Cálculo Diferencial e Integral I

Faculdade de Engenharia, Arquiteturas e Urbanismo – FEAU

Prof. Dr. Sergio Pilling

UNIVERSIDADE DO VALE DO PARAÍBA
São José dos Campos - SP

Parte 2 - Derivadas.
Derivada como função, exemplos e algumas regras de dirivação

1) Introdução

No final da aula anterior definimos o coeficiente angular de uma curva y = f(x) no ponto onde $x = x_o$ ou em outras palavras a taxa de variação instantânea como:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Chamamos esse limite, quando ele existia, de derivada de f em x_0. Agora estudaremos a derivada como uma *função* derivada de f, considerando o limite em cada ponto do domínio de f.

Definição de Derivada

Definição Função Derivada

A **derivada** de uma função $f(x)$ em relação à variável x é a função f' cujo valor em x é

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

desde que o limite exista.

O domínio de f' é o conjunto de pontos no domínio de f para o qual o limite existe. Ele pode ser o mesmo domínio de f ou menor. Se f' existe para um determinado valor de x, dizemos que f é **derivável** em x. Se f' existe em todo ponto do domínio de f, chamamos f de **derivável**.

Notação

Há vários modos de representar a derivada de uma função $y = f(x)$. Além de $f'(x)$, as notações mais comuns são:

y'	y linha	Apropriada e breve, mas não fornece a variável independente.
$\dfrac{dy}{dx}$	dy dx	Fornece as variáveis e usa d para a derivada.

$\dfrac{df}{dx}$	$df\,dx$	Dá ênfase ao nome da função.
$\dfrac{d}{dx}f(x)$	$d\,dx$ de $f(x)$	Dá ênfase à idéia de que derivar é uma operação realizada em f (Figura 2.3).

Também lemos dy/dx como "a derivada de y em relação a x" e df/dx e (d/dx) $f(x)$ como "a derivada de f em relação a x".

O valor

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

da derivada de $y = f(x)$ em relação a x em $x = a$ também pode ser representado como

$$y'|_{x=a} \quad \text{ou} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \qquad \text{ou} \qquad \left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=a}.$$

O símbolo $|_{x=a}$, chamado **símbolo de avaliação**, significa calcular a expressão à esquerda em $x = a$.

O processo para calcular uma derivada é chamado **derivação**. O Exemplo 1 ilustra o processo para a função $y = \sqrt{x}$. Agora mostraremos como derivar funções sem ter de aplicar a definição todas as vezes.

Calculando $f'(x)$ a partir da Definição de Derivada

Passo 1. Escreva expressões para $f(x)$ e $f(x+h)$.

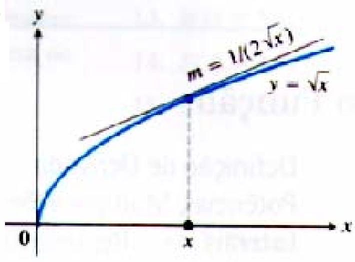
Passo 2. Desenvolva e simplifique o quociente de diferença $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Passo 3. Usando o quociente simplificado, encontre $f'(x)$ calculando o limite

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Exemplo 1 Aplicando a Definição

(a) Encontre a derivada de $y = \sqrt{x}$ para $x > 0$.



(a)

Solução

(a)

Passo 1: $f(x) = \sqrt{x}$ e $f(x+h) = \sqrt{x+h}$

Passo 2: $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \qquad \text{Multiplique por } \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

Passo 3: $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

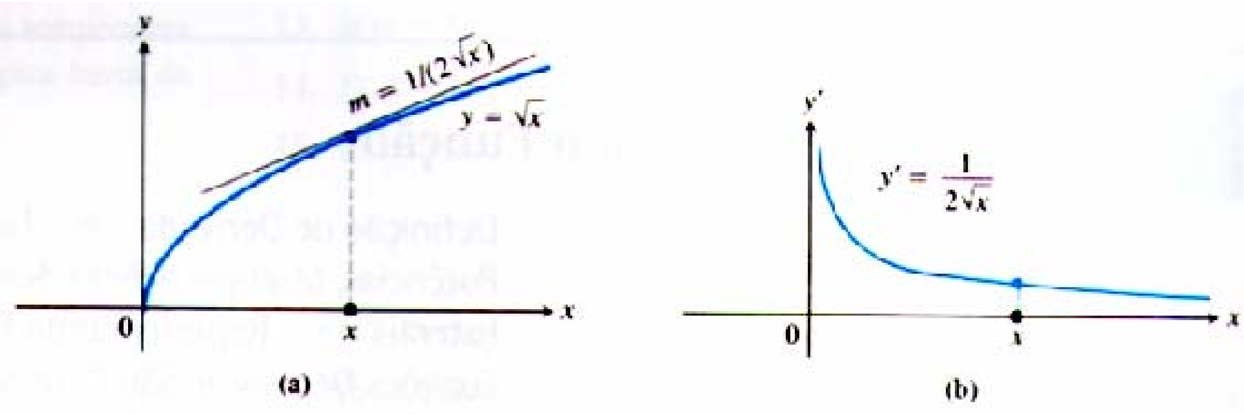
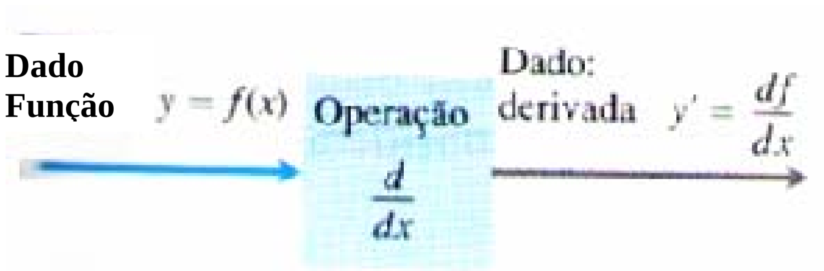


