Lucas Antonio Caritá

Detecção de ordem e caos em órbitas estelares imersas em potenciais de galáxias barradas pelo método SALI.

São José dos Campos - SP

2017

Lucas Antonio Caritá

Detecção de ordem e caos em órbitas estelares imersas em potenciais de galáxias barradas pelo método SALI.

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física e Astronomia da Universidade do Vale do Paraíba, como complementação dos créditos necessários para obtenção do grau de Doutor em Física e Astronomia.

Universidade do Vale do Paraíba – UNIVAP

Instituto de Pesquisa & Desenvolvimento – IP&D

Programa de Pós-Graduação em Física e Astronomia

Orientador: Dr. Irapuan Rodrigues de Oliveira Filho

Coorientador: Dr. Ivânio Puerari

São José dos Campos - SP

2017

Fundação Valeparaibana de Ensino

BIBLIOTECA

TERMO DE AUTORIZAÇÃO DE DIVULGAÇÃO DA OBRA

Ficha catalográfica

Caritá, Lucas Antonio
Detecção de ordem e caos em órbitas estelares imersas em potenciais de galáxias barradas pelo método SALI. / Lucas Antonio Caritá; orientador, Irapuan Rodrigues; co-orientador Ivânio Puerari. - São José dos Campos, SP, 2017.
170 p.

Tese (Doutorado) - Universidade do Vale do Paraíba, São José dos Campos. Programa de Pós-Graduação em Física e Astronomia.

Inclui referências

1. Física e Astronomia. 2. Galáxias Barradas. 3. Órbitas Estelares. 4. Caos. I. Rodrigues, Irapuan, orient. II. Puerari, Ivânio, co-orient. III. Universidade do Vale do Paraíba. Programa de Pós-Graduação em Física e Astronomia. IV. Título.

Eu, Lucas Antonio Caritá, autor(a) da obra acima referenciada:

Autorizo a divulgação total ou parcial da obra impressa, digital ou fixada em outro tipo de mídia, bem como, a sua reprodução total ou parcial, devendo o usuário da reprodução atribuir os créditos ao autor da obra, citando a fonte.

Declaro, para todos os fins e efeitos de direito, que o Trabalho foi elaborado respeitando os princípios da moral e da ética e não violou qualquer direito de propriedade intelectual sob pena de responder civil, criminal, ética e profissionalmente por meus atos.

São José dos Campos, 16 de Novembro de 2017.

____

Autor(a) da Obra

Data da defesa: _________/_________/_________

Lucas Antonio Caritá

Detecção de ordem e caos em órbitas estelares imersas em potenciais de galáxias barradas pelo método SALI.

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física e Astronomia da Universidade do Vale do Paraíba, como complementação dos créditos necessários para obtenção do grau de Doutor em Física e Astronomia.

São José dos Campos - SP, Data da Aprovação: 18 de dezembro de 2017

Dr. Irapuan Rodrigues de Oliveira Filho
Universidade do Vale do Paraíba (UNIVAP)

Dr. Ivânio Puerari
Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE) - México

---

Dra. Angela Cristina Krabbe
Universidade do Vale do Paraíba (UNIVAP)

Dr. Horacio Alberto Dottori
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)

Dr. Reinaldo Roberto Rosa
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE)

São José dos Campos - SP
2017

Para Ignez Lavezzo Jacomini, saudades vovó...

AGRADECIMENTOS

À Deus, por iluminar meus caminhos.

Ao meu orientador Dr. Irapuan Rodrigues pela paciência e atenção. Ao meu coorientador Dr. Ivânio Puerari, que me recebeu de braços abertos no México.

À Universidade do Vale do Paraíba, por me oferecer a estrutura física e professores exemplares. Eu não teria feito melhor escolha de instituição para cursar o doutorado. Ao Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, no México, que me acolheu como aluno durante um bom período durante essa caminhada. Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, por me conceder afastamento para que eu pudesse me dedicar exclusivamente ao doutorado. Um agradecimento especial ao Dr. Francisco Rocha, que foi coordenador do curso durante a maioria do período em que eu fui aluno do Programa, por sempre me disponibilizar atenção e atender minhas demandas, ao Dr. Daniel Pfenniger (University of Geneva), que gentilmente me forneceu parte de sua rotina em Fortran 77 para o potencial de Ferrers e também ao Dr. José Ricardo Abalde Guede pela leitura extremamente atenta, criteriosa e pelas diversas contribuições no meu texto na qualificação. Me deixa extremamente chateado a não participação do Dr. Abalde como membro da banca avaliadora da tese, por motivos os quais não abordarei.

À CAPES, CNPq e CONACyT pelas bolsas concedidas.

Aos colegas e amigos que conheci no decorrer desta longa jornada, obrigado pela agradável companhia. Um agradecimento especial aos grandes amigos Luiz Eduardo Schiavo e Antonio Nilson Laurindo, que além de companheiros são colaboradores em muitos trabalhos.

À toda minha família, mas principalmente aos meus pais Jaime Caritá e Maria Cristina Caritá, ao meu irmão Gabriel Caritá e à minha avó Ignez, que acompanharam o meu esforço de perto. Vovó Ignez assistirá essa conquista do céu. Este trabalho é particularmente dedicado a você, vovó!

Finalmente, um agradecimento especial à Maira Caritá, minha esposa, que teve que aturar minha ansiedade, minhas dores de cabeça, minhas noites sem dormir, minhas reclamações e acompanhou cada degrau do meu doutoramento. Obrigado pelo incentivo. Obrigado por cuidar de mim. Obrigado por ser minha parceira. Você é o melhor presente que eu já recebi, sem sombra de dúvidas!

La matematica è l'alfabeto
nel quale Dio ha scritto l'universo.
Galileo Galilei

RESUMO

O Menor Índice de Alinhamento (SALI) é uma ferramenta matemática, ainda não convencional, para detecção de caos no espaço de fase de Sistemas Dinâmicos Hamiltonianos. SALI possui comportamentos temporais específicos para movimentos ordenados ou caóticos, o que torna a distinção entre ordem e caos facilmente observável nesses sistemas. Nesta tese, esse método é aplicado no estudo de órbitas estelares imersas em potenciais gravitacionais de galáxias barradas, uma vez que o movimento de uma partícula de teste, em um modelo tridimensional de rotação de uma galáxia barrada, é dado por uma Função Hamiltoniana. Diversas situações de barras galácticas são apresentadas: barras fixas em rotação, onde são variadas suas morfologias e barras em evolução, com dependência temporal, onde são variadas suas velocidades angulares e as velocidades com que crescem. Estudos separados foram feitos no contexto das órbitas progradas e retrogradas, que mostraram que as órbitas retrogradas possuem maior tendência ao caos. Percebemos que barras mais massivas geram um ambiente mais propício ao caos, enquanto que barras "mais axissimétricas"têm uma dinâmica mais regular. Quando analisados os casos onde uma barra dependente do tempo surge e cresce ao longo da evolução do sistema, notamos que um surgimento abrupto da barra ou uma velocidade angular mais alta também geram um ambiente com mais caos. Todas as integrações das órbitas e cálculos de SALI foram feitos utilizando o programa LP-VIcode.

Palavras-chaves: Orbitas Estelares. Galáxias Barradas. Caos.

ABSTRACT

The Smaller Alignment Index (SALI) is a mathematical tool, not yet conventional, for chaos detection in the phase space of Hamiltonian Dynamical Systems. The SALI values has temporal behaviors very specific to ordered or chaotic motions, what makes the distinction between order and chaos easily observable in these systems. In this thesis, this method will be applied to the stability study of stellar orbits immersed in gravitational potential of barred galaxies, since the motion of a test particle in a rotating barred galaxy model is given by a Hamiltonian function. Several situations of galactic bars are presented: fixed bars in rotation, where they are varied their morphologies and bars in evolution, with temporal dependence, where are varied their angular velocities and the speeds with which they grow. Separate studies were carried out for prograde and retrograde orbits that showed that the retrograde orbits seem more conducive to chaos. We noted that more axisymmetric bars create an environment with less chaos and that more massive bars create an environment with more chaos. When we analyzed the cases where a time-dependent bar arises and grows throughout the evolution of the system, we notice that an abrupt rise of the bar or a higher angular velocity also generate an environment with more chaos. To perform all the orbits integrations and SALI computation we used the LP-VIcode program.

Key-words: Stellar Orbits. Barred Galaxies. Chaos.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LCE	Lyapunov Characteristic Exponents (Expoentes Característicos de Lyapunov)
MLE	Maximus Lyapunov Exponent (Máximo Expoente Característico de Lyapunov)
SALI	Smaller Alignment Index (Menos Índice de Alinhamento)
GALI	Generalized Alignment Index (Índice de Alinhamento Generalizado)
LP-VIcode	La Plata's Variational Indicators code (Código de Indicadores Variacionais de La Plata)
CR	Ressonância de Corrotação
ILR	Inner Lindblad Resonance (Ressonância de Lindblad Interna)
OLR	Outer Lindblad Resonance (Ressonância de Lindblad Externa)

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A morfologia das galáxias do Universo local é o resultado do processo de formação e evolução desses objetos durante vários bilhões de anos. Do ponto de vista cosmológico, a morfologia de todos os objetos vistos no tempo presente depende da sua história de acréscimo de massa.

Sabemos que a fusão de duas galáxias de massas similares gera um produto de forma geralmente elipsoidal, suportado principalmente por dispersão de velocidade (Avila-Reese; Firmani, 2011). Por outro lado, a grande maioria das galáxias acretam massa na forma de filamentos de gás ou canibalizam galáxias muito menores em massa, processos estes que não são eficientes em esquentar o sistema. Assim, uma componente discoidal, com momento angular específico muito alto, é formada e pode subsistir por bilhões de anos (Marinacci; Pakmor; Springel, 2014). Nestes discos galácticos se formam e evoluem subestruturas dinâmicas muito interessantes, como por exemplo, longos braços espirais bissimétricos, estruturas espirais multibraços, anéis e barras (D'Onghia; Vogelsberger; Hernquist, 2013). Essas subestruturas podem ser entendidas como perturbações ao potencial axissimétrico dos discos galácticos.

Nesse trabalho nos concentraremos no estudo dos potenciais que representam galáxias barradas. Estimativas apontam que aproximadamente 65% das galáxias possuam estruturas de barra (Eskridge et al., 2000; Sheth et al., 2003).

A maneira clássica de estudar esses potenciais galácticos barrados é observar a estrutura das órbitas que são suportadas pelos mesmos. Órbitas estelares suportadas por determinado potencial galáctico são as constituintes básicas de qualquer estrutura galáctica. A caracterização das propriedades das órbitas das estrelas em potenciais galácticos é, portanto, de grande interesse na compreensão da formação e evolução de estruturas em galáxias.

Dessa constatação emergem o interesse astronômico em classificar os tipos de órbitas, bem como, o de encontrar as órbitas adequadas necessárias para a construção de modelos autoconsistentes de galáxias. A exploração da natureza das órbitas em modelos de galáxias tem sido feita, principalmente, através do estudo das órbitas em potenciais analíticos fixos, que não evoluem com o tempo, ou do estudo das órbitas em simulações de N-corpos, auto-consistentes e dependentes do tempo. Em qualquer um dos casos, observam-se órbitas de todos os tipos: caóticas, regulares, ressonantes e periódicas.

Galáxias barradas têm sido um assunto muito estudado nas últimas décadas. Athanassoula et al. (1983) integraram órbitas em um modelo de potencial rígido de galáxia contendo uma barra. Variando o conjunto de parâmetros do modelo, eles estudaram as principais famílias de órbitas periódicas bem como órbitas não periódicas. Foi demonstrado que no interior da corrotação existem duas famílias de órbitas progradas (uma confinada em raios pequenos e outra alinhada com a barra) e também uma família de órbitas retrogadas. Eles também perceberam que barras mais massivas possuem mais órbitas irregulares, afetando a construção de barras auto-consistentes. Fora da corrotação, também foram encontradas duas famílias principais de órbitas progradas, bem como uma família -1/1 ressonante. Pfenniger (1984) focou em modelos 3-dimensionais. Um importante apêndice faz parte de sua publicação, onde o autor apresenta uma forma polinomial muito útil para o potencial de Ferrers (Ferrers, 1877) (potencial este que representa muito fielmente uma barra galáctica).

Combes et al. (1990) apresentaram um conjunto de simulações de N-corpos não colisionais de galáxias discoidais, das quais concluíram que todas as barras que se desenvolvem em modelos realísticos tomam, depois de certo tempo, uma forma parecida com um amendoim (*peanut-shape*). Olle e Pfenniger (1998) estudaram a estabilidade dos pontos de Lagrange e das órbitas periódicas verticais em volta deles. Skokos, Patsis e Athanassoula (2002a), Skokos, Patsis e Athanassoula (2002b), Patsis, Skokos e Athanassoula (2002), Patsis, Skokos e Athanassoula (2003) publicaram uma série de artigos estudando órbitas periódicas em um modelo de potencial de galáxia barrada analisando a influência dos parâmetros do modelo na natureza dessas órbitas e suas famílias. Kaufmann e Patsis (2005) sugeriram que, para razões axiais suficientemente grandes da barra, as órbitas estáveis com trajetória de hélice (*propeller-shapes*) têm grande influência na estrutura da barra.

Manos e Athanassoula (2011) calcularam a porcentagem de órbitas regulares e caóticas para quatro conjunto de parâmetros de um modelo de potencial onde cada conjunto representava um tipo de barra diferente. Bountis, Manos e Antonopoulos (2012) distinguiram órbitas fracamente caóticas de órbitas fortemente caóticas em um modelo de galáxia barrada. Manos e Machado (2014) e Machado e Manos (2016) escreveram sobre a estabilidade em galáxias barradas utilizando potenciais analíticos, já dependentes do tempo, baseados em simulações N-corpos para conseguir os parâmetros necessários. Zotos e Caranicolas (2016) utilizando um modelo que consistia de um oscilador harmônico e um componente esférico, calcularam as porcentagens de órbitas caóticas e de diferentes tipos de órbitas regulares. Eles forneceram evidências que, ademais da tradicional família x_1, diversos outros tipos de órbitas ressonantes podem dar suporte a estruturas de barra.

Baseados nos apontamentos exibidos acima, podemos notar a importância do estudo da dinâmica orbital para compreender a estabilidade em barras galácticas. Este é um tema de muito interesse atual onde as pesquisas estão em pleno desenvolvimento. Na presente tese de doutorado, propomos aplicar os métodos SALI/GALI (Skokos, 2001; Skokos et al., 2002; Skokos et al., 2004; Skokos et al., 2003; Skokos; Bountis; Antonopoulos, 2007), que são ferramentas matemáticas capazes de distinguir movimentos regulares e caóticos, em potenciais gravitacionais analíticos com intuito de estudar a influência da barra galáctica na estabilidade das órbitas imersas nestes potenciais. Serão trabalhados potenciais com a barra fixa, seguindo os modelos fornecidos por Manos e Athanassoula (2011), bem como outros dois modelos inéditos que representam situações extremas de barra (uma barra muito massiva e uma barra "mais axissimétrica"). Também trabalharemos potenciais de barras dependentes do tempo, ou seja, que evoluem com o tempo. Para realizar este último estudo, nos inspiraremos na famigerada galáxia barrada NGC 936 para a extração de parâmetros e faremos um potencial onde a barra surge e cresce linearmente com o tempo. Pretende-se, desse modo, estudar órbitas em potenciais dependentes do tempo, uma vez que sabemos que a formação de uma barra é um processo secular longo e complexo, que pode ter diversas histórias. É consenso, também, que nenhuma galáxia nasce barrada: a barra pode se formar, se alterar (aumentar, diminuir, rotacionar, ...) e se extinguir com o passar do tempo, em processos que dependem dos parâmetros das galáxias que as hospedam.

Com o intuito de deixar este texto autossuficiente, sua redação foi dividida em três partes:

I Fundamentos Matemáticos: onde são descritos conceitos sobre sistemas dinâmicos, caos e teoria potencial;

II Fundamentos Astrofísicos: onde se discute sobre galáxias e são apresentados os potenciais gravitacionais elegidos para a pesquisa;

III Desenvolvimento: onde são exibidos e analisados os resultados dos estudos realizados tanto com potenciais fixos (com parâmetros inspirados em Manos e Athanassoula (2011)) quanto dependentes do tempo (com parâmetros inspirados na galáxia barrada NGC936).

Alguns tópicos da pesquisa que foram omitidos no texto principal ou tópicos que complementam a teoria apresentada são discutidos nos apêndices.

O trabalho aqui exposto é fruto de uma coorientação dos Drs. Irapuan Rodrigues de Oliveira Filho (UNIVAP, Brasil) e Ivânio Puerari (INAOE, México). O doutorando desfrutou de uma estadia de 6 meses na sede do Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Eletrónica (INAOE) - México, durante o segundo semestre de 2016, para realizar parte de sua pesquisa de doutorado sob a supervisão de seu coorientador.

Parte I

Fundamentos Matemáticos

2 SISTEMAS DINÂMICOS E CAOS

Neste capítulo, dividido em quatro seções, trabalha-se os conceitos de Sistemas Dinâmicos e Caos, enfatizando os Sistemas Hamiltonianos, uma vez que, este tipo de sistema é o que utilizaremos para modelar o movimento de uma partícula de teste em uma galáxia barrada.

O intuito aqui é, também, descrever algumas ferramentas matemáticas que darão suporte para o detalhamento dos Métodos SALI e GALI, os quais nos permitem distinguir entre comportamento ordenado e caótico em Sistemas Dinâmicos Hamiltonianos, dadas as condições iniciais.

2.1 SISTEMAS DINÂMICOS E CAOS

Definição 2.1. *Um sistema dinâmico é um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem em n variáveis $\boldsymbol{x}_k(t) \in X \subset \mathbb{R}$ dependentes do tempo t para $k \in \{1, 2, ..., n\}$ e $t \in \mathbb{R}$. Considerando o vetor $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$, podemos denotar o sistema por:*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = f(\boldsymbol{x}, t)$$

O espaço de n dimensões em que $x_1, x_2, ..., x_n$ são coordenadas é chamado de espaço de fase. Dizemos que o vetor $\mathbf{x}(t)$ é um vetor de estado no espaço de fase $D \subset \mathbb{R}^n$ do sistema. Um sistema em que o campo vetorial f não depende explicitamente de t é chamado autônomo.

Vamos, neste momento, definir caos. Existem várias definições distintas de caos na literatura e, nesta tese, será considerada uma definição com apelo topológico, dada por Devaney (1989):

Definição 2.2. *Seja X um espaço métrico. Uma aplicação $f : X \longrightarrow X$ é caótica em um conjunto invariante $Y \subset X$, se:*

(i) f é topologicamente transitiva em Y;

(ii) f apresenta sensibilidade às condições iniciais;

(iii) O conjunto dos pontos periódicos de f é denso em X.

