gelo se perderá no caminho? E quanto tempo levará para transformar o gelo em água utilizável? Se estivermos realmente interessados em acompanhar o problema até o fim, o próximo passo será testar o modelo fazendo experimentos e depois aperfeiçoá-lo com base no que aprendemos.

Exercícios:

Nos exercícios 1–6, dados $y = f(u)$ e $u = g(x)$, determine $dy/dx = f'(g(x))g'(x)$.

1. $y = 6u - 9$, $u = (1/2)x^4$
2. $y = 2u^3$, $u = 8x - 1$
3. $y = \text{sen } u$, $u = 3x + 1$
4. $y = \text{cos } u$, $u = \text{sen } x$
5. $y = \text{tg } u$, $u = 10x - 5$
6. $y = -\text{sec } u$, $u = x^2 + 7x$

Potências Racionais de Funções Deriváveis

Sabemos que a regra

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

é válida quando n é um inteiro. Com a derivação implícita, podemos mostrar que ela é válida quando n é qualquer número racional.

Teorema 4 Regra de Derivação para Potências Racionais

Se n é um número racional, então x^n é derivável em qualquer ponto interior do domínio de x^{n-1} e

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}. \quad (1)$$

A prova do teorema a 4 pode ser visto no livro texto na pg. 194 (10Ed) ou pág. 207 (11Ed)

Exemplo 5 Usando a Regra de Derivação para Potências Racionais

$$(a) \frac{d}{dx} (\sqrt{x}) = \frac{d}{dx} (x^{1/2}) = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Observe que \sqrt{x} é definida em $x = 0$, mas $1/(2\sqrt{x})$ não.

$$(b) \frac{d}{dx} (x^{2/3}) = \frac{2}{3} (x^{-1/3}) = \frac{2}{3x^{1/3}}$$

A função original é definida para todos os números reais, mas a derivada é indefinida em $x = 0$. Seu gráfico tem um ponto cuspidal em $x = 0$ (Figura 2.41).

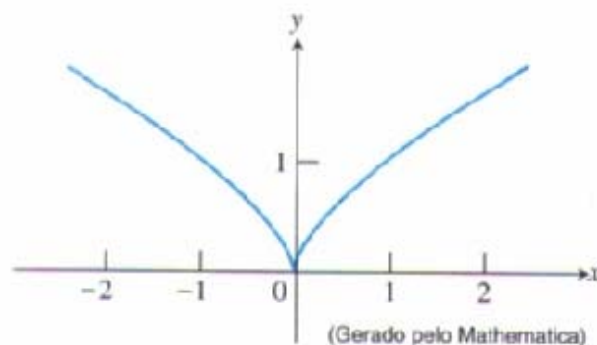


FIGURA 2.41 O gráfico de $y = x^{2/3}$ tem um ponto cuspidal em $x = 0$ (Exemplo 5).

Exemplo 6 Usando as Regras da Potência Racional e da Cadeia

função definida em $[-1, 1]$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \frac{d}{dx} (1-x^2)^{1/4} &= \frac{1}{4} (1-x^2)^{-3/4} (-2x) && \text{equação (2) com } u = 1-x^2 \text{ e } n = 1/4 \\ &= \frac{-x}{2(1-x^2)^{3/4}} \end{aligned}$$

derivada definida somente em $(-1, 1)$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \frac{d}{dx} (\cos x)^{-1/5} &= -\frac{1}{5} (\cos x)^{-6/5} \frac{d}{dx} (\cos x) \\ &= -\frac{1}{5} (\cos x)^{-6/5} (-\sin x) \\ &= \frac{1}{5} (\sin x)(\cos x)^{-6/5} \end{aligned}$$

Exercícios Propostos:

1 Determine dy/dx nos exercícios

1. $y = x^{9/4}$

2. $y = \sqrt[3]{2x}$

3. $y = 7\sqrt{x+6}$

4. $y = (1-6x)^{2/3}$

5. $y = x(x^2+1)^{1/2}$

6. $y = x(x^2+1)^{-1/2}$

2 Determine a primeira derivada das funções dos exercícios

7. $s = \sqrt[7]{t^2}$

8. $r = \sqrt[4]{\theta^{-3}}$

9. $y = \sin((2t+5)^{-2/3})$

10. $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x}}$

11. $g(x) = 2(2x^{-1/2}+1)^{-1/3}$

12. $h(\theta) = \sqrt[3]{1+\cos(2\theta)}$

3 Use a derivação implícita para determinar dy/dx nos exercícios

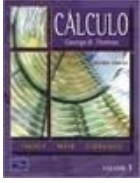
13. $x^2y + xy^2 = 6$

14. $2xy + y^2 = x + y$

15. $x^3 - xy + y^3 = 1$

16. $x^2(x-y)^2 = x^2 - y^2$

Livro texto:



Thomas G. B., Finney R. L., Weir M. D., Giordano F. R., Cálculo, Vol. 1, Editora Pearson, Ed. 10 ou 11 – Addison Wesley, São Paulo.

Links sobre regra da cadeia na Internet:

http://pt.wikipedia.org/wiki/Regra_da_cadeia

<http://www.mat.ufmg.br/~tcunha/cadeia.pdf>

Estudar os exercícios resolvidos sobre derivadas nos endereço eletrônicos abaixo:

<http://www.mtm.ufsc.br/~azeredo/calculos/Acalculo/index.html>

http://fisica.uems.br/arquivos/calc1not/derivada_complemento.pdf

<http://www1.univap.br/~spilling>