FIGURA 2.1 Os gráficos de (a) $y = \sqrt{x}$ e (b) $y' = 1/(2\sqrt{x})$, $x > 0$. A função é definida em $x = 0$, mas sua derivada não (Exemplo 1).

Observação a derivada é uma operação que transforma uma função numa outra função.



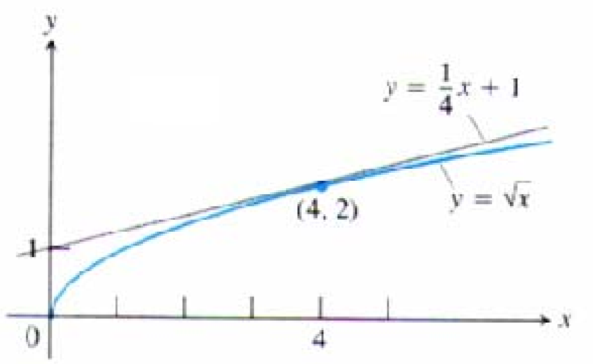
Continuando o exercício anterior, vamos agora encontrar a reta tangente a curva $y = \sqrt{x}$ no ponto x=4. Sabemos que $y(4) = \sqrt{4} = 2$. Logo o ponto em questão é o par (4, 2). Já sabemos que o coeficiente angular da reta tangente é f´(4) = ¼ . Como a equação que descreve uma reta qualquer é uma equação do tipo $y = a + b\,x$ basta agora aplicar essa equação no ponto (4,2) e utilizar o coeficiente anglar b = ¼.

$$2 = a + \tfrac{1}{4}\, 4 = a + 1$$

então.

$$a = 2 - 1 = 1$$

Portanto a equação da reta tangente no ponto (4, 2) sera y= 1 + ¼ x



2 Regras da derivadas

Regra 1 Derivada de uma Função Constante

Se f tem o valor constante $f(x) = c$, então

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0.$$

Regra 2 Regra de Derivação para Potências Inteiras Positivas

Se n for um positivo inteiro, então

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}.$$

Regra 3 Regra da Multiplicação por Constante

Se u é uma função derivável de x e c é uma constante, então

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}.$$

Regra 4 Regra da Derivada da Soma

Se u e v são funções deriváveis de x, então a soma das duas $u + v$ é derivável em qualquer ponto onde ambas são deriváveis. Nesses pontos,

$$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

Calculando $f'(x)$ a partir da Definição de Derivada

Passo 1. Escreva expressões para $f(x)$ e $f(x + h)$.

Passo 2. Desenvolva e simplifique o quociente de diferença

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Passo 3. Usando o quociente simplificado, encontre $f'(x)$ calculando o limite

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Exemplo 2 Usando a Regra 1

Se f tem o valor constante $f(x) = 8$, então

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(8) = 0.$$

De maneira similar,

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}\left(\sqrt{3}\right) = 0.$$

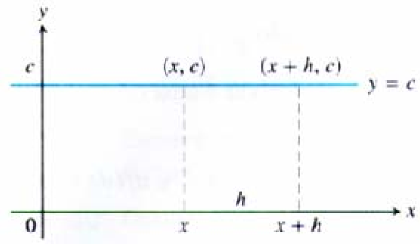


FIGURA 2.4 A regra $(d/dx)(c) = 0$ é um outro modo de dizer que os valores de funções constantes nunca mudam e que o coeficiente angular de uma reta horizontal é zero em qualquer ponto.

Prova da Regra 1 Aplicamos a definição de derivada a $f(x) = c$, a função cujos valores são sempre a constante c (Figura 2.4). Para qualquer valor de x, encontramos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Exemplo 3 Usando a Regra 3

(a) $\frac{d}{dx}(3x^2) = 3 \cdot 2x = 6x$

Interpretação: multiplicando-se cada ordenada por 3 para obter outra escala no gráfico de $y = x^2$, multiplica-se o coeficiente angular em cada ponto por 3 (Figura 2.5).