2.1.1 ENTENDENDO A DEFINIÇÃO TOPOLÓGICA DE CAOS

Para o melhor entendimento da Definição 2.2, vamos apresentar alguns conceitos matemáticos prévios:

Definição 2.3. *Uma métrica em um conjunto X é uma função $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par de pontos $x, y \in X$ um número real $d(x, y)$, chamado distância entre x e y, de tal modo que:*

(1) $d(x, x) = 0$ *e* $d(x, y) > 0$ *se* $x \neq y$;

(2) $d(x, y) = d(y, x)$;

(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *para quaisquer* $x, y, z \in X$.

Um espaço métrico é um par (X, d) formado por um conjunto X e uma métrica d em X.

É uma convenção, desde que não exista perigo de confusão, nos referirmos ao "espaço métrico X", deixando subentendida a métrica d.

Definição 2.4. *Sejam X e Y espaços métricos. Um homeomorfismo de X sobre Y é uma bijeção contínua $f : X \longrightarrow Y$ em que a inversa $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ também é contínua.*

Contrariando o que ocorre em Álgebra Linear, onde a inversa de uma transformação linear bijetiva é também linear, ou em Teoria dos Grupos, onde o inverso de um homomorfismo[1] bijetivo é ainda um homomorfismo, em Topologia ocorre o fenômeno de existirem funções contínuas bijetivas tais que as inversas são descontínuas. Vide Lima (2009) para encontrar exemplos deste fato.

Definição 2.5. *Seja $Y \subset \mathbb{R}^n$. O conjunto Y é chamado de conjunto invariante do sistema*

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t))$$

se $x(t_0) \in Y$ implicar $x(t) \in Y$ para todo $t \geq t_0$.

Podemos interpretar a Definição 2.5 por: um conjunto Y é dito invariante se as órbitas que iniciam em Y permanecem em Y.

Definição 2.6. *Sejam (X, d) um espaço métrico e A um subconjunto de X. Dizemos que A é aberto em X se, para todo $a \in A$, existe um $\epsilon > 0$ tal que $B(a, \epsilon) = \{x \in X / d(x, a) < \epsilon\}$ está inteiramente contida em A, ou seja, $B(a, \epsilon) \subset A$.*

Definição 2.7. *Seja X um espaço métrico. Uma aplicação $f : X \longrightarrow X$ é topologicamente transitiva em X se, dados dois conjuntos abertos quaisquer, $U \subset X$ e $V \subset X$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$, onde f^k representa a k-ésima iteração de f.*

[1] Não confundir com homeomorfismo. A definição de homomorfismo necessita de diversos conceitos algébricos prévios e pode ser conferida em qualquer livro de Álgebra Abstrata.

A Definição 2.7 implica a existência de pontos que, eventualmente, movem-se, sob iteração, de uma vizinhança a outra aleatoriamente. Consequentemente o conjunto X da Definição 2.1 não pode ser decomposto em dois conjuntos abertos invariantes disjuntos (Skokos, 2010b).

Definição 2.8. *Seja (X, d) um espaço métrico. A aplicação $f : X \longrightarrow X$ possui sensibilidade às condições iniciais se existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ e todo $\varepsilon > 0$ existe $y \in X$ com $d(x, y) < \varepsilon$ e existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^k(x), f^k(y)) > \delta$, onde f^k representa a k-ésima iteração de f.*

Podemos afirmar, segundo a Definição 2.8, que quando f possui sensibilidade as condições iniciais, existe, pelo menos, um ponto próximo de $x \in X$ (podem existir mais de um) que se afasta conforme acontecem as iterações de f.

Definição 2.9. *Um ponto $x \in X$ é periódico se $f^k(x) = x$, para algum $k \in \mathbb{N}$, onde f^k denota a k-ésima iteração de f. Dizemos que k é o período.*

É usual denotar o conjunto dos pontos periódicos de f de período n por $Per_n(f)$.

Observação 2.1. *Uma vez que $f(x) = x$, chamamos x de ponto fixo de f. O conjunto de todos os pontos fixos de f é denotado por $Fix(f)$.*

Definição 2.10. *Sejam (X, d) um espaço métrico, A um subconjunto de X e $a \in X$. O ponto a diz-se aderente ao conjunto A quando para cada $\varepsilon > 0$, existe $x \in A$ tal que $d(a, x) < \varepsilon$.*

Definição 2.11. *O fecho de um conjunto A em um espaço métrico X é o conjunto $\overline{A}$ de todos os pontos de X que são aderentes a A.*

Portanto, escrever $a \in \overline{A}$ é o mesmo que afirmar que o ponto a é aderente a A em X.

Definição 2.12. *Um subconjunto $A \subset X$ diz-se denso em X quando $\overline{A} = X$.*

Podemos então, seguindo Skokos (2010b), dizer que da Definição 2.2, caos possui três ingredientes:

(i) **Indecomponibilidade:** Pois f é topologicamente transitiva em Y;

(ii) **Imprevisibilidade:** Pois f apresenta sensibilidade às condições iniciais;

(iii) **Um Elemento de Regularidade:** Pois o conjunto dos pontos periódicos é denso em Y.

Ainda afirma Skokos (2010b) que usualmente, nas ciências aplicadas, costuma-se focar na condição (ii) da Definição 2.2 e utilizar a noção de caos em detrimento da sensibilidade às condições iniciais.

2.1.2 O ATRATOR DE LORENZ

Um exemplo de sistema caótico é o famoso Atrator de Lorenz (Lorenz, 1963). Este sistema foi estudado pelo matemático e meteorologista Edward Lorenz, que o derivou simplificando equações de rolos de convecção térmica que ocorre na atmosfera.

O modelo utilizado consiste de uma atmosfera bidimensional retangular, onde a extremidade inferior possui temperatura maior do que a extremidade superior. Dessa forma, o ar quente sobe e as correntes de ar frio descem, criando uma troca de calor por convecção.

Trata-se de um sistema não linear, tridimensional e determinístico que exibe comportamento caótico.

O Atrator de Lorenz é regido pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = \rho x - xz - y \\ \\ \dfrac{dz}{dt} = xy - \beta z \end{cases}$$

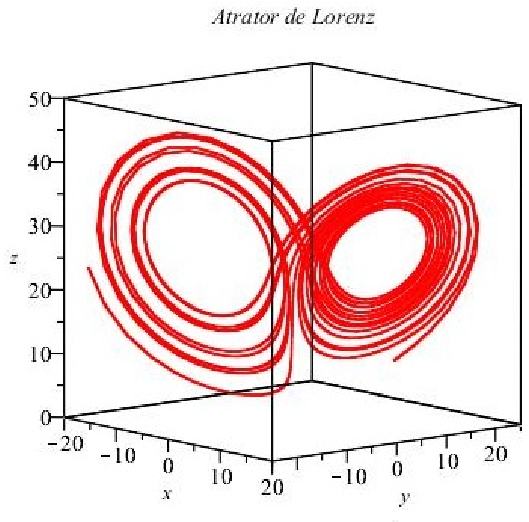
As constantes σ, ρ e β são reais, positivas e representam, respectivamente, o quociente entre a viscosidade e a condutividade térmica, a diferença de temperaturas entre as camadas inferior e superior e o quociente entre as dimensões do retângulo analisado. Os valores usuais são $\sigma = 10, \rho = 28$ e $\beta = \dfrac{8}{3}$. As variáveis dependentes do tempo $x(y), y(t)$ e $z(t)$ representam, respectivamente, o fluxo convectivo, a distribuição de temperaturas horizontal e a distribuição de temperaturas vertical.

A sensibilidade as condições iniciais se torna explicita quando se observa a evolução da trajetória para duas condições iniciais levemente distintas. Para exibir este fato, escolhemos as seguintes condições iniciais: a primeira com $x = 10$, $y = 10$ e $z = 10$; e a segunda com $x = 10.01$, $y = 10$ e $z = 10$. A Figura 1 (a) mostra a evolução apenas do primeiro vetor conforme t varia de 0 a 200. Já a Figura 1 (b) mostra a evolução de ambos as condições iniciais para comparação.

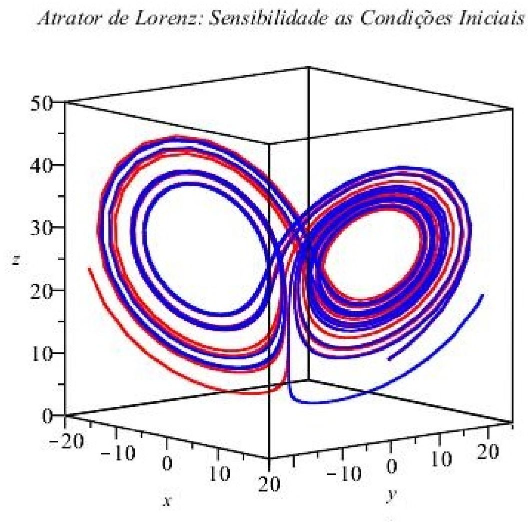
A divergência de ambas as trajetórias evidencia que uma alteração mínima nas condições iniciais, elimina a previsibilidade do sistema. A Figura 2 exibe em detalhes as diferenças, em função do tempo, das coordenadas x, y e z para ambas as condições iniciais descritas anteriormente.

Figura 1 – Atrator de Lorenz

(a) Evolução de uma trajetória no Atrator de Lorenz com condições iniciais $x = 10, y = 10$ e $z = 10$.



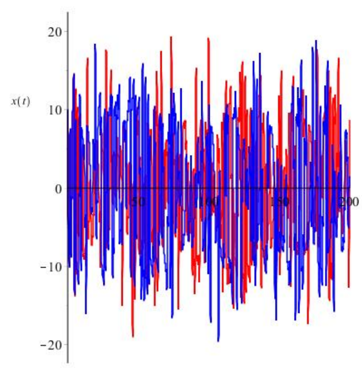
(b) Evolução de duas trajetórias com condições iniciais levemente distintas no Atrator de Lorenz. A trajetória azul possui condições iniciais $x = 10.01, y = 10$ e $z = 10$.



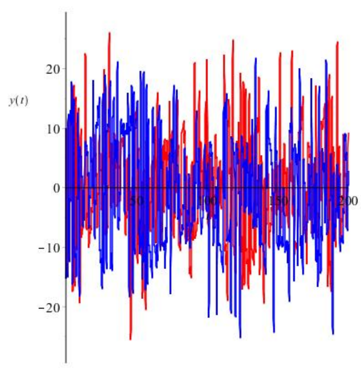
Fonte: o autor.

Figura 2 – Detalhes das diferenças de evolução entre as trajetórias apresentadas na Figura 1 no Atrator de Lorenz

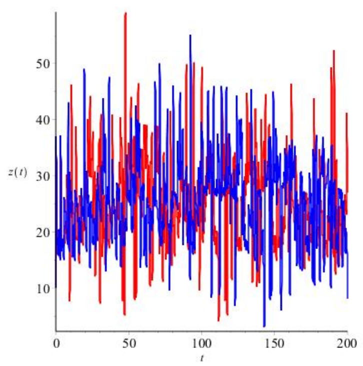
(a) Comparação $t \times x(t)$ das Trajetórias



(b) Comparação $t \times y(t)$ das Trajetórias



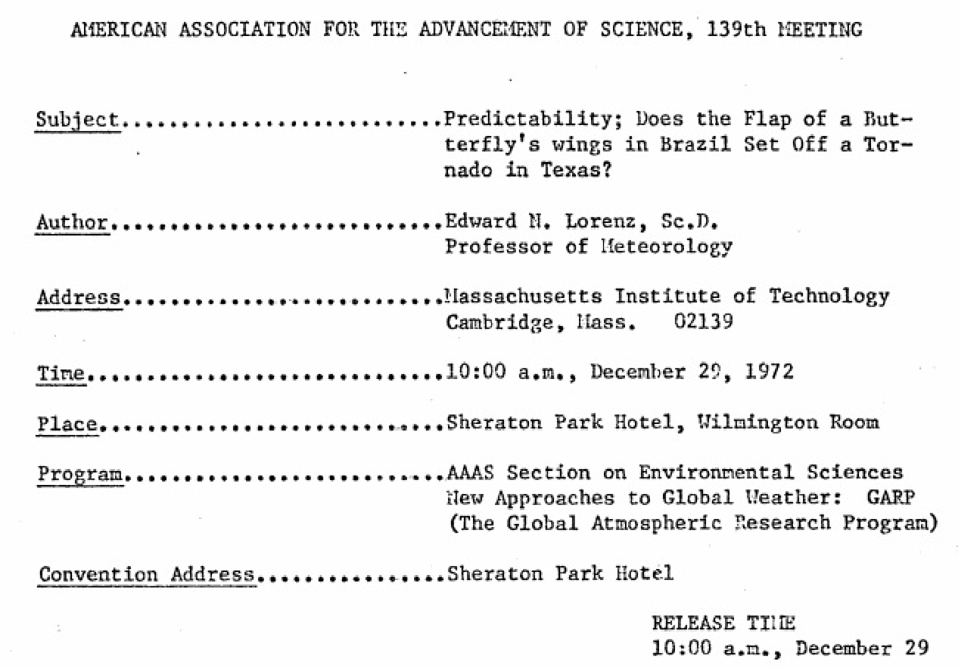
(c) Comparação $t \times z(t)$ das Trajetórias



Fonte: o autor.

Nota-se pela Figura 1 que a evolução do vetor de estado no espaço de fase possui uma trajetória que se assemelha as asas de uma borboleta. Devido a este fato e a sensibilidade as condições iniciais, o Atrator de Lorenz foi a inspiração para o título da palestra de Edward Lorenz, em dezembro de 1972, no 139º encontro da *American Association for the Advancement of Science*. A palestra foi intitulada *"Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set a Tornado in Texas?"* que, em tradução livre, quer dizer "Previsibilidade: Será que o bater de asas de uma borboleta no Brasil pode iniciar um tornado no Texas?". A Figura 3, retirada de um documento do site do M.I.T. (Massachusetts Institute of Technology), mostra informações desta palestra.

Figura 3 – Informações sobre a palestra apresentada por Lorenz no 139º encontro da American Association for the Advancement of Science em 1972.



AMERICAN ASSOCIATION FOR THE ADVANCEMENT OF SCIENCE, 139th MEETING

Subject..........................Predictability; Does the Flap of a Butterfly's wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?

Author..........................Edward N. Lorenz, Sc.D.
Professor of Meteorology

Address..........................Massachusetts Institute of Technology
Cambridge, Mass. 02139

Time..........................10:00 a.m., December 29, 1972

Place..........................Sheraton Park Hotel, Wilmington Room

Program..........................AAAS Section on Environmental Sciences
New Approaches to Global Weather: GARP
(The Global Atmospheric Research Program)

Convention Address...............Sheraton Park Hotel

RELEASE TIME
10:00 a.m., December 29

Fonte: American Association for the Advancement of Science (1972)

Sempre que falamos de caos em um atrator estranho estamos nos referindo a um sistema dissipativo. Neste ponto deixamos claro que utilizamos o Atrator de Lorenz apenas como um exemplo motivacional para o caos, pois os sistemas que vamos abordar ao longo dessa tese são hamiltonianos e não dissipativos.

2.2 SISTEMAS HAMILTONIANOS

Nesta seção, considere: $U \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^{2N}$, onde U é aberto em $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Um ponto de U é denotado por $\mathbf{x} = (q_1, q_2, \cdots, q_N, p_1, p_2, \cdots, p_N)$, onde q_i e p_i, para $i \in \{1, 2, \cdots, N\}$, são, respectivamente, coordenadas de posição e de movimento.

Definição 2.13. *Uma Função Hamiltoniana é uma aplicação $H : U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável e de classe C^2.*

Definição 2.14. *Dada uma Função Hamiltoniana $H : U \longrightarrow \mathbb{R}$, o Campo Vetorial Hamiltoniano associado $\chi_H : U \longrightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ é definido por*

$$\chi_H(q_1, \cdots, q_N, p_1, \cdots, p_N) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \cdots, \frac{\partial H}{\partial p_N}, \cdots, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \cdots, -\frac{\partial H}{\partial q_N} \right)$$

Este campo associa-se ao seguinte sistema de equações diferenciais de 1ª ordem:

$$\begin{cases} \dfrac{dq_k}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \\ \dfrac{dp_k}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_k} \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $q_k(t)$ *e* $p_k(t)$ *são as coordenadas de posição e movimento, respectivamente, e* $k \in \{1, 2, ..., N\}$.

O sistema (2.1) é denominado Sistema Dinâmico Hamiltoniano com N *Graus de Liberdade.*

2.2.1 ESTRUTURA SIMPLÉTICA LINEAR

Definição 2.15. *Uma Estrutura Simplética do* $\mathbb{R}^{2N}$ *é uma matriz* $J \in M_{2N}(\mathbb{R})$ *da forma* $J = \begin{pmatrix} 0_N & I_N \\ -I_N & 0_N \end{pmatrix}$, *onde* 0_N *é a matriz nula de ordem* N *e* I_N *é a matriz identidade de ordem* N.

Proposição 2.1. *Sendo* $J \in M_{2N}(\mathbb{R})$ *Estrutura Simplética de* $\mathbb{R}^{2N}$, *são verdadeiras:*

(i) $J^2 = -I_{2N}$

(ii) $J^{-1} = J^T = -J$, *onde* T *denota transposição e* -1 *inversão de matrizes.*

Denotando $\triangledown H := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \\ \\ \dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \end{pmatrix}$, onde $\mathbf{q} = (q_1, \cdots, q_N)$ e $\mathbf{p} = (p_1, \cdots, p_N)$, podemos expressar o Campo Hamiltoniano da seguinte maneira:

$$\chi_H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ \\ -\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_N & I_N \\ -I_N & 0_N \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \\ \\ \dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \end{pmatrix} = J. \triangledown H$$

Definição 2.16. *Denomina-se Matriz Simplética com Multiplicidade* k *(ou Matriz* k*-Simplética), matrizes* $S \in M_{2N}(\mathbb{R})$ *tais que*

$$S^T.J.S = k.J$$

onde J *é Estrutura Simplética do* $\mathbb{R}^{2N}$ *e* $k \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Observação 2.2. *Na Definição 2.16, quando* $k = 1$ *a matriz denomina-se simplesmente Simplética.*

Observação 2.3. *Observa-se que a matriz I_N é simplética.*

Proposição 2.2. *Se $S \in M_{2N}(\mathbb{R})$ é simplética e $detS \neq 0$, então S^{-1} é simplética.*

Demonstração. Pela Observação 2.3, temos:

$$I^T.J.I = J$$

Como $S.S^{-1} = I$, temos

$$(S.S^{-1})^T.J.(S.S^{-1}) = J \Longrightarrow (S^{-1})^T.S^T.J.S.S^{-1} = J$$

E como S é, por hipótese, simplética, temos $S^T.J.S = J$, o que implica

$$(S^{-1})^T.J.S^{-1} = J$$

Portanto S^{-1} é simplética. □

Proposição 2.3. *Se $S \in M_{2N}(\mathbb{R})$ e $P \in M_{2N}(\mathbb{R})$ são simpléticas, então $S.P$ e $P.S$ também são simpléticas.*

Demonstração. Mostremos que $S.P$ é simplética (para $P.S$ a demonstração é análoga!).

Como P é simplética, temos:

$$P^T.J.P = J$$

Mas $J = S^T.J.S$, pois S também é simplética. Logo,

$$P^T.(S^T.J.S).P = J \Longrightarrow (S.P)^T.J.(S.P) = J$$

Portanto $S.P$ é simplética. □

Definição 2.17. *Uma aplicação $F : \mathbb{R}^{2N} \longrightarrow \mathbb{R}^{2N}$ é simplética, quando a Matriz Jacobiana $M = \bigtriangledown F(x) = \dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_{2N}} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_{2N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_{2N}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_{2N}}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_{2N}}{\partial x_{2N}} \end{pmatrix}$ é matriz simplética, ou seja, $M^T.J.M = J$.*

Observação 2.4. *O conjunto das matrizes simpléticas, considerando a operação multiplicação de matrizes, forma um grupo (no sentido algébrico) que usualmente é denotado por* S_p.

Definição 2.18. *A forma bilinear* $\Omega : \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^{2N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$\Omega(v,w) =< \boldsymbol{v}, J\boldsymbol{w} >= \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_{2N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_N & I_N \\ -I_N & 0_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{2N} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{N} (v_j.w_{N+j} - v_{N+j}.w_j),$$

é denominada Forma Canônica Simplética.

Proposição 2.4. *Sejam* $\boldsymbol{v} = (v_1, \cdots, v_{2N})$ *e* $\boldsymbol{w} = (w_1, \cdots, w_{2N})$ *em* $\mathbb{R}^{2N}$ *e* J *Estrutura Simplética de* $\mathbb{R}^{2N}$. *Então* $< \boldsymbol{v}, J\boldsymbol{w} >= - < J\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} >$.

Demonstração. De fato,

$$< \mathbf{v}, J\mathbf{w} >= \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_{2N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_N & I_N \\ -I_N & 0_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{2N} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{N} (v_j.w_{N+j} - v_{N+j}.w_j)$$

$$< J\mathbf{v}, \mathbf{w} >= \begin{pmatrix} 0_N & I_N \\ -I_N & 0_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{2N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & \cdots & w_{2N} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{N} (v_{N+j}.w_j - v_j.w_{N+j})$$

Como $\sum_{j=1}^{N} (v_j.w_{N+j} - v_{N+j}.w_j) = -\sum_{j=1}^{N} (v_{N+j}.w_j - v_j.w_{N+j})$, segue que $< \mathbf{v}, J\mathbf{w} >= - < J\mathbf{v}, \mathbf{w} >$. □

Corolário 2.1. *Sejam* $\boldsymbol{v} = (v_1, \cdots, v_{2N}) \in \mathbb{R}^{2N}$ *e* $\Omega : \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^{2N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *a Forma Canônica Simplética. Então* $\Omega(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$.

Demonstração. Como, pela Proposição 2.4, $\Omega(\mathbf{v}, \mathbf{v}) =< \mathbf{v}, J\mathbf{v} >= - < J\mathbf{v}, \mathbf{v} >= -\Omega(\mathbf{v}, \mathbf{v})$, segue que $\Omega(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$. □

2.2.2 SUPERFÍCIE DE ENERGIA

Teorema 2.1 (Teorema da Conservação de Energia)**.** *Se* $t \longmapsto (\boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{p}(t))$ *para* t *em algum intervalo real* I *for uma curva integral de (2.1), então existe uma constante real* E *de modo que* $H(\boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{p}(t)) = E$.

Demonstração. Derivando a Função Hamiltoniana em relação ao tempo, teremos o resultado zero, que mostra o teorema:

$$\frac{dH}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} \right) =< \nabla H, J \nabla H >= \Omega(\nabla H, \nabla H) = 0$$

□

Observação 2.5. *Nas hipóteses do Teorema 2.1, a Função Hamiltoniana é chamada de uma integral primeira.*

Dizemos, quando aplicado o Teorema 2.1, que H é uma Constante de Movimento. Neste caso é dito que o Sistema Hamiltoniano (2.1) é conservativo, e dizemos simplesmente que H representa a energia do sistema.

Assim, o conjunto definido como $\Sigma_h = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in U / H(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = h\}$, para $h \in \mathbb{R}$, é conhecido como superfície de energia. Note que o fato de H ser uma integral primeira, implica que as soluções do sistemas estão em Σ_h, para algum h. Desse modo, Σ_h é um conjunto invariante. O espaço de fase dado pela superfície de energia pode ser Euclidiano (ou um subconjunto dele) ou Não Euclidiano, tal como uma esfera, um toro ou outra variedade diferenciável.

2.3 EQUAÇÕES VARIACIONAIS QUE GOVERNAM A EVOLUÇÃO DE VETORES DE DESVIO

Vamos discutir, neste momento, sobre as equações variacionais que governam a evolução temporal de vetores de desvios em sistemas contínuos ou discretos. Para isso, consideremos um Sistema Hamiltoniano Autônomo de N graus de liberdade com a Função Hamiltoniana:

$$H(q_1, q_2, ..., q_N, p_1, p_2, ..., p_N) = h = constante \tag{2.2}$$

com q_i e p_i tais que $i \in \{1, 2, ..., N\}$.

Uma órbita, no espaço de fase $2N$-dimensional E deste sistema, é dada pelo vetor $\mathbf{x}(t) = (q_1(t), q_2(t), \cdots, q_N(t), p_1(t), p_2(t), \cdots, p_N(t))$ com $x_i = q_i$ e $x_{i+N} = p_i$, $i \in \{1, 2, \cdots, N\}$.

O tempo de evolução desta órbita é governado pelas Equações Hamiltonianas de Movimento, que na forma matricial são descritas por

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} & -\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \end{pmatrix} = \bigtriangledown H . J^T \tag{2.3}$$

onde $\bigtriangledown H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial q_1} & \dfrac{\partial H}{\partial q_2} & \cdots & \dfrac{\partial H}{\partial q_N} & \dfrac{\partial H}{\partial p_1} & \dfrac{\partial H}{\partial p_2} & \cdots & \dfrac{\partial H}{\partial p_N} \end{pmatrix}$ e T indica transposição de matriz. A matriz J é Estrutura Simplética do $\mathbb{R}^{2N}$:

$$J = \begin{pmatrix} 0_N & I_N \\ -I_N & 0_N \end{pmatrix}$$

onde I_N é a matriz identidade de ordem N e 0_N é a matriz nula de ordem N.

Considerando a órbita $\mathbf{x}(t)$ no espaço de fase $2N$-dimensional, juntamente com uma outra órbita vizinha, com condições iniciais x_0 e $x_0 + \Delta_0$, respectivamente, com Δ_0

tão pequeno quanto se queira, temos que elas evoluem com o tempo formando o vetor tangente $\Delta \mathbf{x}(x_0, t)$, com a norma Euclidiana $d(x_0) = ||\Delta \mathbf{x}(x_0, t)||$.

Um vetor de desvio $\mathbf{w}(0) = (\Delta x_1(0), \Delta x_2(0), \cdots, \Delta x_{2N}(0))$ inicial de uma órbita $\mathbf{x}(t)$, evolui no espaço tangente $T \times E$ de E de acordo com as Equações Variacionais

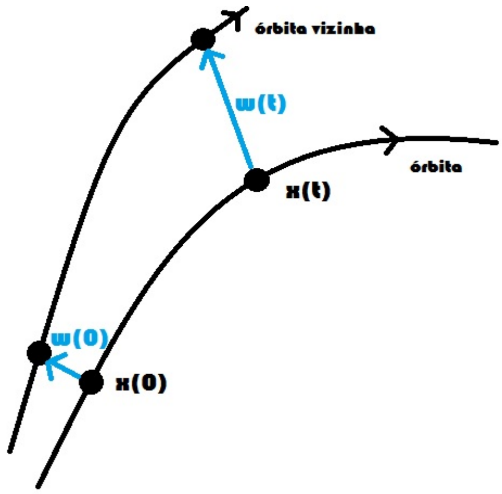
$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = [\Omega. \bigtriangledown^2 H(\mathbf{x}(t))].\mathbf{w} := B(t).\mathbf{w} \tag{2.4}$$

com $\mathbf{w} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_{2N})^T$ e $\bigtriangledown^2 H(\mathbf{x}(t))$ indicando a Matriz Hessiana[2] do Hamiltoniano (2.2) calculada em relação a órbita $\mathbf{x}(t)$, isto é,

$$\bigtriangledown^2 H(\mathbf{x}(t))_{i,j} = \frac{\partial_2 H}{\partial x_i \partial x_j}|_{\mathbf{x}(t)}$$

onde $i, j \in \{1, 2, ..., 2N\}$. Vide Figura 4 para uma representação da evolução temporal de um vetor de desvio.

Figura 4 – Uma representação para a evolução temporal de um vetor de desvio.



Fonte: o autor.

Note que (2.4) forma um conjunto de equações diferenciais em relação a $\mathbf{w}$, tendo coeficientes que dependem do tempo, uma vez que $B(t)$ depende da órbita (que é função do tempo).

A solução de (2.4) pode ser escrita como

$$\mathbf{w}(t) = Y(t).\mathbf{w}(0)$$

onde $Y(t)$ é denominada de Matriz Fundamental de Soluções de (2.4) e satisfaz

$$\dot{Y}(t) = \bigtriangledown f(\mathbf{x}(t)).Y(t) = A(t).Y(t)$$

com $Y(0) = I_{2N}$.

[2] Vide Massago (2010) para detalhes sobre Matriz Hessiana.

Consideremos agora o caso onde o tempo é discreto ($t = n \in \mathbb{N}$) em um sistema dinâmico conservativo.

A evolução de uma órbita no espaço $2N$-dimensional E de uma Aplicação Simplética $F : \mathbb{R}^{2N} \longrightarrow \mathbb{R}^{2N}$ é governada pela equação diferencial

$$\mathbf{x}(n+1) \equiv \mathbf{x}_{n+1} = F(\mathbf{x}_n) \tag{2.5}$$

Neste caso, a evolução de um vetor de desvio $\mathbf{w}(n) \equiv \mathbf{w}_n$, em respeito a órbita $\mathbf{x}_n$, é dada pela Aplicação Tangente

$$\mathbf{w}(n+1) \equiv \mathbf{w}_{n+1} = \frac{\partial F(\mathbf{x}_n)}{\partial x}.\mathbf{w}_n \tag{2.6}$$

2.4 FERRAMENTAS MATEMÁTICAS DETECTORAS DE ORDEM E CAOS

O problema da distinção entre comportamento ordenado ou caótico em sistemas dinâmicos é essencial para o estudo da área. Sendo assim, necessitamos conhecer ferramentas matemáticas que nos ajudem a identificar movimentos ordenados ou caóticos na característica de uma órbita.

Nesta seção apresentaremos três destas ferramentas:

(i) O Métodos dos LCEs (Expoentes Característicos de Lyapunov)

(ii) O Método SALI (Menor Índice de Alinhamento)

(iii) O Método GALI (Índice de Alinhamento Generalizado)

O objetivo, neste momento, não é dar um tratamento excessivamente formal a cada uma delas. As definições dos três métodos serão apresentadas, assim como os seus principais resultados. Para o Método dos LCEs, um tratamento formal e completo pode ser consultado em Skokos (2010b). Já os Métodos SALI e GALI, estão descritos em detalhes no Apêndice C.

2.4.1 O MÉTODO DOS LCES (EXPOENTES CARACTERÍSTICOS DE LYAPUNOV)

Os Expoentes Característicos de Lyapunov (ou LCEs, devido à *Lyapunov Characteristic Exponents*), são muito importantes para o estudo de sistemas dinâmicos, pois constituem a forma mais clássica para se fazer distinção entre comportamentos ordenados ou caóticos no espaço de fase conforme t evolui.

A grosso modo, os LCEs de uma determinada órbita descrevem a taxa de separação desta com outras órbitas vizinhas.

A definição matemática dos LCEs possui suporte no Teorema Multiplicativo de Oseledec (Oseledec, 1968). Não nos aprofundaremos na teoria dos LCEs, porém, tal apresentação pode ser encontrada detalhadamente em Skokos (2010b), juntamente com as demonstrações das propriedades que serão apresentadas adiante.

O fluxo de $\mathbf{x}(t)$ de um sistema autônomo de primeira ordem é dado por:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = F(\mathbf{x}(t))$$

onde F é o campo de velocidade. Considerando a órbita em um espaço de fase $2N$-dimensional E, juntamente com uma outra órbita, vizinha à primeira, com condições iniciais x_0 e $x_0 + \Delta_0$, respectivamente, com Δ_0 tão pequeno quanto se queira, temos que elas evoluem com o tempo formando o vetor tangente $\Delta\mathbf{x}(x_0, t)$, com a norma Euclidiana:

$$d(x_0) = ||\Delta\mathbf{x}(x_0, t)||$$

Denotando $\Delta\mathbf{x} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_{2N}) \equiv \mathbf{w}$, temos um vetor de desvio, cujo a evolução temporal é conseguida pelas Equações Variacionais (2.4).

A taxa média de divergência exponencial destas duas órbitas vizinhas é dada por:

$$L = L(\mathbf{x}_0, \mathbf{w}) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{||\mathbf{w}(t)||}{||\mathbf{w}(0)||} \tag{2.7}$$

Desta definição, seguem as propriedades:

a) L existe e é finito;

b) Existe uma base $\hat{e}_i$ $2N$-dimensional para o espaço de fase E tal que, para todo $\mathbf{w}$, L assume um dos $2N$ valores $L_i(\mathbf{x}_0) = L(\mathbf{x}_0, \hat{e}_i)$, $\forall i \in \{1, 2, \cdots, 2N\}$, os L_i's são chamados Exponentes Característicos de Lyapunov (LCEs) e o conjuto de todos estes expoentes é chamado de Espectro de Liyapunov;

c) Os LCEs obedecem a ordenação $L_1 \geq L_2 \geq \cdots \geq L_{2N}$;

d) Se $L_1 \equiv L_{max}$ (Máximo Expoente Característico de Lyapunov) for positivo, ou seja, $L_1 > 0$, então a órbita será caótica;

e) Se $L_1 \equiv L_{max}$ for nulo, ou seja $L_1 = 0$, então a órbita será ordenada.

2.4.2 O MÉTODO SALI (MENOR ÍNDICE DE ALINHAMENTO)

O Método do Menor Índice de Alinhamento (ou SALI, devido à *Smaller Alignment Index*), foi originalmente desenvolvido para distinguir órbitas ordenadas ou caóticas em Sistemas Hamiltonianos e Aplicações Simpléticas (Skokos, 2001; Skokos et al., 2002; Skokos et al., 2004; Skokos et al., 2003).

Para calculá-lo, segue-se, simultaneamente, a evolução temporal de uma órbita de referência juntamente com dois vetores de desvio com condições iniciais $\mathbf{w}_1(0)$ e $\mathbf{w}_2(0)$, normalizando-os da seguinte maneira:

$$\widehat{\mathbf{w}}_i(t) = \frac{\mathbf{w}_i(t)}{||\mathbf{w}_i(t)||}$$

para $i \in \{1, 2\}$ e $||.||$ denotando a norma Euclidiana usual.

SALI é definido como:

$$SALI(t) = min\{||\widehat{\mathbf{w}}_1(t) + \widehat{\mathbf{w}}_2(t)||, ||\widehat{\mathbf{w}}_1(t) - \widehat{\mathbf{w}}_2(t)||\} \tag{2.8}$$

Pode ser demonstrado (Skokos, 2001; Skokos et al., 2004), que no caso de órbitas caóticas, os vetores de desvio $\widehat{\mathbf{w}}_1$ e $\widehat{\mathbf{w}}_2$, eventualmente, se alinham na direção definida pelo Máximo Expoente Característico de Lyapunov (MLE) e $SALI(t)$ cai exponencialmente para zero:

$$SALI(t) \propto e^{-(L_1 - L_2)t}$$

com L_1 e L_2 os maiores LCEs.

Também, segundo Skokos e Bountis (2012), quando o comportamento é ordenado, a órbita se desenvolve sobre um toro e, eventualmente, os vetores $\widehat{w}_1$ e $\widehat{w}_2$ caem no espaço tangente ao toro, seguindo uma t^{-1} dependência temporal. Neste caso, o SALI oscila em valores não nulos (Skokos, 2001; Skokos et al., 2004), ou seja:

$$SALI(t) \approx constante > 0, t \longrightarrow \infty$$

Podemos, desse modo, ter uma distinção clara entre comportamentos ordenados e caóticos.

2.4.3 O MÉTODO GALI (ÍNDICE DE ALINHAMENTO GENERALIZADO)

O Método do Índice de Alinhamento Generalizado (ou GALI, devido à *Generalized Alignment Index*) é, como o nome sugere, uma generalização do Método SALI, onde são utilizados k vetores de desvio de uma órbita em vez de apenas dois (Skokos; Bountis; Antonopoulos, 2007).

O Índice de Alinhamento Generalizado de Ordem k, denotado por $GALI_k$, onde $2 \leq k \leq 2N$, é determinado através da evolução de k vetores de desvio inicialmente linearmente independentes, $\mathbf{w}_i(0)$, $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$. A exemplo do Método SALI, os vetores de desvio $\mathbf{w}_i(t)$ são normalizados desta forma:

$$\widehat{\mathbf{w}}_i(t) = \frac{\mathbf{w}_i(t)}{||\mathbf{w}_i(t)||}$$

onde $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$ e $||.||$ denota a norma Euclidiana usual.

$GALI_k$ é definido como:

$$GALI_k(t) = ||\widehat{\mathbf{w}}_1(t) \wedge \widehat{\mathbf{w}}_2(t) \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathbf{w}}_k(t)|| \tag{2.9}$$

onde $\wedge$ indica o produto exterior[3] entre vetores.

Da definição de $GALI_k$ temos que se, pelo menos, dois vetores de desvio se tornam linearmente dependentes, o produto exterior se torna zero e $GALI_k$ é nulo.