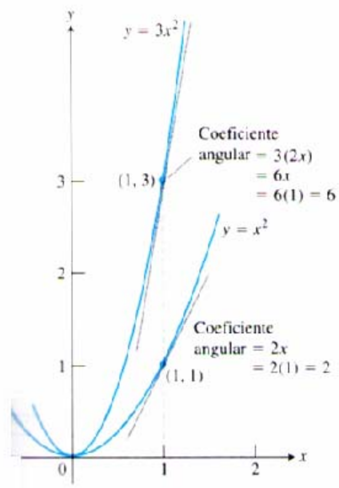


FIGURA 2.5 Os gráficos de $y = x^2$ e $y = 3x^2$. Triplicando-se a ordenada, triplica-se o coeficiente angular

Exemplo 4 (abrir as contas)

Mostrar utilizando o conceito de limite

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

as seguintes derivadas das funções abaixo:

a) $y(x) = 5x^2$ → $y'(x) = dy/dx = 10\,x$
b) $y(x) = -23\,x^2$ → $y'(x) = dy/dx = -46\,x$
c) $y(x) = 55 - 3\,x$ → $y'(x) = dy/dx = -3$

Exemplo 6 Derivada de um Polinômio

$$y = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1$$

Todos os polinômios são deriváveis.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^2\right) - \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(1)$$
$$= 3x^2 + \frac{4}{3}\cdot 2x - 5 + 0$$
$$= 3x^2 + \frac{8}{3}x - 5$$

Exemplo 8 $y = |x|$ Não É Derivável na Origem

Mostre que a função $y = |x|$ é derivável em $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$, mas não tem derivada em $x = 0$.

Solução À direita da origem,

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(1\cdot x) = 1. \qquad \frac{d}{dx}(mx+b) = m$$

À esquerda,

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}(-x) = \frac{d}{dx}(-1\cdot x) = -1$$

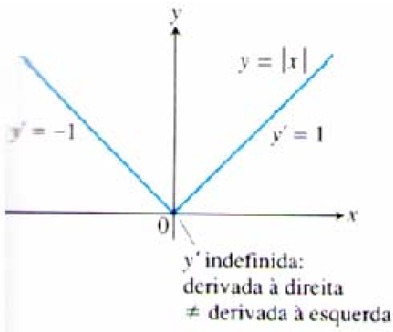


FIGURA 2.8 A função $y = |x|$ não é derivável na origem onde o gráfico tem um bico.

(Figura 2.8). É possível que não haja derivada na origem porque lá as derivadas laterais são diferentes:

$$\text{Derivada de } |x| \text{ à direita em zero} = \lim_{h\to 0^+}\frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h} \qquad |h| = h \text{ quando } h > 0.$$
$$= \lim_{h\to 0^+} 1 = 1$$

$$\text{Derivada de } |x| \text{ à esquerda em zero} = \lim_{h\to 0^-}\frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h} \qquad |h| = -h \text{ quando } h < 0.$$
$$= \lim_{h\to 0^-} -1 = -1.$$

OBS. Em geral, se o gráfico de uma função tem um ´bico´, não há tangente nesse ponto e f não é derivável nesse ponto. Então ser derivável é uma condição de ´suavidade´.