No caso de órbitas caóticas, todos os vetores de desvio tendem a ser linearmente dependentes, se alinhando na direção definida pelo Máximo Expoente Característico de Lyapunov (MLE), e $GALI_k$ tende a zero exponencialmente segundo a lei:

$$GALI_k(t) \propto e^{-[(L_1-L_2)+(L_1-L_3)+\cdots+(L_1-L_k)]t}$$

com $L_1, \cdots, L_k$ sendo os k maiores LCEs.

Já no caso de órbitas regulares, tais órbitas, no espaço de fase, estão retidas em um toro $2N$-dimensional. Para $m \leq k$ vetores de desvio tomados inicialmente no espaço tangente ao toro, temos que:

$$GALI_k(t) \propto \begin{cases} constante, \; se \; 2 \leq k \leq N \\ \\ \dfrac{1}{t^{2(k-N)-m}}, \; se \; N < k \leq 2N \; e \; 0 \leq m \leq k-N \\ \\ \dfrac{1}{t^{k-N}}, \; se \; N < k \leq 2N \; e \; m \geq k-N \end{cases} \tag{2.10}$$

onde $m \leq N$ e $m \leq k$.

[3] Vide Bassalo e Cattani (2009) para detalhes sobre produto exterior.

3 CONCEPÇÕES BÁSICAS DA TEORIA DO POTENCIAL

3.1 POTENCIAL DE UM CAMPO VETORIAL

Definição 3.1. *Um campo vetorial é uma função vetorial* $\boldsymbol{F} : V \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *contínua.*

Definição 3.2. *O trabalho de um campo vetorial* $\boldsymbol{F} : V \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *ao longo de uma curva* C *é definido como sendo a integral de linha*

$$W(C) = \int_C \boldsymbol{F} \cdot dP \tag{3.1}$$

onde a curva C *é suposta diferenciável por partes, isto é,* C *é a imagem do intervalo* $[0, 1]$ *pela função vetorial* $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ *onde* $x(t), y(t)$ *e* $z(t)$ *são funções diferenciáveis por partes.*

Sendo $F(x, y, z) = (L(x, y, z), M(x, y, z), N(x, y, z))$, a equação (3.1) pode ser escrita como

$$W(C) = \int_C L(x, y, z)dx + M(x, y, z)dy + N(x, y, z)dz$$

Definição 3.3. *Um campo vetorial* $\boldsymbol{F} : V \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *é dito derivar de um potencial se existe uma função escalar* $\Phi : W \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *continuamente diferenciável tal que* $\boldsymbol{F} = \bigtriangledown\Phi$. *A função* Φ *é chamada de potencial do campo* $\boldsymbol{F}$.

3.2 CAMPOS VETORIAIS CONSERVATIVOS

Definição 3.4. *Um campo vetorial* $\boldsymbol{F} : V \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *é chamado de conservativo quando* $W(C) = \int_C \boldsymbol{F} \cdot dP$ *for independente de caminhos, isto é,* $W(C_1) = W(C_2)$ *para quaisquer curvas* C_1 *e* C_2 *que possuam os mesmos pontos iniciais e finais.*

Dada a Definição 3.4, é possível demonstrar alguns fatos sobre campos vetoriais conservativos.

Teorema 3.1. *Um campo vetorial* $\boldsymbol{F}$ *é conservativo se, e somente se,* $\boldsymbol{F}$ *deriva de um potencial.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Seja $\mathbf{F} = (L, M, N)$ um campo vetorial conservativo. Para provar que $\mathbf{F} = \bigtriangledown\Phi$, basta provar que $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = L$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = M$ e $\dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = N$.

Temos que a função

$$\Phi(P) = \int_{P_0}^{P} \mathbf{F} \cdot dP$$

independe da curva que liga P_0 a P.

Considere $P(x,y,z)$ e $P+\triangle P=(x+h,y,z)$, então

$$\frac{\triangle\Phi}{\triangle x}=\frac{\Phi(P+\triangle P)-\Phi(P)}{h}=\frac{1}{h}(\Phi(P+\triangle P)-\Phi(P))=\frac{1}{h}(\int_{P_0}^{P+\triangle P}\mathbf{F}\cdot dP-\int_{P_0}^{P}\mathbf{F}\cdot dP)=$$

$$=\frac{1}{h}(-\int_{P_0}^{P}\mathbf{F}\cdot dP+\int_{P_0}^{P+\triangle P}\mathbf{F}\cdot dP)=\frac{1}{h}(\int_{P}^{P_0}\mathbf{F}\cdot dP+\int_{P_0}^{P+\triangle P}\mathbf{F}\cdot dP)=\frac{1}{h}(\int_{P}^{P+\triangle P}\mathbf{F}\cdot dP)=$$

$$\frac{1}{h}(\int_{x}^{x+h}Ldx+\int_{y}^{y}Mdy+\int_{z}^{z}Ndz)=\frac{1}{h}(\int_{x}^{x+h}Ldx)$$

e pelo Teorema do Valor Médio para Integrais, temos

$$\frac{\triangle\Phi}{\triangle x}=L(x+Ah,y,z)$$

$$0\leqslant A\leqslant 1$$

Pela continuidade de L, fazendo h tender a zero, obtém-se $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=L$.

Agora considere $P(x,y,z)$ e $P+\triangle P=(x,y+h,z)$, então

$$\frac{\triangle\Phi}{\triangle y}=\frac{\Phi(P+\triangle P)-\Phi(P)}{h}=\frac{1}{h}(\Phi(P+\triangle P)-\Phi(P))=\frac{1}{h}(\int_{P_0}^{P+\triangle P}\mathbf{F}\cdot dP-\int_{P_0}^{P}\mathbf{F}\cdot dP)=$$

$$=\frac{1}{h}(-\int_{P_0}^{P}\mathbf{F}\cdot dP+\int_{P_0}^{P+\triangle P}\mathbf{F}\cdot dP)=\frac{1}{h}(\int_{P}^{P_0}\mathbf{F}\cdot dP+\int_{P_0}^{P+\triangle P}\mathbf{F}\cdot dP)=\frac{1}{h}(\int_{P}^{P+\triangle P}\mathbf{F}\cdot dP)=$$

$$\frac{1}{h}(\int_{x}^{x}Ldx+\int_{y}^{y+h}Mdy+\int_{z}^{z}Ndz)=\frac{1}{h}(\int_{y}^{y+h}Mdy)$$

e pelo Teorema do Valor Médio para Integrais, temos

$$\frac{\triangle\Phi}{\triangle x}=M(x,y+Ah,z)$$

$$0\leqslant A\leqslant 1$$

Pela continuidade de M, fazendo h tender a zero, obtém-se $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=M$.

Por fim considere $P(x,y,z)$ e $P+\triangle P=(x,y,z+h)$, então

$$\frac{\triangle\Phi}{\triangle z}=\frac{\Phi(P+\triangle P)-\Phi(P)}{h}=\frac{1}{h}(\Phi(P+\triangle P)-\Phi(P))=\frac{1}{h}(\int_{P_0}^{P+\triangle P}\mathbf{F}\cdot dP-\int_{P_0}^{P}\mathbf{F}\cdot dP)=$$

$$=\frac{1}{h}(-\int_{P_0}^{P}\mathbf{F}\cdot dP+\int_{P_0}^{P+\triangle P}\mathbf{F}\cdot dP)=\frac{1}{h}(\int_{P}^{P_0}\mathbf{F}\cdot dP+\int_{P_0}^{P+\triangle P}\mathbf{F}\cdot dP)=\frac{1}{h}(\int_{P}^{P+\triangle P}\mathbf{F}\cdot dP)=$$

$$\frac{1}{h}(\int_{x}^{x}Ldx+\int_{y}^{y}Mdy+\int_{z}^{z+h}Ndz)=\frac{1}{h}(\int_{z}^{z+h}Ndz)$$

e pelo Teorema do Valor Médio para Integrais, temos

$$\frac{\triangle\Phi}{\triangle x}=N(x,y,z+Ah)$$

$$0 \leqslant A \leqslant 1$$

Pela continuidade de N, fazendo h tender a zero, obtém-se $\dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = N$.

Portanto, $\mathbf{F} = \bigtriangledown \Phi$. Ou seja, $\mathbf{F}$ deriva de um potencial Φ.

($\Leftarrow$) Seja C uma curva $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ com ponto inicial P_0 e ponto final P_1, isto é, $P(0) = P_0$ e $P(1) = P_1$.

Então, como $\mathbf{F} = \bigtriangledown \Phi$, temos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot dP = \int_C \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz$$

ou, desde que C seja diferenciável por partes

$$\int_C \mathbf{F} \cdot dP = \int_0^1 (\frac{\partial \Phi}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z'(t)) dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \Phi(P(t)) dt = \Phi(P(1)) - \Phi(P(0)) = \Phi(P_1) - \Phi(P_0)$$

Isto mostra $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservativo, pois $W(C) = \int_C \mathbf{F} \cdot dP$ depende apenas dos pontos inicial e final da curva C.

$\square$

Pode-se entender do Teorema 3.1 que se $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservativo que deriva do potencial Φ, então

$$W(C) = \int_C \mathbf{F} \cdot dP = \int_C \bigtriangledown \Phi \cdot dP = \Phi(P_1) - \Phi(P_0)$$

Outra consequência imediata é que sempre que C for uma curva diferenciável por partes fechada, então

$$W(C) = \oint_C \mathbf{F} \cdot dP = 0$$

O próximo teorema fornece uma condição necessária (mas não suficiente) para que um campo vetorial $\mathbf{F} : V \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ seja conservativo.

Teorema 3.2. *Se $\boldsymbol{F} : V \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é um campo vetorial de classe C^1, então $rot\boldsymbol{F} = (0, 0, 0)$.*

Demonstração. Considere $\mathbf{F} = (L, M, N)$ o campo conservativo derivado do potencial Φ. Desse modo, temos que $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = L$, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = M$ e $\dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = N$.

Mostrar que $rot\mathbf{F} = (0, 0, 0)$ é equivalente a mostrar que $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial M}{\partial x}$, $\dfrac{\partial L}{\partial z} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial M}{\partial z} = \dfrac{\partial N}{\partial y}$

Como $\mathbf{F}$ é de classe C^1, resulta que Φ é de classe C^2. Temos então:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = L \Longrightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} \; e \; \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} = \frac{\partial L}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = M \Longrightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial x} \; e \; \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} = \frac{\partial M}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = N \Longrightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial N}{\partial x} \; e \; \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} = \frac{\partial N}{\partial y}$$

Pelo fato de Φ ser C^2, pelo Teorema de Schwarz, segue que

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z}$$

Desse modo, tem-se

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial N}{\partial y}$$

E portanto, segue o resultado. $\square$

Parte II

Fundamentos Astrofísicos

4 GALÁXIAS

4.1 UM POUCO DE HISTÓRIA

As galáxias são gigantescos sistemas formados principalmente por um número enorme de estrelas, com contribuição de matérica escura, gases e poeira, que são mantidas ligadas gravitacionalmente.

A galáxia em que vivemos possui o nome de Via Láctea e é assim chamada por conta de sua aparência leitosa, como um "caminho leitoso"que risca o céu, quando observada a olho nu. Essa forma que cruza o céu com seu fluxo de luz branco e difuso foi, ao longo dos séculos, objetos de muitas lendas e mitos. Os gregos a associavam com um rio de leite que fluía do peito da deusa Hera (esposa de Zeus). A própria palavra "galáxia"é oriunda da palavra grega para descrever leite.

Em 1610, quando Galileu apontou sua luneta para a Via Láctea, pode conferir que, na realidade, apesar da aparência contínua, ela era composta por uma coleção de estrelas que jamais poderiam ser observadas e distinguidas a olho nu.

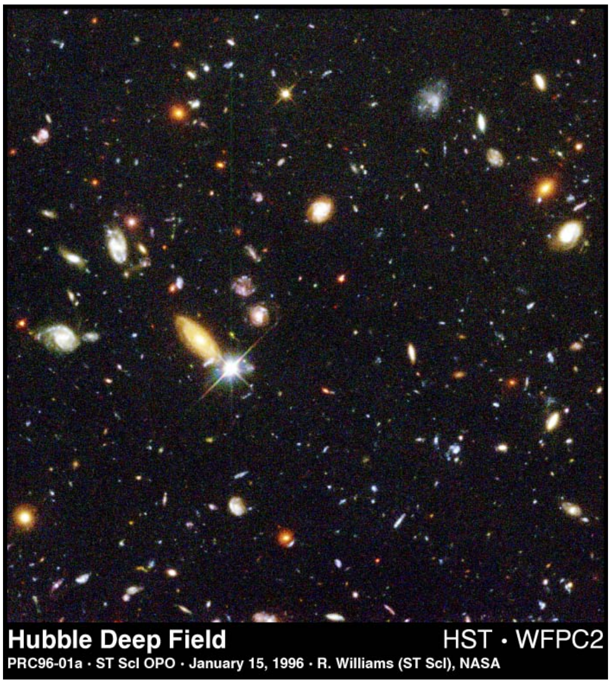
Com a melhoria dos telescópios foi possível então observar um conjunto de nebulosas. Eram objetos que a aparência se diferenciava de estrelas, porém possuíam natureza indefinida para a época. Alguns astrônomos sugeriam que estas estruturas estavam no interior da nossa galáxia, outros defendiam a hipótese de que algumas dessas nebulosas pareciam muito distantes e que estavam definitivamente fora da Via Láctea. Tal confronto de ideias teve o seu ápice em abril de 1920, quando dois astrônomos, Harlow Shapey e Heber Curtis, travaram um debate histórico que ficou conhecido como o "Grande Debate". Shapley defendia que a localização das nebulosas era no interior da Via Láctea e Curtis defendia que as nebulosas estavam no exterior da nossa galáxia.

Progressos na astronomia observacional permitiram a confirmação de que Curtis estava correto. Muitas daquelas nebulosas, de naturezas anteriormente indefinidas, foram confirmadas como sendo galáxias exteriores a nossa.

Desse modo, descobriu-se que a Via Láctea não era a única galáxia presente no Universo. Na verdade, no Universo existem incontáveis galáxias semelhantes a nossa. Cada qual possui sua forma, tamanho e estrutura.

Em 1995, o Telescópio Espacial Hubble capturou uma imagem de uma pequena região na direção da constelação da Ursa Maior. Cerca de 3 mil galáxias foram registradas, mostrando para as pessoas da época que existiam muito mais galáxias do que se havia pensado, com uma grande diversidade de formas e cores. A famigerada imagem, exibida na Figura 5, ficou conhecida como *The Hubble Deep Field*, ou, Campo Profundo do Hubble, em português.

Figura 5 – The Hubble Deep Field

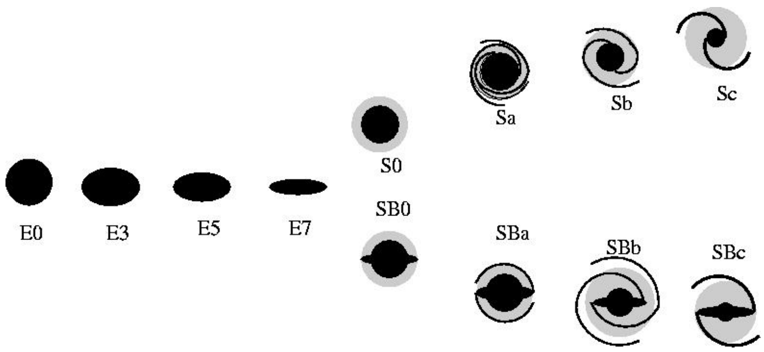


Fonte: Hubble website (2017)

4.2 CLASSIFICAÇÃO DAS GALÁXIAS

Em meados do século XX, o número de galáxias descobertas foi tamanho que Edwin Hubble, em 1926, decidiu criar uma classificação morfológica para elas (Hubble, 1926). Dessa forma, as várias galáxias conhecidas seriam divididas em grupos de acordo com a sua forma visual. A classificação de Hubble não é a única classificação para galáxias, porém ainda é usada com frequência nos dias atuais. Hubble dividiu as galáxias nas seguintes categorias: espirais, espirais barradas, elípticas e irregulares, conforme Figura 6.

Figura 6 – Classificação de Hubble



Fonte: Oliveira Filho e Saraiva (2013)

4.2.1 ESPIRAIS (S0,SA,SB E SC)

Quando visualizadas de frente, estas galáxias possuem uma estrutura em forma de espiral muito nítida. Normalmente, tais galáxias possuem bojo, disco, halo e braços que se desenvolvem no formato espiral. Vide Figura 7 para um exemplo de galáxia espiral.

Como visto na Figura 6, as galáxias espirais se diferenciam entre si de acordo com o tamanho de seu bojo e o desenvolvimento dos braços espirais.

- S0: Possuem o bojo muito grande e braços espirais que não se fazem notar.
- Sa: Possuem o bojo grande e braços com espirais pequenas e bem enroladas.
- Sb: Possuem bojo mediano e braços espirais bem desenvolvidos com uma abertura média.
- Sc: Possuem bojo pequeno e braços espirais bem desenvolvidos com uma abertura grande.

Figura 7 – M51 - Galáxia Espiral

Fonte: Hubble website (2017)

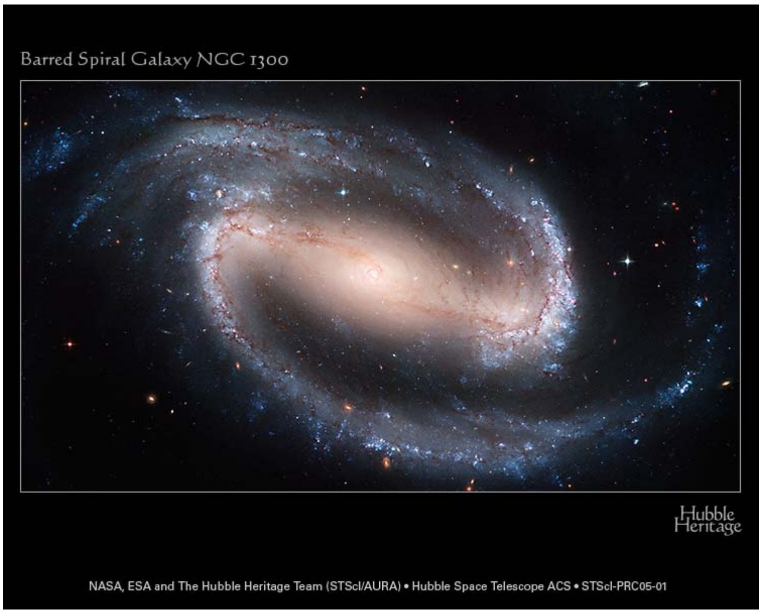
4.2.2 ESPIRAIS BARRADAS (SB0, SBA, SBB E SBC)

Estima-se que 65% das galáxias possuam uma estrutura elipsoidal central, atravessando o bojo, denominada de barra (Eskridge et al., 2000; Sheth et al., 2003). Normalmente, nas galáxias espirais barradas, os braços partem das extremidades das barras. Vide Figura 8 para um exemplo de galáxia espiral barrada.

Como visto na Figura 6, as galáxias espirais barradas se diferenciam entre si de acordo com o tamanho do conjunto entre bojo e barra e o desenvolvimento dos braços espirais.

- SB0: Possuem bojo e barra muito grandes e braços espirais que não se fazem notar.
- SBa: Possuem bojo e barra grandes e braços com espirais pequenas com uma abertura pequena.
- SBb: Possuem bojo e barra medianos e braços espirais bem desenvolvidos com uma abertura média.
- SBc: Possuem bojo pequeno, barra grande e braços espirais bem desenvolvidos com uma abertura grande.

Figura 8 – NGC1300 - Galáxia Espiral Barrada (SBc)



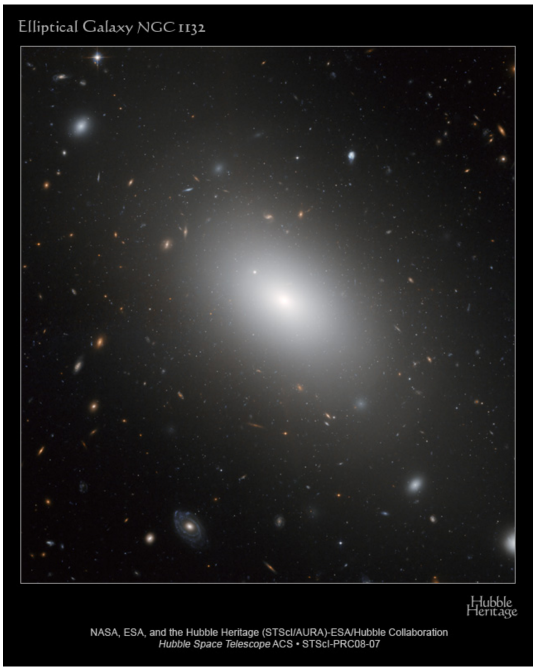
Fonte: Hubble website (2017)

4.2.3 ELÍPTICAS (E0 ATÉ E7)

As galáxias elípticas são galáxias que possuem uma forma elipsoidal e não apresentam braços espirais. Vide Figura 9 para um exemplo de galáxia elíptica.

Hubble classificou as galáxias elípticas como En, onde $n = \frac{10(a-b)}{a}$, sendo a o semi-eixo maior e b o semi-eixo menor. Dessa forma $E0$ indica uma galáxia esférica e, conforme mais "achatado"o formato da galáxia, maior o n na nomenclatura En.

Figura 9 – NGC1132 - Galáxia Elíptica



Fonte: Hubble website (2017)

4.2.4 IRREGULARES

Galáxias com estruturas morfológicas que não se enquadram nas classificações apresentadas anteriormente são denominadas irregulares. Vide Figura 10 para um exemplo de galáxia irregular.

Geralmente as galáxias dessa classe são menores em relação as galáxias que se enquadram nas demais classificações.

Figura 10 – NGC1427A - Galáxia Irregular

Fonte: Hubble website (2017)

5 POTENCIAL GRAVITACIONAL DE UMA GALÁXIA BARRADA

5.1 POTENCIAL GRAVITACIONAL

As equações clássicas para o estudo do movimento e interação de N-Corpos provenientes da Lei da Gravitação Universal de Isaac Newton são:

$$\frac{dv_i}{dt} = -\sum_{j=1}^{N} \frac{Gm_i m}{|x_j - x_i|^3}(x_j - x_i) \tag{5.1}$$

para $j \neq i = 1, \cdots, N$ e $v_i = \dfrac{dx_i}{dt}$, onde o i-ésimo corpo está se movendo de acordo com as atrações gravitacionais de sua vizinhança. Note que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{v}$ representam, respectivamente, a posição e a velocidade do corpo em um espaço 3-Dimensional.

Porém, nesta tese, o intuito não é realizar um estudo do movimento de N-Corpos simultâneos, mas sim o movimento de partículas de testes individuais colocadas sobre um campo gravitacional contínuo que representa uma distribuição de todos os demais corpos.

Para tanto, existe a necessidade de adaptar a equação (5.1) utilizando uma distribuição de densidade $\rho(\mathbf{x'})$ no lugar de m_i e consequentemente transformando a somatória em uma integral volumétrica. Desse modo, a aceleração de uma partícula individual por unidade de massa na posição $\mathbf{x}$ é dada por:

$$\mathbf{a(x)} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\int_V \frac{G\rho(\mathbf{x'})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x'}|^3}(\mathbf{x} - \mathbf{x'})d^3\mathbf{x'} \tag{5.2}$$

É possível simplificar a expressão dada em (5.2) utilizando a identidade

$$\bigtriangledown_{\mathbf{x}}\left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x'}|}\right) = -\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x'}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x'}|^3} \tag{5.3}$$

para $\mathbf{x} \neq \mathbf{x'}$

Desse modo, tem-se

$$\mathbf{a(x)} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\int_V \frac{G\rho(\mathbf{x'})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x'}|^3}(\mathbf{x} - \mathbf{x'})d^3\mathbf{x'} = \bigtriangledown_{\mathbf{x}} \int_V \frac{G\rho(\mathbf{x'})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x'}|}d^3\mathbf{x'} \tag{5.4}$$

Tomando

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\int_V \frac{G\rho(\mathbf{x'})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x'}|}d^3\mathbf{x'} \tag{5.5}$$

a equação (5.4) pode ser simplificada como

$$\mathbf{a(x)} = -\bigtriangledown_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}) \tag{5.6}$$

Perceba que nesta equação temos um campo vetorial conservativo $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, chamado de Campo Gravitacional derivado do (ou gerado pelo) potencial $\Phi(\mathbf{x})$, chamado de Potencial Gravitacional.

A função potencial é muito útil porque é uma função escalar e isso a faz ser fácilmente vizualizada e interpretada, diferente do que ocorre com o campo vetorial. Porém, de acordo com o exibido na equação (5.6), o potencial gravitacional irá oferecer informações essenciais e bem relacionadas com o campo gravitacional.

Pode-se simplificar ainda mais a equação (5.6) fazendo com que o potencial gravitacional deixe de envolver qualquer tipo de integral. Para isso, a seguir, efetuaremos alguns cálculos que nos levarão a duas equações muito importantes.

5.1.1 A EQUAÇÃO DE LAPLACE

O primeiro passo para realizar essa simplificação é aplicar $\nabla^2_{\mathbf{x}}$ em ambos os lados da equação (5.5):

$$\nabla^2_{\mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x}) = \nabla^2_{\mathbf{x}}\left(-\int_V \frac{G\rho(\mathbf{x'})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x'}|}d^3\mathbf{x'}\right) = -\int_V \nabla^2_{\mathbf{x}}\frac{G\rho(\mathbf{x'})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x'}|}d^3\mathbf{x'} \tag{5.7}$$

Usando a identidade (5.3), temos:

$$\nabla^2_{\mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x}) = -\int_V \nabla_{\mathbf{x}}\frac{G\rho(\mathbf{x'})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x'}|^3}(\mathbf{x}-\mathbf{x'})d^3\mathbf{x'} = -\int_V \nabla_{\mathbf{x}}\left(\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x'})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x'}|^3}\right)G\rho(\mathbf{x'})d^3\mathbf{x'} \tag{5.8}$$

Note que

$$\nabla_{\mathbf{x}}\left(\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x'})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x'}|^3}\right) = -\frac{3}{|\mathbf{x}-\mathbf{x'}|^3} + \frac{3(\mathbf{x}-\mathbf{x'})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x'})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x'}|^2|\mathbf{x}-\mathbf{x'}|^3}$$

De onde, para $\mathbf{x} \neq \mathbf{x'}$, segue

$$\nabla_{\mathbf{x}}\left(\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x'})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x'}|^3}\right) = -\frac{3}{|\mathbf{x}-\mathbf{x'}|^3} + \frac{3|\mathbf{x}-\mathbf{x'}|^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{x'}|^2|\mathbf{x}-\mathbf{x'}|^3} = -\frac{3}{|\mathbf{x}-\mathbf{x'}|^3} + \frac{3}{|\mathbf{x}-\mathbf{x'}|^3} = 0$$

Como consequência, a equação (5.8), para $\mathbf{x} \neq \mathbf{x'}$, se torna

$$\nabla^2_{\mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x}) = 0 \tag{5.9}$$

nesta forma conhecida como Equação de Laplace.

5.1.2 A EQUAÇÃO DE POISSON

A informação que se retira da equação (5.9) é que qualquer contribuição para o a equação (5.6) (ou para o próprio potencial gravitacional), necessariamente é oriunda do ponto $\mathbf{x} = \mathbf{x'}$. Para realizar uma análise na vizinhança desse ponto, pode-se restringir nossa integral volumétrica da equação (5.8) em uma região esférica com centro em $\mathbf{x'}$ e raio h tão pequeno quanto se queira.

$$\bigtriangledown^2_{\mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x}) = -\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{x'}|\leqslant h} \bigtriangledown_{\mathbf{x}} \left(\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x'})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x'}|^3}\right) G\rho(\mathbf{x'})d^3\mathbf{x'} = -\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{x'}|\leqslant h} \bigtriangledown_{\mathbf{x'}} \left(\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x'})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x'}|^3}\right) G\rho(\mathbf{x})d^3\mathbf{x'}$$

Com o raio h sendo tão pequeno quanto se queira, pode-se assumir que a densidade nesta minúscula esfera é constante. Sendo assim, pode-se, juntamente com a constante G, colocá-la para fora da integral:

$$\bigtriangledown^2_{\mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x}) = -G\rho(\mathbf{x}) \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{x'}|\leqslant h} \bigtriangledown_{\mathbf{x'}} \left(\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x'})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x'}|^3}\right) d^3\mathbf{x'}$$

Aplicando agora o Teorema da Divergência, se converte a integral volumétrica em uma integral de superfície sobre $|\mathbf{x} - \mathbf{x'}| = h$:

$$\bigtriangledown^2_{\mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x}) = -G\rho(\mathbf{x}) \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{x'}|=h} \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x'})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x'}|^3} d^2\mathbf{S} \tag{5.10}$$

Agora, sobre a superfície esférica $|\mathbf{x} - \mathbf{x'}| = h$, tem-se $d^2\mathbf{S} = (\mathbf{x} - \mathbf{x'})hd^2\Omega$ onde $d^2\Omega$ é um pequeno elemento de ângulo sólido. Desse modo, a equação (5.10), após o cálculo da integral, que resulta em 4π, se torna:

$$\bigtriangledown^2_{\mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x}) = -4\pi G\rho(\mathbf{x}) \tag{5.11}$$

nesta forma conhecida como Equação de Poisson.

Com a equação (5.11), se torna possível, com as condições de contorno adequadas, o cálculo do potencial gravitacional $\Phi(\mathbf{x})$ a partir da densidade $\rho(\mathbf{x})$ de uma distribuição de massa.

5.2 MODELANDO O POTENCIAL GRAVITACIONAL DE UMA GALÁXIA BARRADA

Será calculada a estrutura orbital para diferentes modelos galácticos de barras e diferentes cenários para sua formação e evolução. Podemos eleger alguns modelos analíticos para os potenciais da barra, do bojo e do disco, que conjuntamente formam o modelo de potencial galáctico. Dessa forma o potencial total pode ser escrito como

$$\Phi_T = \Phi_{Barra} + \Phi_{Bojo} + \Phi_{Disco} \tag{5.12}$$

Começaremos a estudar este potencial sem sua dependência temporal, para depois calcular o modelo dependente do tempo.

Com o potencial total dado pela equação (5.12), calcula-se as forças $F_x = -\dfrac{\partial \Phi_T}{\partial x}$, $F_y = -\dfrac{\partial \Phi_T}{\partial y}$ e $F_z = -\dfrac{\partial \Phi_T}{\partial z}$. Com estas forças, é possível calcular as acelerações e então conhecer a órbita de cada estrela, dependendo da condição inicial $x(t_0)$, $y(t_0)$, $z(t_0)$, $v_x(t_0)$, $v_y(t_0)$, e $v_z(t_0)$.

Os modelos de potenciais escolhidos para este trabalho foram espelhados nos trabalhos publicados por Patsis (2002) e Manos e Athanassoula (2011). Eles serão apresentados a seguir.

5.2.1 POTENCIAL DE PLUMMER PARA O BOJO

O bojo pode ser representado pelo Modelo de Plummer (1911):

$$\Phi_{Bojo} = -\frac{GM_S}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \epsilon_S^2}} \tag{5.13}$$

onde ϵ_S é a escala de comprimento e M_S é a massa do bojo.

5.2.2 POTENCIAL DE MIYAMOTO-NAGAI PARA O DISCO

O disco pode ser representado pelo Modelo de Miyamoto e Nagai (1975):

$$\Phi_{Disco} = -\frac{GM_D}{\sqrt{x^2 + y^2 + (A + \sqrt{z^2 + B^2})^2}} \tag{5.14}$$

com A e B sendo os parâmetros de escalas radial e vertical, respectivamente e M_D a massa do disco.

5.2.3 POTENCIAL DE FERRERS PARA A BARRA

A barra pode ser representada pelo Modelo de Ferrers (1877):

A densidade do modelo é dada por

$$\begin{cases} \rho_B(x, y, z) = \rho_c(1 - m^2)^2 \qquad m < 1 \\[2ex] \rho_B(x, y, z) = 0 \qquad m \geq 1 \end{cases}$$

sendo a densidade central

$$\rho_c = \frac{105}{32\pi}\frac{GM_B}{abc}$$

onde M_B é a massa da barra e

$$m^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

onde $a > b > c > 0$ são os semi-eixos do elipsóide que representa a barra.

O potencial criado pela barra galáctica é calculado com a equação de Poisson (5.11):

$$\Phi_{Bar} = -\pi Gabc\frac{\rho_c}{3}\int_\lambda^\infty \frac{du}{\Delta(u)}(1 - m^2(u))^3 \tag{5.15}$$

com

$$m^2(u) = \frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u}$$
$$\Delta^2(u) = (a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)$$

e λ a solução positiva de $m^2(\lambda) = 1$ para a região fora da barra ($m \geq 1$) e $\lambda = 0$ dentro da barra ($m < 1$).

5.2.3.1 COMPACTAÇÃO DE PFENNIGER PARA O POTENCIAL DE FERRERS

Pfenniger (1984), utilizando a expansão multinomial de $(1 - m^2(u))^3$, conseguiu simplificar a expressão do Potencial de Ferrers em uma forma polinomial.

A expansão utilizada foi:

$$(1 - m^2(u))^3 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2+u} - \frac{y^2}{b^2+u} - \frac{z^2}{c^2+u}\right)^3$$
$$= \sum_{i+j+k+l=3} \frac{3!}{i!j!k!l!} 1^i \left(\frac{x^2}{a^2+u}\right)^j \left(\frac{y^2}{b^2+u}\right)^k \left(\frac{z^2}{c^2+u}\right)^l (-1)^{2-i}$$
$$= \sum_{i+j+k+l=3} \frac{3!}{i!j!k!l!} (-1)^{2-i} x^{2j} y^{2k} z^{2l} \left(\frac{1}{a^2+u}\right)^j \left(\frac{1}{b^2+u}\right)^k \left(\frac{1}{c^2+u}\right)^l$$

A qual, substituindo na equação (5.15), implica

$$\Phi_{Barra} = -\pi Gabc\frac{\rho_c}{3}\int_\lambda^\infty \frac{du}{\Delta(u)}(1 - m^2(u))^3$$
$$= -\pi Gabc\frac{\rho_c}{3}\int_\lambda^\infty \frac{du}{\Delta(u)} \left(\sum_{i+j+k+l=3} \frac{3!}{i!j!k!l!} (-1)^{2-i} x^{2j} y^{2k} z^{2l} \left(\frac{1}{a^2+u}\right)^j \left(\frac{1}{b^2+u}\right)^k \left(\frac{1}{c^2+u}\right)^l\right)$$
$$= -\pi Gabc\frac{\rho_c}{3} \sum_{i+j+k+l=3} \frac{3!}{i!j!k!l!} (-1)^{2-i} x^{2j} y^{2k} z^{2l} \int_\lambda^\infty \frac{du}{\Delta(u)} \left(\left(\frac{1}{a^2+u}\right)^j \left(\frac{1}{b^2+u}\right)^k \left(\frac{1}{c^2+u}\right)^l\right)$$

De onde Pfenniger concluiu que

$$\Phi_{Barra} = -\pi Gabc\rho_c \sum_{i+j+k+l=3} \frac{2!}{i!j!k!l!}(-1)^{2-i}x^{2j}y^{2k}z^{2l}\int_\lambda^\infty \frac{du}{\Delta(u)}\left(\frac{1}{(a^2+u)^j(b^2+u)^k(c^2+u)^l}\right) \tag{5.16}$$

Tomando

$$W_{jkl} = \int_\lambda^\infty \frac{du}{\Delta(u)}\frac{1}{(a^2+u)^j(b^2+u)^k(c^2+u)^l}$$

onde W_{jkl} depende de λ, pode-se escrever o potencial dado pela equação (5.15) como

$$\Phi_{Barra} = -\pi Gabc\rho_c \sum_{i+j+k+l=3} \frac{2!}{i!j!k!l!}(-1)^{2-i}x^{2j}y^{2k}z^{2l}W_{jkl} \tag{5.17}$$

Os cálculos para se obter os valores de W_{jkl} dependem de integrais elípticas de primeira e segunda ordem e uma extensa matemática. Tais cálculos, que podem ser conferidos em Pfenniger (1984), não serão aqui expostos.

Por fim, após toda a manipulação algébrica apresentada, tem-se que o Potencial de Ferrers, pode ser compactado na seguinte forma:

$$\begin{aligned}\Phi_{Barra} = \frac{C}{6}(&W_{000}-6x^2y^2z^2W_{111}+x^2[x^2(3W_{200}-x^2W_{300})+3(y^2(2W_{110}-y^2W_{120}-x^2W_{210})-W_{100})]+\\&+y^2[y^2(3W_{020}-y^2W_{030})+3(z^2(2W_{011}-z^2W_{012}-y^2W_{021})-W_{010})]+\\&+z^2[z^2(3W_{002}-z^2W_{003})+3(x^2(2W_{101}-x^2W_{201}-z^2W_{102})-W_{001})])\end{aligned}$$

onde $C = -2\pi Gabc\rho_c$

5.3 MOVIMENTO EM UM SISTEMA DE COORDENADAS EM ROTAÇÃO

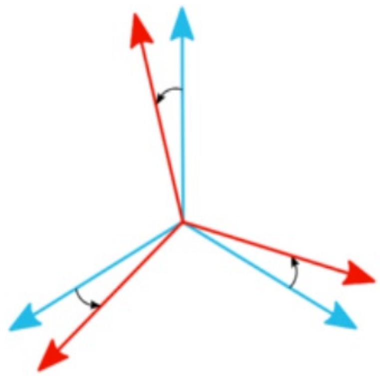
Para estudar órbitas no potencial de uma galáxia barrada, necessitamos entender as equações de movimento em um sistema de coordenadas em rotação, uma vez que a barra possui uma velocidade angular que necessita ser inserida em nosso modelo.