3 Representando graficamente a derivada de uma função y = f(x)

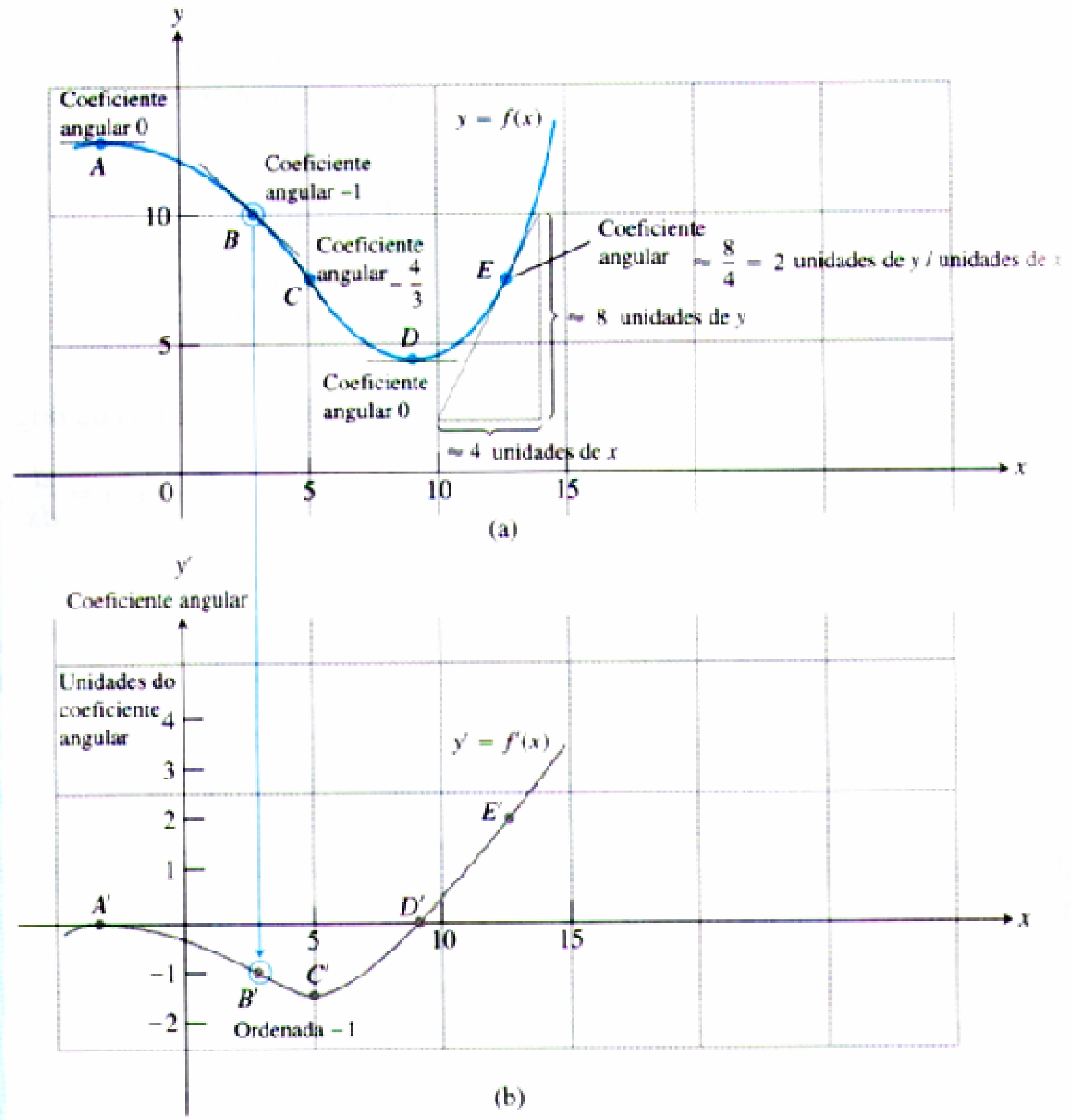


FIGURA 2.9 Construímos o gráfico de $y' = f'(x)$ registrando em (b) os coeficientes angulares do gráfico de $y = f(x)$ observados em (a). A ordenada de B' é o coeficiente angular em B e assim por diante. O gráfico de $y' = f'(x)$ é um registro visual de como o coeficiente angular de f varia em relação a x.

A partir do gráfico de $y' = f'(x)$, observamos imediatamente

1. onde a taxa de variação de f é positiva, negativa ou nula
2. o valor aproximado da taxa de crescimento em qualquer x e seu valor em relação a $f(x)$
3. onde a própria taxa de variação é crescente ou decrescente.

4 Teoremas sobre funções deriváveis

As Funções Deriváveis São Contínuas

Uma função é contínua em todos os pontos onde ela tiver uma derivada.

Teorema 1 Diferenciabilidade (Derivabilidade) Implica Continuidade
Se f tem uma derivada em $x = c$, então f é contínua em $x = c$.

Teorema 2 Propriedade do Valor Intermediário para Derivadas
Se a e b são dois pontos quaisquer de um intervalo em que f é derivável, então f' assume qualquer valor entre $f'(a)$ e $f'(b)$.

Se y'' for derivável, sua derivada, $y''' = dy''/dx = d^3y/dx^3$ será a terceira derivada (**de terceira ordem**) de y em relação a x. Como se pode imaginar, os nomes continuam com

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx} y^{(n-1)}$$

representando a **enésima derivada (de enésima ordem)** de y em relação a x, para qualquer número inteiro positivo n.

Podemos interpretar a segunda derivada como a taxa de variação do coeficiente angular da tangente de uma curva $y = f(x)$ em cada ponto. No próximo capítulo, ao observar a reta tangente, veremos que a segunda derivada revela se uma curva tem concavidade para cima ou para baixo, conforme nos afastamos do ponto de tangência. Na próxima seção explicaremos a segunda e a terceira derivada em termos do movimento ao longo de uma reta.

Exemplo 10 Determinando Derivadas Superiores

As primeiras quatro derivadas de $y = x^3 - 3x^2 + 2$ são

Primeira derivada:	$y' = 3x^2 - 6x$
Segunda derivada:	$y'' = 6x - 6$
Terceira derivada:	$y''' = 6$
Quarta derivada:	$y^{(4)} = 0$.

A função apresenta derivadas de todas as ordens, sendo a quarta derivada e as subseqüentes todas iguais a zero.

Como ler os símbolos de derivadas

y'	"y linha"
y''	"y duas linhas"
$\frac{d^2y}{dx^2}$	"*d* dois *y dx* dois"
y'''	"y três linhas"
$y^{(n)}$	"*n*" ou "a derivada enésima de *y*"
$\frac{d^ny}{dx^n}$	"*d n y dx n*"

Exercício 1

Determine a primeira derivada das funções abaixo:

$$y = x^2 + x + 8$$

$$s = 5t^3 - 3t^5$$

$$y = \frac{4x^3}{3} - 4$$

$$y = \frac{x^3 + 7}{x}$$

Exercício 2

Encontre a derivada de todas as ordens das funções abaixo.

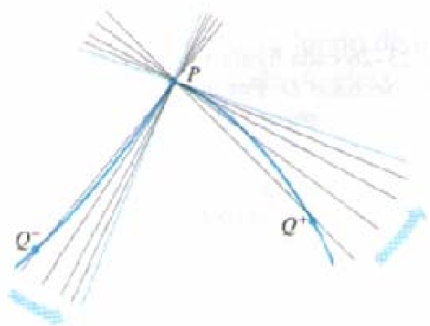
$$y = \frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 - x$$

$$y = \frac{x^5}{120}$$

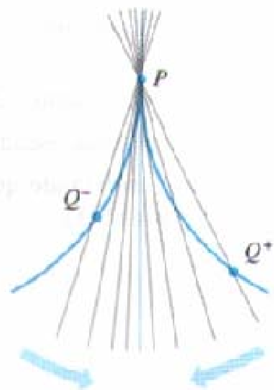
Quando uma Função Não Apresenta Derivada em um Ponto?

Uma função terá derivada em um ponto x_0 se os coeficientes angulares das retas secantes que passam por $P(x_0, f(x_0))$ e um ponto Q próximo no gráfico tenderem a um limite à medida que Q se aproxima de P. Quando as secantes não têm uma única posição-limite ou se tornam verticais à medida que Q tende a P, a derivada não existe. Uma função não terá derivada em um ponto se o gráfico apresentar

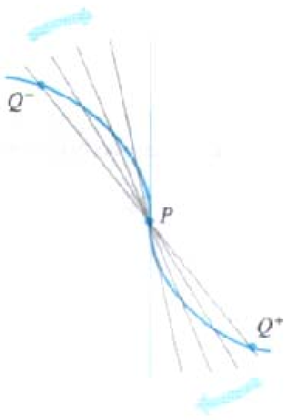
(1) um *bico*, onde as derivadas laterais são diferentes



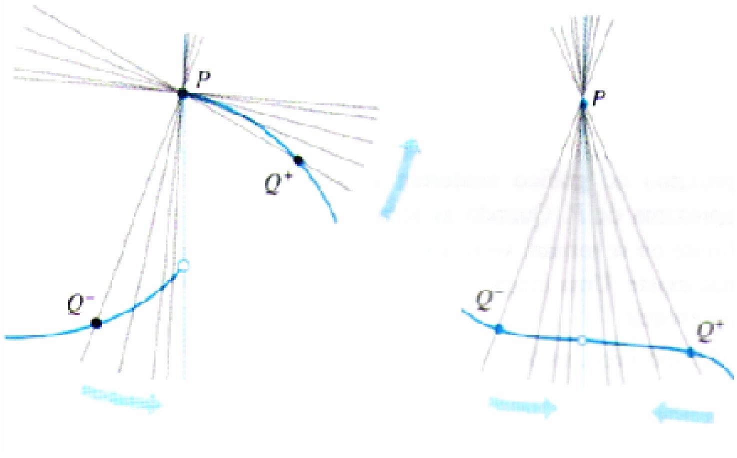
(2) um *ponto cuspidal*, onde o coeficiente angular de PQ tende a ∞ para um lado e a $-\infty$ para o outro



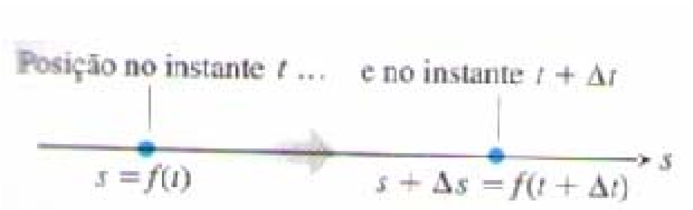
(3) uma *tangente vertical*, onde o coeficiente angular de PQ tende a ∞ ou a $-\infty$ para ambos os lados (aqui, $-\infty$)



(4) uma *descontinuidade*.



Vejamos agora alguns exemplos de derivadas no estudo do movimento ao longo de uma reta: Velocidade instantânea e aceleração



Suponha que um objeto se desloque ao longo de um eixo coordenado (digamos o eixo s) e que conheçamos sua posição em função do tempo t:

$$s = f(t).$$

O **deslocamento** do objeto no intervalo de t a $t + \Delta t$ (Figura 2.14) é

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t),$$

e sua **velocidade média** nesse intervalo é

$$v_{av} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo decorrido}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Para encontrar a velocidade do corpo no exato instante t, calculamos o limite da velocidade média no intervalo t a $t + \Delta t$ com Δt tendendo a zero. Esse limite é a derivada de f em relação a t.

Definição Velocidade (Instantânea)

Velocidade (**velocidade instantânea**) é a derivada da posição em relação ao tempo. Se a posição de um corpo no instante t é $s = f(t)$, então sua velocidade no instante t é

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Vejamos agora o seguinte exemplo (9) que mostra um gráfico da velocidade de um corpo em função do tempo

A Figura 2.16 mostra a velocidade $v = f'(t)$ de uma partícula que se desloca em um eixo coordenado. A partícula vai para a frente nos primeiros 3 s, para trás nos próximos 2 s, pára por um segundo e vai de novo para a frente. Ela atinge a velocidade máxima no instante $t = 4$, enquanto se desloca para trás.