Consideremos dois referenciais cartesianos coincidentes na origem S_{xyz} e $S'_{x'y'z'}$ onde o primeiro se encontra estático e o segundo girando com uma velocidade angular Ω no sentido anti-horário.

Para um vetor posição $\mathbf{x}$, a velocidade no sistema em rotação está relacionada com a velocidade no sistema estático de acordo com

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x'}}{dt} + \Omega \times \mathbf{x} \tag{5.18}$$

Figura 11 – Sistemas de Coordenadas Fixo e Rotante.



Fonte: Almeida Júnior (2011)

É comum denotar a equação (5.18) simplesmente como

$$\frac{d}{dt} = \frac{d'}{dt} + \Omega\times \tag{5.19}$$

onde $\frac{d'}{dt}$ denota a derivada em relação a t de um vetor com coordenadas no sistema $S'_{x'y'z'}$. Esta igualdade representa uma identidade de diferenciação que relaciona ambos os sistemas de coordenadas, para um vetor genérico, chamada de Diferenciação de Coriolis.

Para encontrar as equações de movimento no sistema em rotação, podemos diferenciar ambos os lados da equação (5.18):

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{x'}}{dt}\right) + \Omega\times\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{x'}}{dt^2} + \Omega\times\frac{d\mathbf{x'}}{dt} + \Omega\times\left(\frac{d\mathbf{x'}}{dt} + \Omega\times\mathbf{x}\right) =$$

$$= \frac{d^2\mathbf{x'}}{dt^2} + 2\Omega\times\frac{d\mathbf{x'}}{dt} + \Omega\times(\Omega\times\mathbf{x})$$

Desse modo, a equação (5.6) muda para

$$\mathbf{a'}(\mathbf{x'}) = -\bigtriangledown\Phi(\mathbf{x'}) - 2\Omega\times\mathbf{v'} - \Omega\times(\Omega\times\mathbf{x}) \tag{5.20}$$

onde $\mathbf{v'} = \frac{d\mathbf{x'}}{dt}$ e $\mathbf{a'}(\mathbf{x'}) = \frac{d\mathbf{v'}}{dt}$.

O termo $2\Omega\times\mathbf{v'}$ é chamado de Força de Coriolis e é sempre perpendicular a direção do movimento. O termo $\Omega\times(\Omega\times\mathbf{x})$ é a Força Centrífuga do sistema. Ambas são forças fictícias e são sempre necessárias para explicar o movimento em referenciais em rotação.

A partir deste momento, por uma questão de conveniência, não se utilizará mais a notação "linha"para representar vetores vistos do referencial em rotação, embora todas as coordenadas serão assumidas neste referencial.

Define-se então o Potencial Efetivo como:

$$\Phi_{eff}(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}|\Omega\times\mathbf{x}|^2 \tag{5.21}$$

Tomando o gradiente da equação (5.21) e associando com a equação (5.20), temos que a última se mostra da seguinte forma

$$\mathbf{a(x)} = -\bigtriangledown \Phi_{eff}(\mathbf{x}) - 2\Omega \times \mathbf{v} \tag{5.22}$$

A quantidade

$$E_J = \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + \Phi_{eff}(\mathbf{x}) \tag{5.23}$$

é chamada de Energia de Jacobi e se conserva no sistema em rotação. Vale ressaltar que $E_J = E - \Omega \times L$, onde $L = m\mathbf{x} \times \mathbf{v}$ é o momento angular e tanto E quanto L não se conservam neste sistema separadamente.

5.3.1 CURVA DE VELOCIDADE ZERO

A variedade dada por $\Phi_{eff} = E_J$ é chamada de Variedade de Velocidade Zero. Considerando um modelo de potencial de uma galáxia barrada, onde a barra possui velocidade angular Ω_b e seu eixo principal se encontra alinhado a um sistema de coordenadas com a mesma velocidade.

Em particular, quando $z = 0$, a superfície dada por $\Phi_{eff}(x, y, 0) = E_J$ recebe o nome de Superfície de Velocidade Zero.

A curva $\Phi_{eff}(0, y, 0) = E_J$ é denominada Curva de Velocidade Zero. Pode-se dizer que essa curva delimita uma região muito importante para escolha de condições iniciais para integração de órbitas estelares, sendo impossível $\Phi_{eff} > E_J$ não são encontradas estrelas acima da Curva de Velocidade Zero (Binney; Tremaine, 2008).

5.4 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO NO POTENCIAL GRAVITACIONAL DE UMA GALÁXIA BARRADA

Aplicaremos os métodos SALI/GALI no estudo de órbitas estelares imersas em potenciais gravitacionais, de galáxias barradas, uma vez que, o movimento de uma partícula de teste em um modelo tridimensional de rotação de uma galáxia barrada é dado pelo Hamiltoniano:

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Phi_T(x, y, z) + \Omega_b(xp_y - yp_x) \tag{5.24}$$

onde a barra roda em torno de z; x e y contém respectivamente os eixos maior e menor da barra galáctica, Φ_T é o potencial gravitacional, dado pela equação (5.12), e Ω_b representa a velocidade angular padrão da barra. Desse modo, a partir das condições iniciais, poderemos identificar se uma órbita estelar é ordenada ou caótica nestes potenciais gravitacionais.

Para este Hamiltoniano, desenvolvendo a equação (2.3), tem-se que as correspondentes equações de movimento são:

$$\begin{cases} \dot{x} = p_x + \Omega_b y \\ \\ \dot{y} = p_y - \Omega_b x \\ \\ \dot{z} = p_z \\ \\ \dot{p_x} = -\dfrac{\partial \Phi_T}{\partial x} + \Omega_b p_y \\ \\ \dot{p_y} = -\dfrac{\partial \Phi_T}{\partial y} - \Omega_b p_x \\ \\ \dot{p_z} = -\dfrac{\partial \Phi_T}{\partial z} \end{cases} \tag{5.25}$$

Também, desenvolvendo a equação (2.4), tem-se que as correspondentes equações variacionais, que governam a evolução de um vetor de desvio denotado pela forma $\mathbf{w} = (\triangle x, \triangle y, \triangle z, \triangle p_x, \triangle p_y, \triangle p_z)$, são:

$$\begin{cases} \dot{\triangle} x = \triangle p_x + \Omega_b \triangle y \\ \\ \dot{\triangle} y = \triangle p_y - \Omega_b \triangle x \\ \\ \dot{\triangle} z = \triangle p_z \\ \\ \dot{\triangle} p_x = -\dfrac{\partial^2 \Phi_T}{\partial x \partial x} \triangle x - \dfrac{\partial^2 \Phi_T}{\partial x \partial y} \triangle y - \dfrac{\partial^2 \Phi_T}{\partial x \partial z} \triangle z + \Omega_b \triangle p_y \\ \\ \dot{\triangle} p_y = -\dfrac{\partial^2 \Phi_T}{\partial y \partial x} \triangle x - \dfrac{\partial^2 \Phi_T}{\partial y \partial y} \triangle y - \dfrac{\partial^2 \Phi_T}{\partial y \partial z} \triangle z - \Omega_b \triangle p_x \\ \\ \dot{\triangle} p_z = -\dfrac{\partial^2 \Phi_T}{\partial z \partial x} \triangle x - \dfrac{\partial^2 \Phi_T}{\partial z \partial y} \triangle y - \dfrac{\partial^2 \Phi_T}{\partial z \partial z} \triangle z \end{cases} \tag{5.26}$$

Com as equações (5.25) e (5.26) é possível acompanhar a evolução temporal de uma órbita que está inserida no potencial Φ_T, bem como verificar se esta órbita é caótica ou regular, acompanhando a evolução de vetores de desvio pelos métodos SALI/GALI.

Como já foi discutido, o potencial total Φ_T será, neste trabalho, dividido em três potenciais representativos do bojo, disco e barra de uma galáxia, ou seja, como visto na equação (5.12), $\Phi_T = \Phi_{Barra} + \Phi_{Bojo} + \Phi_{Disco}$. Levando em consideração a forma com que se dão as equações de movimento (5.25) e as equações variacionais (5.26), necessitamos saber as derivadas parciais destes três potenciais.

5.4.1 DERIVADAS PARCIAIS DO POTENCIAL DE PLUMMER

O Potencial de Plummer, que utilizaremos para modelar o bojo galáctico, é dado por

$$\Phi_{Bojo} = -\frac{GM_S}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \epsilon_S^2}}$$

onde ϵ_S é a escala de comprimento, M_S é a massa do bojo e G é a constante gravitacional universal.

Suas derivadas parciais, são:

$$\frac{\partial \Phi_{Bojo}}{\partial x} = \frac{GM_S x}{(x^2 + y^2 + z^2 + \epsilon_S^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial \Phi_{Bojo}}{\partial y} = \frac{GM_S y}{(x^2 + y^2 + z^2 + \epsilon_S^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial \Phi_{Bojo}}{\partial z} = \frac{GM_S z}{(x^2 + y^2 + z^2 + \epsilon_S^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{Bojo}}{\partial x \partial x} = \frac{GM_S}{(x^2 + y^2 + z^2 + \epsilon_S^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3GM_S x^2}{(x^2 + y^2 + z^2 + \epsilon_S^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{Bojo}}{\partial x \partial y} = \frac{-3GM_S xy}{(x^2 + y^2 + z^2 + \epsilon_S^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{Bojo}}{\partial x \partial z} = \frac{-3GM_S xz}{(x^2 + y^2 + z^2 + \epsilon_S^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{Bojo}}{\partial y \partial x} = \frac{-3GM_S yx}{(x^2 + y^2 + z^2 + \epsilon_S^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{Bojo}}{\partial y \partial y} = \frac{GM_S}{(x^2 + y^2 + z^2 + \epsilon_S^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3GM_S y^2}{(x^2 + y^2 + z^2 + \epsilon_S^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{Bojo}}{\partial y \partial z} = \frac{-3GM_S yz}{(x^2 + y^2 + z^2 + \epsilon_S^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{Bojo}}{\partial z \partial x} = \frac{-3GM_S zx}{(x^2 + y^2 + z^2 + \epsilon_S^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{Bojo}}{\partial z \partial y} = \frac{-3GM_S zy}{(x^2 + y^2 + z^2 + \epsilon_S^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{Bojo}}{\partial z \partial z} = \frac{GM_S}{(x^2 + y^2 + z^2 + \epsilon_S^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3GM_S z^2}{(x^2 + y^2 + z^2 + \epsilon_S^2)^{\frac{5}{2}}}$$

5.4.2 DERIVADAS PARCIAIS DO POTENCIAL DE MIYAMOTTO-NAGAI

A expressão matemática para o Potencial de Miyamotto-Nagai, com o qual modelaremos o disco galáctico, é

$$\Phi_{Disco} = -\frac{GM_D}{\sqrt{x^2 + y^2 + (A + \sqrt{z^2 + B^2})^2}}$$

com A e B sendo os parâmetros de escalas radial e vertical, respectivamente, M_D a massa do disco e G a constante gravitacional universal.

Suas derivadas parciais, são:

$$\frac{\partial \Phi_{Disco}}{\partial x} = \frac{GM_D x}{(x^2 + y^2 + (A + \sqrt{B^2 + z^2})^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial \Phi_{Disco}}{\partial y} = \frac{GM_D y}{(x^2 + y^2 + (A + \sqrt{B^2 + z^2})^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial \Phi_{Disco}}{\partial z} = \frac{GM_D(A + \sqrt{B^2 + z^2})z}{(x^2 + y^2 + (A + \sqrt{B^2 + z^2})^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{B^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{Disco}}{\partial x \partial x} = \frac{GM_D}{(x^2 + y^2 + (A + \sqrt{B^2 + z^2})^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3GM_D x^2}{(x^2 + y^2 + (A + \sqrt{B^2 + z^2})^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{Disco}}{\partial x \partial y} = \frac{-3GM_D xy}{(x^2 + y^2 + (A + \sqrt{B^2 + z^2})^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{Disco}}{\partial x \partial z} = \frac{-3GM_D(A + \sqrt{B^2 + z^2})xz}{(x^2 + y^2 + (A + \sqrt{B^2 + z^2})^2)^{\frac{5}{2}}\sqrt{B^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{Disco}}{\partial y \partial x} = \frac{-3GM_D yx}{(x^2 + y^2 + (A + \sqrt{B^2 + z^2})^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{Disco}}{\partial y \partial y} = \frac{GM_D}{(x^2 + y^2 + (A + \sqrt{B^2 + z^2})^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3GM_D y^2}{(x^2 + y^2 + (A + \sqrt{B^2 + z^2})^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{Disco}}{\partial y \partial z} = \frac{-3GM_D(A + \sqrt{B^2 + z^2})yz}{(x^2 + y^2 + (A + \sqrt{B^2 + z^2})^2)^{\frac{5}{2}}\sqrt{B^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{Disco}}{\partial z \partial x} = \frac{-3GM_D(A + \sqrt{B^2 + z^2})zx}{(x^2 + y^2 + (A + \sqrt{B^2 + z^2})^2)^{\frac{5}{2}}\sqrt{B^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{Disco}}{\partial z\partial y} = \frac{-3GM_D(A+\sqrt{B^2+z^2})zy}{(x^2+y^2+(A+\sqrt{B^2+z^2})^2)^{\frac{5}{2}}\sqrt{B^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{Disco}}{\partial z\partial z} = \frac{GM_Dz^2}{(B^2+z^2)(x^2+y^2+(A+\sqrt{B^2+z^2})^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{GM_D(A+\sqrt{B^2+z^2})}{(x^2+y^2+(A+\sqrt{B^2+z^2})^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{B^2+z^2}} -$$
$$-\frac{3GM_D(A+\sqrt{B^2+z^2})^2z^2}{(x^2+y^2+(A+\sqrt{B^2+z^2})^2)^{\frac{5}{2}}(B^2+z^2)} - \frac{GM_D(A+\sqrt{B^2+z^2})z^2}{(x^2+y^2+(A+\sqrt{B^2+z^2})^2)^{\frac{3}{2}}(B^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

5.4.3 DERIVADAS PARCIAIS DO POTENCIAL DE FERRERS

Foi visto que o Potencial de Ferrers, dado pela equação (5.15), pode ser simplificado algebricamente na forma polinomial

$$\begin{aligned}\Phi_{Barra} = \frac{C}{6}(W_{000}-6x^2y^2z^2+x^2[x^2(3W_{200}-x^2W_{300})+3(y^2(2W_{110}-y^2W_{120}-x^2W_{210})-W_{100})]+\\ +y^2[y^2(3W_{020}-y^2W_{030})+3(z^2(2W_{011}-z^2W_{012}-y^2W_{021})-W_{010})]+\\ +z^2[z^2(3W_{002}-z^2W_{003})+3(x^2(2W_{101}-x^2W_{201}-z^2W_{102})-W_{001})])\end{aligned}$$

onde $C = 2\pi Gabc\rho_c$.

Vale ressaltar que, de acordo com o exposto por Pfenniger (1984), os valores W_{jkl} dependem de λ e λ depende de x, y e z. Desse modo, para calcular as derivadas parciais deste potencial, é necessário obter as derivadas de W_{jkl} em relação a x, y e z:

$$\frac{\partial W_{jkl}}{\partial x} = \frac{\partial W_{jkl}}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x}$$
$$\frac{\partial W_{jkl}}{\partial y} = \frac{\partial W_{jkl}}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial y}$$
$$\frac{\partial W_{jkl}}{\partial z} = \frac{\partial W_{jkl}}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial z}$$

Para tanto, as quantidades $\dfrac{\partial W_{jkl}}{\partial \lambda}$, $\dfrac{\partial \lambda}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \lambda}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial \lambda}{\partial z}$ são:

$$\frac{\partial W_{jkl}}{\partial \lambda} = -\frac{1}{(a^2+\lambda)^{j+\frac{1}{2}}(b^2+\lambda)^{k+\frac{1}{2}}(c^2+\lambda)^{l+\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\dfrac{2x}{a^2+\lambda}}{\dfrac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\dfrac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\dfrac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{\dfrac{2y}{b^2+\lambda}}{\dfrac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\dfrac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\dfrac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial z} = \frac{\dfrac{2z}{c^2+\lambda}}{\dfrac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \dfrac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \dfrac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}}$$

Também pode ser demonstrado que $\frac{\partial\Phi_{Barra}}{\partial\lambda} = 0$. [1]

Levando em consideração os fatos descritos nas linhas anteriores, as derivadas parciais deste potencial são:

$$\frac{\partial\Phi_{Barra}}{\partial x} = -Cx[W_{100} + x^2(x^2W_{300} + 2(y^2W_{210} - W_{200})) + y^2(y^2W_{120} + 2(z^2W_{111} - W_{110})) +$$
$$+z^2(z^2W_{102} + 2(x^2W_{201} - W_{101}))]$$

$$\frac{\partial\Phi_{Barra}}{\partial y} = -Cy[W_{010} + x^2(x^2W_{210} + 2(y^2W_{120} - W_{110})) + y^2(y^2W_{030} + 2(z^2W_{021} - W_{020})) +$$
$$+z^2(z^2W_{012} + 2(x^2W_{111} - W_{011}))]$$

$$\frac{\partial\Phi_{Barra}}{\partial z} = -Cz[W_{001} + x^2(x^2W_{201} + 2(y^2W_{111} - W_{101})) + y^2(y^2W_{021} + 2(z^2W_{012} - W_{011})) +$$
$$+z^2(z^2W_{003} + 2(x^2W_{102} - W_{002}))]$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{Barra}}{\partial x\partial x} = -C[W_{100} + x^2(5x^2W_{300} + 6(y^2W_{210} - W_{200})) + y^2(y^2W_{120} + 2(z^2(W_{111} - W_{110})) +$$
$$+z^2(z^2W_{102} + 6x^2W_{201} - 2W_{101})] - \frac{\partial\lambda}{\partial x}Cx[\frac{\partial W_{100}}{\partial\lambda} + x^2(x^2\frac{\partial W_{300}}{\partial\lambda} + 2(y^2\frac{\partial W_{210}}{\partial\lambda} - \frac{\partial W_{200}}{\partial\lambda})) +$$
$$+y^2(y^2\frac{\partial W_{120}}{\partial\lambda} + 2(z^2\frac{\partial W_{111}}{\partial\lambda} - \frac{\partial W_{110}}{\partial\lambda})) + z^2(z^2\frac{\partial W_{102}}{\partial\lambda} + 2(x^2\frac{\partial W_{201}}{\partial\lambda} - \frac{\partial W_{101}}{\partial\lambda}))]$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{Barra}}{\partial x\partial y} = -4Cxy(x^2W_{210} + y^2W_{120} + z^2W_{111} - W_{110}) -$$
$$-\frac{\partial\lambda}{\partial y}Cx[\frac{\partial W_{100}}{\partial\lambda} + x^2(x^2\frac{\partial W_{300}}{\partial\lambda} + 2(y^2\frac{\partial W_{210}}{\partial\lambda} - \frac{\partial W_{200}}{\partial\lambda})) + y^2(y^2\frac{\partial W_{120}}{\partial\lambda} + 2(z^2\frac{\partial W_{111}}{\partial\lambda} - \frac{\partial W_{110}}{\partial\lambda})) +$$
$$+z^2(z^2\frac{\partial W_{102}}{\partial\lambda} + 2(x^2\frac{\partial W_{201}}{\partial\lambda} - \frac{\partial W_{101}}{\partial\lambda}))]$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{Barra}}{\partial x\partial z} = -4Cxz(x^2W_{201} + y^2W_{111} + z^2W_{102} - W_{101}) -$$