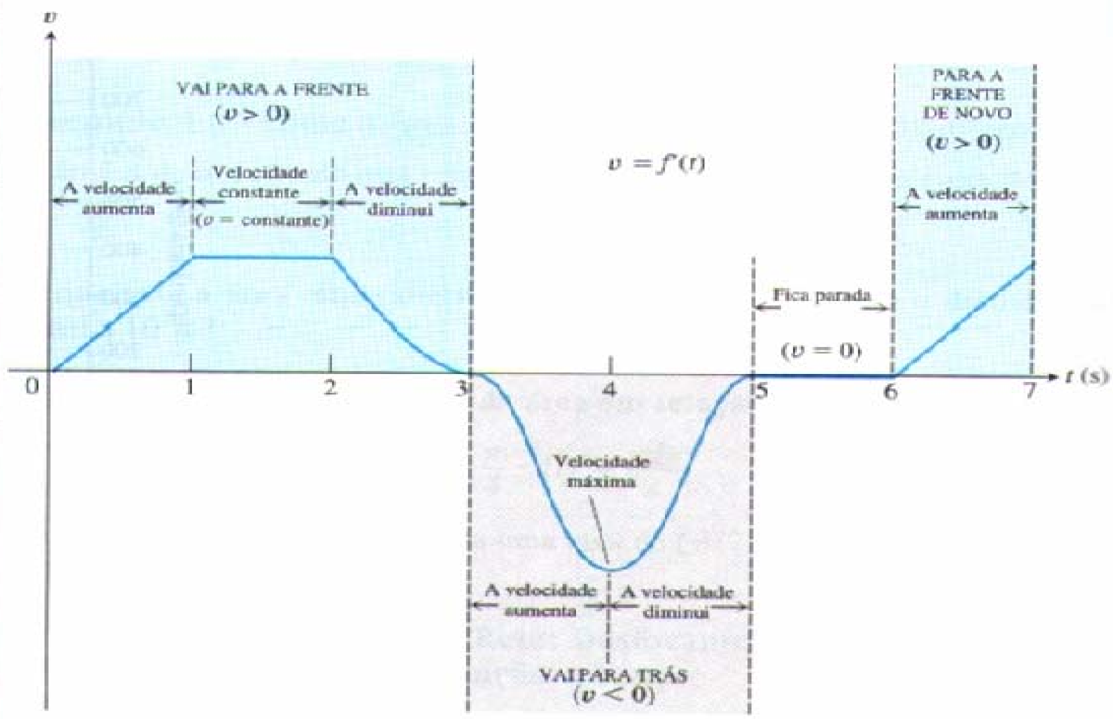


FIGURA 2.16 Gráfico da velocidade para o Exemplo 3.

A taxa com que a velocidade de um corpo varia é a aceleração do corpo. A aceleração mede quanto o corpo ganha ou perde velocidade.

Uma mudança repentina na aceleração é chamada de 'torque'. Uma viagem de carro ou de ônibus pode se tornar desagradável quando há muito torque. Isso não significa que as acelerações envolvidas sejam necessariamente grandes, mas que as variações na aceleração são abruptas. Torque é aquilo que faz entornar o refrigerante.

Definições Aceleração, Torque

Aceleração é a derivada da velocidade em relação ao tempo. Se a posição de um corpo no instante t é $s = f(t)$, então sua aceleração no instante t é

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Torque é a derivada da aceleração em relação ao tempo:

$$j(t) = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}.$$

Exemplo 10: Queda livre

A Figura 2.17 mostra a queda livre de uma bola pesada partindo do repouso no instante $t = 0$ s.

(a) Quantos metros a bola cai nos primeiros 2 s?

(b) Qual sua velocidade, o módulo de sua velocidade e sua aceleração nesse instante?

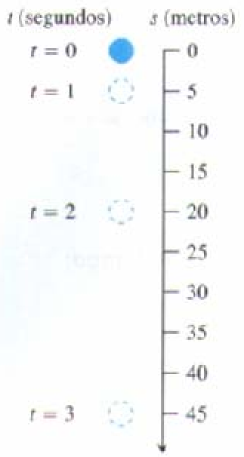


FIGURA 2.17 Uma bola caindo a partir do repouso

Solução

(a) A equação métrica da queda livre é $s = 4{,}9t^2$. Durante os dois primeiros segundos, a bola cai

$$s(2) = 4{,}9(2)^2 = 19{,}6 \text{ m}.$$

(b) Em qualquer instante t, a *velocidade* é a derivada da posição:

$$v(t) = s'(t) = \frac{d}{dt}(4{,}9t^2) = 9{,}8t.$$

Em $t = 2$ s, a velocidade é

$$v(2) = 19{,}6 \text{ m/s}$$

para baixo (s aumenta). O *módulo da velocidade* em $t = 2$ s é

$$\text{Módulo da velocidade} = |v(2)| = 19{,}6 \text{ m/s}.$$

Em qualquer instante t, a *aceleração* é

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 9{,}8 \text{ m/s}^2.$$

Em $t = 2$ s, a aceleração é 9,8 m/s².