[1] Uma abordagem sobre este fato pode ser vista na tese de doutorado em Matemática de Manos (2008).

$$-\frac{\partial\lambda}{\partial z}Cx[\frac{\partial W_{100}}{\partial\lambda}+x^2(x^2\frac{\partial W_{300}}{\partial\lambda}+2(y^2\frac{\partial W_{210}}{\partial\lambda}-\frac{\partial W_{200}}{\partial\lambda}))+y^2(y^2\frac{\partial W_{120}}{\partial\lambda}+2(z^2\frac{\partial W_{111}}{\partial\lambda}-\frac{\partial W_{110}}{\partial\lambda}))+$$
$$+z^2(z^2\frac{\partial W_{102}}{\partial\lambda}+2(x^2\frac{\partial W_{201}}{\partial\lambda}-\frac{\partial W_{101}}{\partial\lambda}))]$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{Barra}}{\partial y\partial x}=-4Cyx(x^2W_{210}+y^2W_{120}+z^2W_{111}-W_{110})-$$
$$-\frac{\partial\lambda}{\partial y}Cy[\frac{\partial W_{010}}{\partial\lambda}+x^2(x^2\frac{\partial W_{210}}{\partial\lambda}+2(y^2\frac{\partial W_{120}}{\partial\lambda}-\frac{\partial W_{110}}{\partial\lambda}))+y^2(y^2\frac{\partial W_{030}}{\partial\lambda}+2(z^2\frac{\partial W_{021}}{\partial\lambda}-\frac{\partial W_{020}}{\partial\lambda}))+$$
$$+z^2(z^2\frac{\partial W_{012}}{\partial\lambda}+2(x^2\frac{\partial W_{111}}{\partial\lambda}-\frac{\partial W_{011}}{\partial\lambda}))]$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{Barra}}{\partial y\partial y}=-C[W_{010}+x^2(x^2W_{210}+6(y^2W_{120}-W_{110}))+y^2(5y^2W_{030}+6z^2W_{021}-6W_{020})+$$
$$+z^2(2x^2W_{111}+z^2W_{012}-2W_{011})]-\frac{\partial\lambda}{\partial y}Cy[\frac{\partial W_{010}}{\partial\lambda}+x^2(x^2\frac{\partial W_{210}}{\partial\lambda}+2(y^2\frac{\partial W_{120}}{\partial\lambda}-\frac{\partial W_{110}}{\partial\lambda}))+$$
$$+y^2(y^2\frac{\partial W_{030}}{\partial\lambda}+2(z^2\frac{\partial W_{021}}{\partial\lambda}-\frac{\partial W_{020}}{\partial\lambda}))+z^2(z^2\frac{\partial W_{012}}{\partial\lambda}+2(x^2\frac{\partial W_{111}}{\partial\lambda}-\frac{\partial W_{011}}{\partial\lambda}))]$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{Barra}}{\partial y\partial z}=-4Cyz(x^2W_{111}+y^2W_{021}+z^2W_{012}-W_{011})-$$
$$-\frac{\partial\lambda}{\partial z}Cy[\frac{\partial W_{010}}{\partial\lambda}+x^2(x^2\frac{\partial W_{210}}{\partial\lambda}+2(y^2\frac{\partial W_{120}}{\partial\lambda}-\frac{\partial W_{110}}{\partial\lambda}))+y^2(y^2\frac{\partial W_{030}}{\partial\lambda}+2(z^2\frac{\partial W_{021}}{\partial\lambda}-\frac{\partial W_{020}}{\partial\lambda}))+$$
$$+z^2(z^2\frac{\partial W_{012}}{\partial\lambda}+2(x^2\frac{\partial W_{111}}{\partial\lambda}-\frac{\partial W_{011}}{\partial\lambda}))]$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{Barra}}{\partial z\partial x}=-4Czx(x^2W_{201}+y^2W_{111}+z^2W_{102}-W_{101})-$$
$$-\frac{\partial\lambda}{\partial x}Cz[\frac{\partial W_{001}}{\partial\lambda}+x^2(x^2\frac{\partial W_{201}}{\partial\lambda}+2(y^2\frac{\partial W_{111}}{\partial\lambda}-\frac{\partial W_{101}}{\partial\lambda}))+y^2(y^2\frac{\partial W_{021}}{\partial\lambda}+2(z^2\frac{\partial W_{012}}{\partial\lambda}-\frac{\partial W_{011}}{\partial\lambda}))+$$
$$+z^2(z^2\frac{\partial W_{003}}{\partial\lambda}+2(x^2\frac{\partial W_{102}}{\partial\lambda}-\frac{\partial W_{002}}{\partial\lambda}))]$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{Barra}}{\partial z\partial y}=-4Czy(x^2W_{111}+y^2W_{021}+z^2W_{012}-W_{011})-$$
$$-\frac{\partial\lambda}{\partial y}Cz[\frac{\partial W_{001}}{\partial\lambda}+x^2(x^2\frac{\partial W_{201}}{\partial\lambda}+2(y^2\frac{\partial W_{111}}{\partial\lambda}-\frac{\partial W_{101}}{\partial\lambda}))+y^2(y^2\frac{\partial W_{021}}{\partial\lambda}+2(z^2\frac{\partial W_{012}}{\partial\lambda}-\frac{\partial W_{011}}{\partial\lambda}))+$$
$$+z^2(z^2\frac{\partial W_{003}}{\partial\lambda}+2(x^2\frac{\partial W_{102}}{\partial\lambda}-\frac{\partial W_{002}}{\partial\lambda}))]$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{Barra}}{\partial z\partial z}=-C[W_{001}+x^2(x^2W_{201}+2y^2W_{111}-2W_{101})+y^2(y^2W_{021}+6z^2W_{012}-2W_{011}+$$

$$+z^2(5z^2W_{003}+6x^2W_{201}-6W_{002})]-\frac{\partial\lambda}{\partial y}Cz[\frac{\partial W_{001}}{\partial\lambda}+x^2(x^2\frac{\partial W_{201}}{\partial\lambda}+2(y^2\frac{\partial W_{111}}{\partial\lambda}-\frac{\partial W_{101}}{\partial\lambda}))+$$
$$+y^2(y^2\frac{\partial W_{021}}{\partial\lambda}+2(z^2\frac{\partial W_{012}}{\partial\lambda}-\frac{\partial W_{011}}{\partial\lambda}))+z^2(z^2\frac{\partial W_{003}}{\partial\lambda}+2(x^2\frac{\partial W_{102}}{\partial\lambda}-\frac{\partial W_{002}}{\partial\lambda}))]$$

Com as derivadas parciais de primeira e segunda ordem de Φ_{Bojo}, Φ_{Disco} e Φ_{Barra} calculadas, se conhece exatamente as feições das equações de movimento (5.25) e das equações variacionais (5.26). Isto nos permite realizar a dinâmica necessária para esta tese.

5.5 RESSONÂNCIAS

Barras galácticas se comportam como corpos rígidos, ou seja, Ω_b é sempre uma constante. Entretanto, discos galácticos não se comportam deste modo, sua velocidade angular Ω é uma função da coordenada radial. Assim, é natural imaginar que aparecerão ressonâncias entre os movimentos da barra e do disco. Um exemplo é a ressonância de corrotação, que ocorre onde $\Omega = \Omega_b$.

Também haverão ressonâncias, quando a seguinte condição for satisfeita:

$$\Omega = \Omega_b \pm \frac{\kappa}{m} \tag{5.27}$$

onde m é um inteiro que está relacionado com a simetria da estrura de interesse (braços espirais, barras e etc...) e $\kappa^2 = \frac{d^2\Phi}{dR^2} + \frac{3}{R}\frac{d\Phi}{dR}$ é chamada de frequência epiciclica. Neste caso, haverão duas ressonâncias chamadas Ressonâncias de Lindblad. Na Equação 5.27, no caso do sinal negativo, tem-se a Ressonância Interna de Lindblad (ILR devido a *Inner Lindblad Resonance*); já no caso do sinal positivo tem-se a Ressonância Externa de Lindblad (OLR devido a *Outer Lindblad Resonance*). Para potenciais de barras galácticas utiliza-se $m = 2$, por serem estruturas bissimétricas (Moellenhoff; Matthias; Gerhard, 1995).

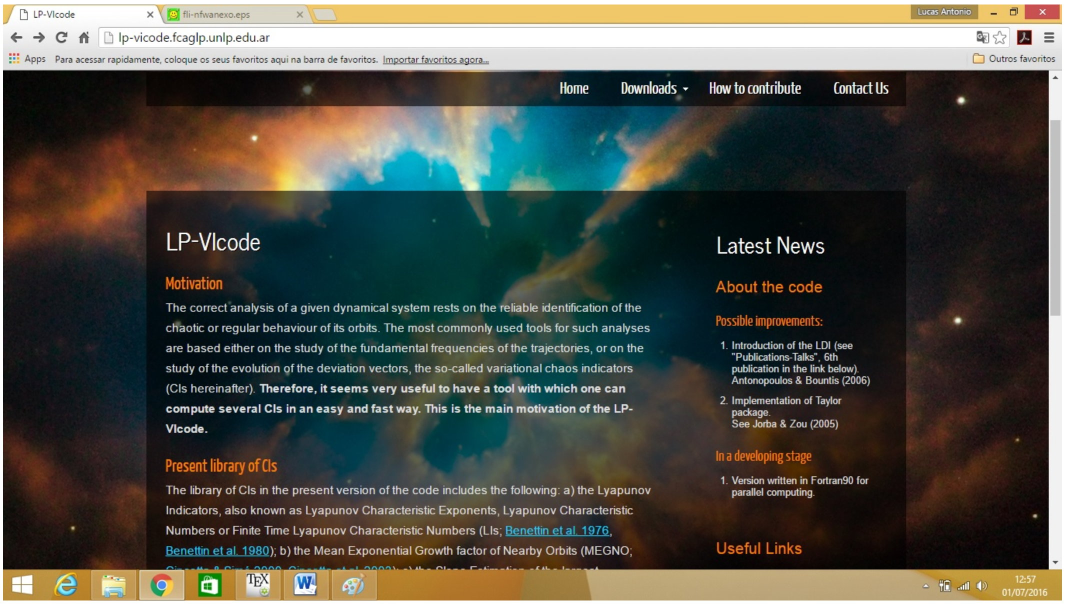
Parte III

Desenvolvimento

6 O PROGRAMA LP-VICODE

Para o cálculo das órbitas e a identificação de regularidade, utilizou-se o programa LP-VIcode (Carpintero; Maffione; Darriba, 2014), que pode ser baixado gratuitamente no site http://lp-vicode.fcaglp.unlp.edu.ar/ exibido na Figura 12.

Figura 12 – LP-VIcode website



Fonte: http://lp-vicode.fcaglp.unlp.edu.ar/

O LP-VIcode, que significa Código de Indicadores Variacionais de La Plata, foi escrito por pesquisadores da Universidad de La Plata, Argentina, e é um código, em Fortran 77, totalmente operacional que calcula de forma eficiente dez indicadores de caos para sistemas dinâmicos, independente do número de dimensões, nos quais estão presentes SALI e GALI. O usuário possui, inclusive, a liberdade de optar por mais de um indicador de caos ao mesmo tempo.

O programa lê as condições iniciais, para uma ou mais órbitas e as integra, calculando simultaneamente as equações referentes aos indicadores de caos escolhidos. O integrador é o Bulirsch-Stoer. O time step é fixo e também deve ser fornecido.

O código é organizado em um programa principal que recebe informações de um conjunto de rotinas externas. Estas rotinas externas, que são editadas ou programadas pelo usuário, são divididas em quatro categorias:

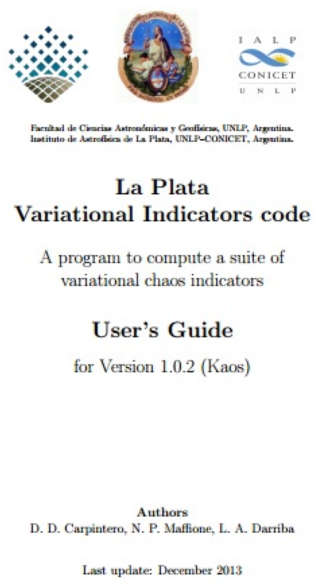
- Entrada, inicialização e saída
- Condições iniciais

- Ferramentas matemáticas
- Dinâmica e equações do sistema

A última citada possui extrema importância, pois é nesta rotina que o usuário deve programar e fornecer as expressões do potencial estudado e suas equações variacionais e de movimento.

Um manual de utilização pode ser encontrado no site do LP-VIcode (Carpintero; Maffione; Darriba, 2013), onde, inclusive, vários exemplos estão disponíveis. A capa do manual pode ser conferida na Figura 13. O LP-VIcode não possui interface gráfica. Sua utilização não é amigável e este manual facilita a adaptação para a utilização do código.

Figura 13 – LP-VIcode Capa do Manual


Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, UNLP, Argentina.
Instituto de Astrofísica de La Plata, UNLP-CONICET, Argentina.

La Plata
Variational Indicators code

A program to compute a suite of
variational chaos indicators

User's Guide

for Version 1.0.2 (Kaos)

Authors
D. D. Carpintero, N. P. Maffione, L. A. Darriba

Last update: December 2013

Fonte: Carpintero, Maffione e Darriba (2013)

6.1 ESTRUTURA E FUNCIONAMENTO

Para utilizar o LP-VIcode o usuário necessita:

(1) Um editor de texto, para editar os arquivos: `****.pav`, `****.dat`, `LP-VIcode.in` e `LP-VIcode.par`

(2) Um compilador de Fortran77, para compilar e executar os aquivos: `LP-VIcode.for` e `LP-VIcode.par`

O programa principal é o `LP-VIcode.for` e seus parâmetros gerais são fornecidos pela rotina `LP-VIcode.par`. No arquivo `LP-VIcode.in` se edita o tempo total de integração e o passo de tempo.

O arquivo que cuida da dinâmica do sistema é o `****.pav`. Este arquivo deve ser programado pelo usuário e nele se fornece o potencial e as equações específicas do modelo estudado. O `****.pav` deve ser inserido no hall de modelos fornecidos no final do arquivo `LP-VIcode.for`, com a linha `"INCLUDE ****.pav"`e deve ter a seguinte estrutura: Um `"BLOCK DATA"`contendo a dimensão do modelo e os parâmetros do potencial utilizado, uma `"FUNCTION potencial"`, no qual o potencial deve ser programado em função do tempo e das coordenadas do espaço de fase, uma `"SUBROUTINE acelera"`na qual as acelerações deve ser programadas em função do tempo e das coordenadas do espaço de fase e uma `"SUBROUTINE variac"`na qual as equações variacionais devem ser fornecidas no mesmo padrão do potencial e das acelerações.

As condições iniciais para cada órbita devem ser fornecidas em um arquivo `***.dat`, uma linha por órbita.

6.2 PREPARATIVOS PARA A PESQUISA

6.2.1 PROGRAMANDO O POTENCIAL GRAVITACIONAL E SUAS EQUAÇÕES EM `****.PAV`

Como já discutido no Capítulo 5, neste trabalho o potencial de uma galáxia barrada é escrito como a soma de outros três potenciais: o potencial de Plummer para o bojo (exibido na equação (5.13)), o potencial de Miyamotto-Nagai para o disco (exibido na equação (5.14)) e o potencial de Ferrers para a barra galáctica (exibido na equação (5.15)).

Os dois primeiros potenciais e suas respectivas equações variacionais e acelerações foram programadas facilmente. Porém, programar o potencial de Ferrers não é nada fácil. Se considerarmos as simplificações feitas por Pfenniger, o trabalho é amenizado, mas, ainda sim, uma missão ingrata.

Por sorte, D. Pfenniger forneceu uma `ROUTINE` em Fortran 77 com seu Modelo de Ferrers e as respectivas acelerações programadas. Não existiam equações variacionais em seu arquivo, mas, com a teoria apresentada no artigo de Pfenniger (1984), o cálculo de tais equações foi realizado posteriormente com sucesso. Assim, o trabalho árduo de programar o potencial de Ferrers e todas as suas equações relativas, foi reduzido a um terço.

6.2.2 ADAPTAÇÕES REALIZADAS NO PROGRAMA PRINCIPAL

As rotinas que cuidam da dinâmica no sistema no LP-VIcode são basicamente divididas em dois conjuntos: aquelas que já estão incorporadas no programa principal e aquelas que são fornecidas pelo usuário no arquivo `****.pav`. O primeiro grupo, além do cálculo da energia, define todas as equações de movimento e variacionais, que, em tese, possuem sempre as mesmas características independente do potencial utilizado.

Porém, estas equações de movimento e variacionais previamente escritas no programa principal, levam em conta apenas um referencial estático. Como visto no Capítulo 5, Seção 5.3, para se modelar o potencial de barra galáctica é necessário levar em conta um sistema de coordenadas que rotaciona junto com a mesma.

Neste contexto, considerando Ω_b a velocidade angular da barra, temos que o sistema de coordenadas também deve rotacionar com velocidade angular Ω_b. Isto afeta, inclusive, as equações de movimento e as equações variacionais que regem o movimento das órbitas. Como pode ser conferido nas equações (5.25) e (5.26), as mesmas dependem de Ω_b.

Para solucionar este problema, foram feitas adaptações no código do programa principal, de modo a incluir a rotação no sistema de coordenadas com a mesma velocidade angular que a barra gira em sentido anti-horário.