5 Derivada de produtos, Quocientes e Potencias negativas

Produtos

Embora a derivada da soma de duas funções seja a soma de suas derivadas, a derivada do produto de duas funções *não* é o produto de suas derivadas. Por exemplo,

$$\frac{d}{dx}(x \cdot x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x, \qquad \text{onde} \qquad \frac{d}{dx}(x) \cdot \frac{d}{dx}(x) = 1 \cdot 1 = 1.$$

A derivada de um produto de duas funções é a soma de *dois* produtos, como explicaremos agora.

Regra 5 Regra da Derivada do Produto

Se u e v são deriváveis em x, então o produto uv também é e

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

A derivada do produto uv é u multiplicado pela derivada de v somado a v multiplicado pela derivada de u. Em notação 'linha', $(uv)' = uv' + vu'$.

Exemplo 1 Usando a Regra do Produto

Encontre a derivada de

$$y = \frac{1}{x}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right).$$

Solução Aplicamos a Regra do Produto com $u = 1/x$ e $v = x^2 + (1/x)$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\right] &= \frac{1}{x}\left(2x - \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
&= 2 - \frac{1}{x^3} - 1 - \frac{1}{x^3} \qquad \frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \\
&= 1 - \frac{2}{x^3}.
\end{aligned}$$

Quocientes

Assim como a derivada do produto de duas funções deriváveis não é o produto de suas derivadas, a derivada do quociente de duas funções não é o quociente de suas derivadas. Em vez disso, o que acontece é a Regra do Quociente.

Regra 6 Regra da Derivada do Quociente

Se u e v são deriváveis em x e se $v(x) \neq 0$, então o quociente u/v é derivável em x e

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Exemplo 3 Usando a Regra do Quociente

Encontre a derivada de

$$y = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}.$$

Solução Aplicamos a Regra do Quociente com $u = t^2 - 1$ e $v = t^2 + 1$:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(t^2 + 1) \cdot 2t - (t^2 - 1) \cdot 2t}{(t^2 + 1)^2} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(du/dt) - u(dv/dt)}{v^2}$$

$$= \frac{2t^3 + 2t - 2t^3 + 2t}{(t^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{4t}{(t^2 + 1)^2}.$$

Potências Inteiras Negativas de x

A Regra da Potência para inteiros negativos é a mesma regra dos inteiros positivos.

Regra 7 Regra de Derivação para Inteiros Negativos

Se n é um inteiro negativo e $x \neq 0$, então

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

Exemplo 4 Usando a Regra 7

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$

(b) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{4}{x^3}\right) = 4\dfrac{d}{dx}(x^{-3}) = 4(-3)x^{-4} = -\dfrac{12}{x^4}$

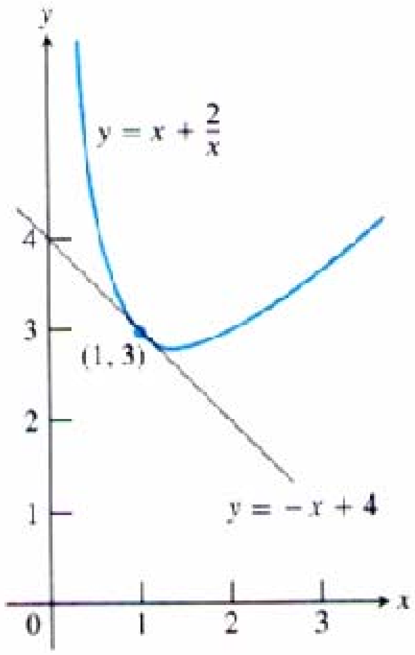
As demonstrações das regras 5, 6 e 7 podem ser acompanhadas no livro texto nas paginas 167, 168 e 169, respectivamente.

Exemplo 5 Tangente a uma Curva

Encontre uma equação para a tangente à curva

$$y = x + \frac{2}{x}$$

no ponto (1, 3) (Figura 2.24).



Solução O coeficiente angular da curva é

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x) + 2\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + 2\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{2}{x^2}$$

O coeficiente angular para $x = 1$ é

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \left[1 - \frac{2}{x^2}\right]_{x=1} = 1 - 2 = -1.$$

A escolha de qual regra usar para resolver um problema de derivação vai determinar quanto trabalho essa resolução exigirá. Eis um exemplo.

Exemplo 6 Escolhendo a Regra

Em vez de usar a Regra do Quociente para encontrar a derivada de

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4},$$

desenvolva o numerador e divida por x^4:

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4} = \frac{x^3-3x^2+2x}{x^4} = x^{-1} - 3x^{-2} + 2x^{-3}.$$

Use então as regras da soma e da potenciação:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -x^{-2} - 3(-2)x^{-3} + 2(-3)x^{-4} \\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}. \end{aligned}$$

Exemplo 7 A Reação do Organismo a um Medicamento

A resposta do corpo a uma dose de um medicamento às vezes é representada por uma equação na forma

$$R = M^2\left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3}\right),$$

onde C é uma constante positiva e M a quantidade de medicamento absorvida no sangue. Se a resposta esperada for uma variação na pressão sangüínea, então R deve ser medido em milímetros de mercúrio; se a resposta for uma variação de temperatura, R será medido em graus centígrados e assim por diante.

Determine dR/dM. Essa derivada, em função de M, é chamada de *sensibilidade* do corpo ao medicamento.

Solução

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dM} &= 2M\left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3}\right) + M^2(-1/3) \\ &= MC - M^2 \end{aligned}$$

Regras da soma, da potenciação e da multiplicação por constante.

Exercícios propostos do livro texto.

1 **Movimento ao longo de uma Coordenada**

Nos exercícios 1–4, dê as posições $s = f(t)$ de um corpo que se desloca em um eixo coordenado, com s em metros e t em segundos.

(a) Determine o deslocamento do corpo e a velocidade média para o intervalo dado.

(b) Determine o módulo da velocidade e a aceleração do corpo nas extremidades do intervalo.

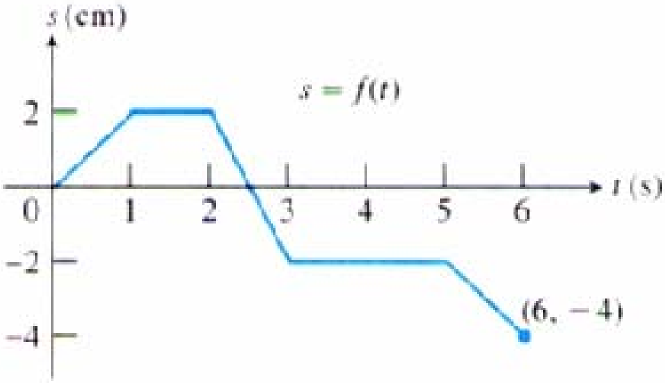
(c) O corpo muda de direção durante o intervalo? Em caso afirmativo, quando?

1. $s = t^2 - 3t + 2, \quad 0 \leq t \leq 2$
2. $s = 6t - t^2, \quad 0 \leq t \leq 6$
3. $s = -t^3 + 3t^2 - 3t, \quad 0 \leq t \leq 3$
4. $s = (t^4/4) - t^3 + t^2, \quad 0 \leq t \leq 3$

2 *Encontrando g para um pequeno planeta sem ar* Na superfície de um pequeno planeta sem ar, exploradores usaram um estilingue para atirar uma bola verticalmente para cima com uma velocidade de lançamento de 15 m/s. Como a aceleração da gravidade era g_s m/s², os exploradores esperavam que a bola atingisse uma altura de $s = 15t - (1/2)g_s t^2$ metros após t segundos. A bola atingiu sua altura máxima 20 s depois do lançamento. Qual é o valor de g_s?

3 Uma partícula P desloca-se na escala da figura a seguir, parte (a). A parte (b) mostra sua posição em função do tempo t.

(a)



(b)

(a) Quando P se desloca para a esquerda? E para a direita? E quando permanece parado?

(b) Faça o gráfico da velocidade e do módulo da velocidade da partícula (onde são definidas).

4 Determine as derivadas das funções abaixo:

$$y = \frac{2x + 5}{3x - 2}$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 0{,}5}$$

$$f(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + t - 2}$$

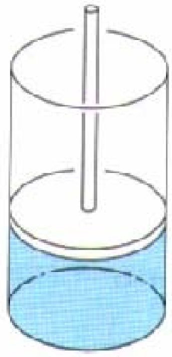
$$v = (1 - t)(1 + t^2)^{-1}$$

$$f(s) = \frac{\sqrt{s} - 1}{\sqrt{s} + 1}$$

5 *Pressão no cilindro* Se um gás (real) for mantido em um cilindro a uma temperatura constante T, a pressão P estará relacionada com o volume V de acordo com uma fórmula na forma

$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2},$$

em que a, b, n e R são constantes. Determine dP/dV.

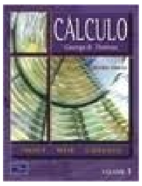


6 *A quantidade ideal de pedidos* Uma das fórmulas para o gerenciamento de estoque diz que o custo médio semanal de pedidos, pagamentos e armazenamento de mercadorias é

$$A(q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2},$$

onde q é a quantidade (de sapatos, rádios, vassouras ou qualquer outro item) pedida quando as vendas estão em baixa, k é o custo para se fazer um pedido (sempre o mesmo, independentemente da freqüência com que se faz o pedido), c é o custo de cada item (constante), m é a quantidade de itens vendidos por semana (constante) e h é o custo semanal para manter cada item armazenado (constante que incorpora aspectos como espaço, utilidade, seguro e segurança). Determine dA/dq e d^2A/dq^2.

Livro texto:



Thomas G. B., Finney R. L., Weir M. D., Giordano F. R., Cálculo, Vol. 1, Editora Pearson –Addison Wesley, São Paulo.

Estudar os exercícios resolvidos sobre derivadas nos endereço eletrônicos abaixo:
http://www.mtm.ufsc.br/~azeredo/calculos/Acalculo/index.html
http://www1.univap.br/~spilling