7 ESTABILIDADE EM MODELOS 2D COM BARRAS FIXAS: PARÂMETROS INSPIRADOS NO TRABALHO DE MANOS & ATHANASSOULA (2011).

Com intuito de estudar a regularidade das órbitas em modelos com 2 graus de liberdade, tomamos $z = 0$ e $p_z = 0$ no hamiltoniano exibido na equação (5.24).

$$H(x, y, p_x, p_y) = (p_x^2 + p_y^2) + \Phi_T(x, y) + \Omega_b(xp_y - yp_x) \tag{7.1}$$

Vamos concentrar nossos estudos em 6 modelos que representam diferentes possibilidades de barras galácticas. Utilizaremos os mesmos 4 modelos (S,B,C e M) apresentados por Manos e Athanassoula (2011) e 2 novos modelos inéditos (Bplus e Mplus) representando situações extremas para a barra galáctica (uma barra muito massiva e uma barra "mais axissimétrica")[1]. Assim como Manos e Athanassoula (2011), adotaremos um Modelo Standard e, a partir deste, outros 5 modelos serão obtidos variando alguns parâmetros da barra.

O tempo de integração utilizado é 10 000 Myr, ou seja, 10 bilhões de anos.

7.1 MODELOS UTILIZADOS

As unidades adotadas são: 1 kpc para distância, 10^3 $\dfrac{km}{sec}$ para velocidade, 10^3 $\dfrac{km}{sec.kpc}$ para velocidade angular, 1 Myr para tempo e 2×10^{11} M_{solar} para massa.

A constante gravitacional universal G será sempre considerada 1 e a massa total $G(M_S + M_D + M_B)$ será sempre igual a 1.

Os modelos e seus respectivos parâmetros serão apresentados a seguir:

7.1.1 MODELO S

Este é o Modelo Standard. Os parâmetros utilizados são:

- Plummer: $\epsilon_S = 0.4$ e $M_S = 0.08$
- Miyamotto-Nagai: $A = 3$, $B = 1$ e $M_D = 0.82$
- Ferrers: $a = 6$, $b = 1.5$, $c = 0.6$, $\Omega_b = 0.054$ e $M_B = 0.1$

Neste modelo, considera-se que as distribuições de massa são 8% para o bojo, 82% para o disco e 10% para a barra. Os eixos do elipsóide que modela a barra possuem medidas 6 kpc, 1.5 kpc e 0.6 kpc.

[1] Os estudos e resultados exibidos neste capítulo foram publicados em Caritá et al. (2017).

7.1.2 MODELO B

Este é o modelo que dobra a dimensão de b em relação ao Modelo S. Os parâmetros utilizados são:

- Plummer: $\epsilon_S = 0.4$ e $M_S = 0.08$
- Miyamotto-Nagai: $A = 3$, $B = 1$ e $M_D = 0.82$
- Ferrers: $a = 6$, $b = 3$, $c = 0.6$, $\Omega_b = 0.054$ e $M_B = 0.1$

Neste modelo, considera-se que as distribuições de massa são 8% para o bojo, 82% para o disco e 10% para a barra. Os eixos do elipsóide que modela a barra possuem medidas 6 kpc, 3 kpc e 0.6 kpc.

7.1.3 MODELO C

Este é o modelo que dobra a dimensão de c em relação ao Modelo S. Os parâmetros utilizados são:

- Plummer: $\epsilon_S = 0.4$ e $M_S = 0.08$
- Miyamotto-Nagai: $A = 3$, $B = 1$ e $M_D = 0.82$
- Ferrers: $a = 6$, $b = 1.5$, $c = 1.2$, $\Omega_b = 0.054$ e $M_B = 0.1$

Neste modelo, considera-se que as distribuições de massa são 8% para o bojo, 82% para o disco e 10% para a barra. Os eixos do elipsóide que modela a barra possuem medidas 6 kpc, 1.5 kpc e 1.2 kpc.

7.1.4 MODELO M

Este é o modelo que dobra a massa da barra em relação ao Modelo S. Os parâmetros utilizados são:

- Plummer: $\epsilon_S = 0.4$ e $M_S = 0.08$
- Miyamotto-Nagai: $A = 3$, $B = 1$ e $M_D = 0.72$
- Ferrers: $a = 6$, $b = 1.5$, $c = 0.6$, $\Omega_b = 0.054$ e $M_B = 0.2$

Neste modelo, considera-se que as distribuições de massa são 8% para o bojo, 72% para o disco e 20% para a barra. Os eixos do elipsóide que modela a barra possuem medidas 6 kpc, 1.5 kpc e 0.6 kpc.

7.1.5 MODELO BPLUS

Este é o modelo que triplica a dimensão de b em relação ao Modelo S. Os parâmetros utilizados são:

- Plummer: $\epsilon_S = 0.4$ e $M_S = 0.08$
- Miyamotto-Nagai: $A = 3$, $B = 1$ e $M_D = 0.82$
- Ferrers: $a = 6$, $b = 4.5$, $c = 0.6$, $\Omega_b = 0.054$ e $M_B = 0.1$

Neste modelo, considera-se que as distribuições de massa são 8% para o bojo, 82% para o disco e 10% para a barra. Os eixos do elipsóide que modela a barra possuem medidas 6 kpc, 4.5 kpc e 0.6 kpc.

7.1.6 MODELO MPLUS

Este é o modelo que triplica a massa da barra em relação ao Modelo S. Os parâmetros utilizados são:

- Plummer: $\epsilon_S = 0.4$ e $M_S = 0.08$
- Miyamotto-Nagai: $A = 3$, $B = 1$ e $M_D = 0.62$
- Ferrers: $a = 6$, $b = 1.5$, $c = 0.6$, $\Omega_b = 0.054$ e $M_B = 0.3$

Neste modelo, considera-se que as distribuições de massa são 8% para o bojo, 62% para o disco e 30% para a barra. Os eixos do elipsóide que modela a barra possuem medidas 6 kpc, 1.5 kpc e 0.6 kpc.

7.1.7 RESUMO ESQUEMÁTICO DOS MODELOS

A Tabela 1 apresenta um resumo esquemático de todos os modelos estudados neste capítulo.

Perceba que, geometricamente, de acordo com a Tabela 1, quando comparado com o Modelo S, o Modelos B possui uma forma mais axissimétrica no nosso plano de interesse (xy). Esse fato é potencializado quando observamos o Modelo Bplus, onde a forma é ainda mais axissimétrica, fazendo com que o potencial seja representativo de uma galáxia similar a uma galáxia oval. Por outro lado, o Modelo M, quando comparado com o Modelo S, possui uma barra mais proeminente. Também, o Modelo Mplus enfatiza ainda mais essa situação, criando uma barra muito proeminente e forte. Todas essas afirmações podem ser visualizadas nas imagens dos Potenciais Efetivos exibidas na próxima seção (Figura 15).

Tabela 1 – Conjuntos de parâmetros e corrotação: estão dispostos os Modelos S, B, C e M de Manos e Athanassoula (2011) e os novos Modelos Bplus e Mplus.

	M_S	ϵ_S	M_D	A	B	M_B	a	b	c	Ω_b	CR
Modelo S	0.08	0.4	0.82	3.0	1.0	0.1	6.0	1.5	0.6	0.054	6.04
Modelo B	0.08	0.4	0.82	3.0	1.0	0.1	6.0	3.0	0.6	0.054	6.06
Modelo C	0.08	0.4	0.82	3.0	1.0	0.1	6.0	1.5	1.2	0.054	6.04
Modelo M	0.08	0.4	0.72	3.0	1.0	0.2	6.0	1.5	0.6	0.054	6.11
Modelo Bplus	0.08	0.4	0.82	3.0	1.0	0.1	6.0	4.5	0.6	0.054	6.10
Modelo Mplus	0.08	0.4	0.62	3.0	1.0	0.3	6.0	1.5	0.6	0.054	6.28

Fonte: o autor.

7.2 POTENCIAIS EFETIVOS

Como visto no Capítulo 5, Seção 5.3, o Potencial Efetivo, que nada mais é que a soma do potencial gravitacional com o potencial gerado pela força centrífuga repulsiva, é dado por:

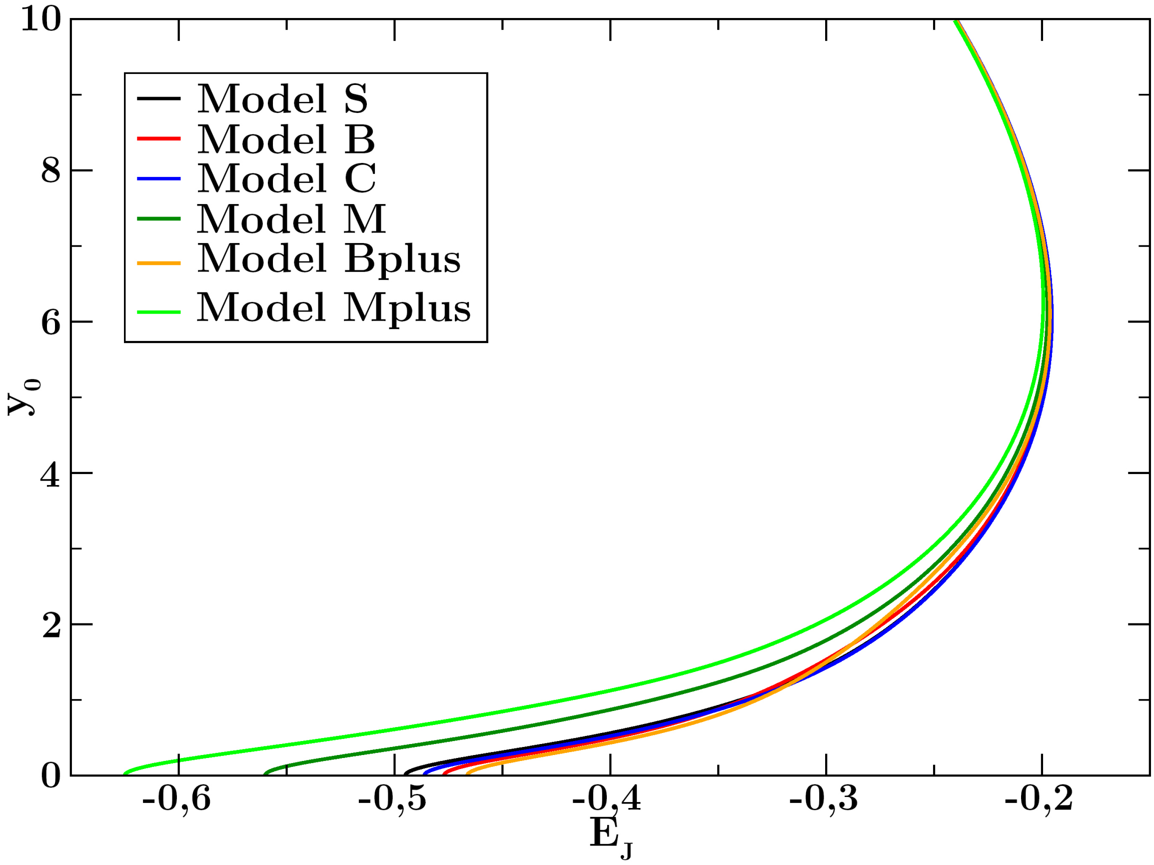
$$\Phi_{eff}(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}|\Omega \times \mathbf{x}|^2$$

Escrevendo o potencial deste modo, temos as correções necessárias pelo fato de este potencial ser representativo de algo que está girando.

O Potencial Efetivo é caracterizado por cinco pontos onde $\bigtriangledown\Phi_{eff} = 0$. Estes pontos são chamados de Pontos de Lagrange e são denotados por $L1, L2, L3, L4$ e $L5$. Seguindo a mesma notação que Binney e Tremaine (2008), aqui se utiliza $L3$ para indicar o ponto central, neste ponto tem-se o valor mínimo para o potencial efetivo. Em $L4$ e $L5$, o potencial efetivo atinge seu valor máximo. Os pontos $L1$ e $L2$ são pontos de sela deste potencial. Nos pontos $L1, L2, L4$ e $L5$ é possível uma estrela possuir órbita circular, apesar do referencial em rotação, pois, nestes locais, as forças centrífuga e gravitacional se equilibram.

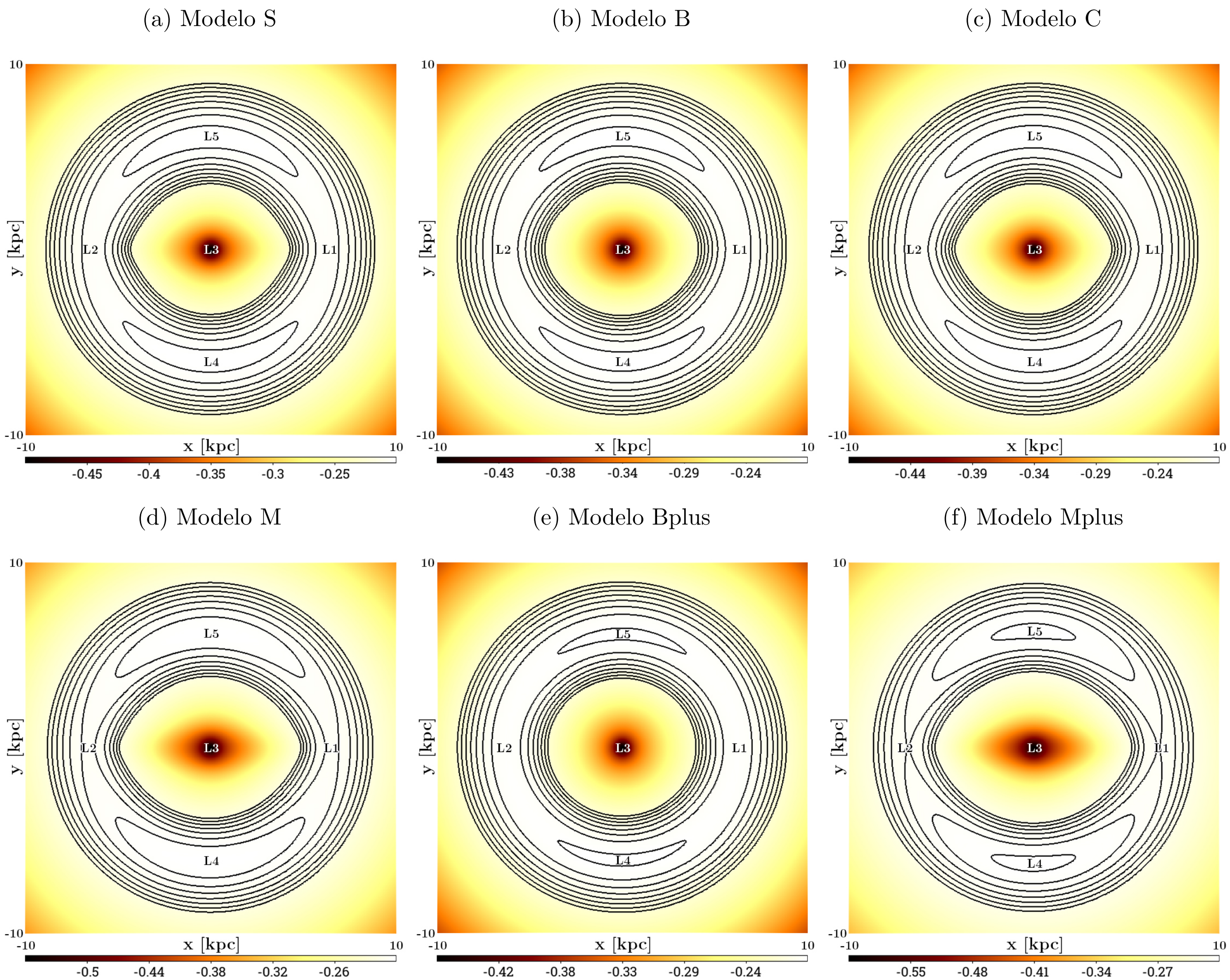
Também foi visto que se pode restringir regiões onde não se encontram estrelas ($\Phi_{eff} > E_J$). Desse modo, sabe-se claramente onde as estrelas podem estar localizadas. Podemos utilizar as Curvas de Velocidade Zero para este fim. A Figura 14 exibe a Curva de Velocidade Zero assim como a Figura 15 exibe o Potencial Efetivo para todos os modelos discutidos anteriormente.

Figura 14 – Curvas de Velocidade Zero para os Modelos S, B, C, M, Bplus e Mplus.



Fonte: o autor.

Figura 15 – Contornos do Potencial Efetivo para todos os modelos e os pontos de Lagrange $L1, L2, L3, L4$ e $L5$.



Fonte: o autor.

Na Figura 15 foram dispostos 20 contornos onde $-0.22 < E_J < -0.19$.

7.3 CONDIÇÕES INICIAIS

Para gerar as condições iniciais das órbitas lançadas em cada modelo, utilizou-se como restrição as curvas de velocidade zero. As órbitas foram lançadas abaixo da curva tomando um total de 200 partições no eixo E_J, iniciando no ponto onde $y_0 = 0$ e prosseguindo até a região onde $E_{-}0.15$, e de 100 partições no eixo y_0, sendo que as partições deste segundo eixo foram distribuídas proporcionalmente de acordo com a altura da curva em y_0 ou até a altura que torna possível ter condições iniciais desde o início da curva.

Tomou-se $x_0 = 0$ e $v_{y_0} = 0$. Variando y_0 e E_J pôde-se calcular v_x da seguinte forma:

Da equação (5.23), tem-se

$$E_J = \frac{1}{2}(v_{x_0}^2 + v_{y_0}^2) + \Phi_{eff} = \frac{1}{2}v_{x_0}^2 + \Phi_{eff}$$

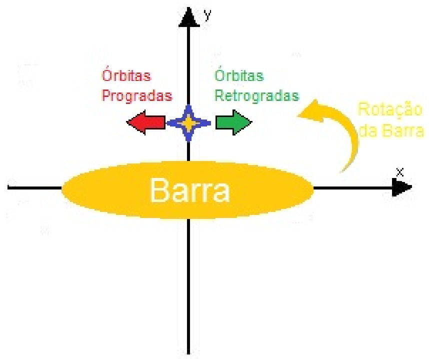
Disto segue que

$$v_{x_0} = \pm\sqrt{2(E_J - \Phi_{eff})} \tag{7.2}$$

Desse modo, consegue-se montar as condições iniciais $(x_0, y_0, v_{x_0}, v_{y_0})$ necessárias para se iniciar o movimento de uma órbita. Como $x_0 = 0$ e $v_{y_0} = 0$, as órbitas lançadas sempre estarão inicialmente sobre o eixo y e terão velocidade inicial apenas na direção de x.

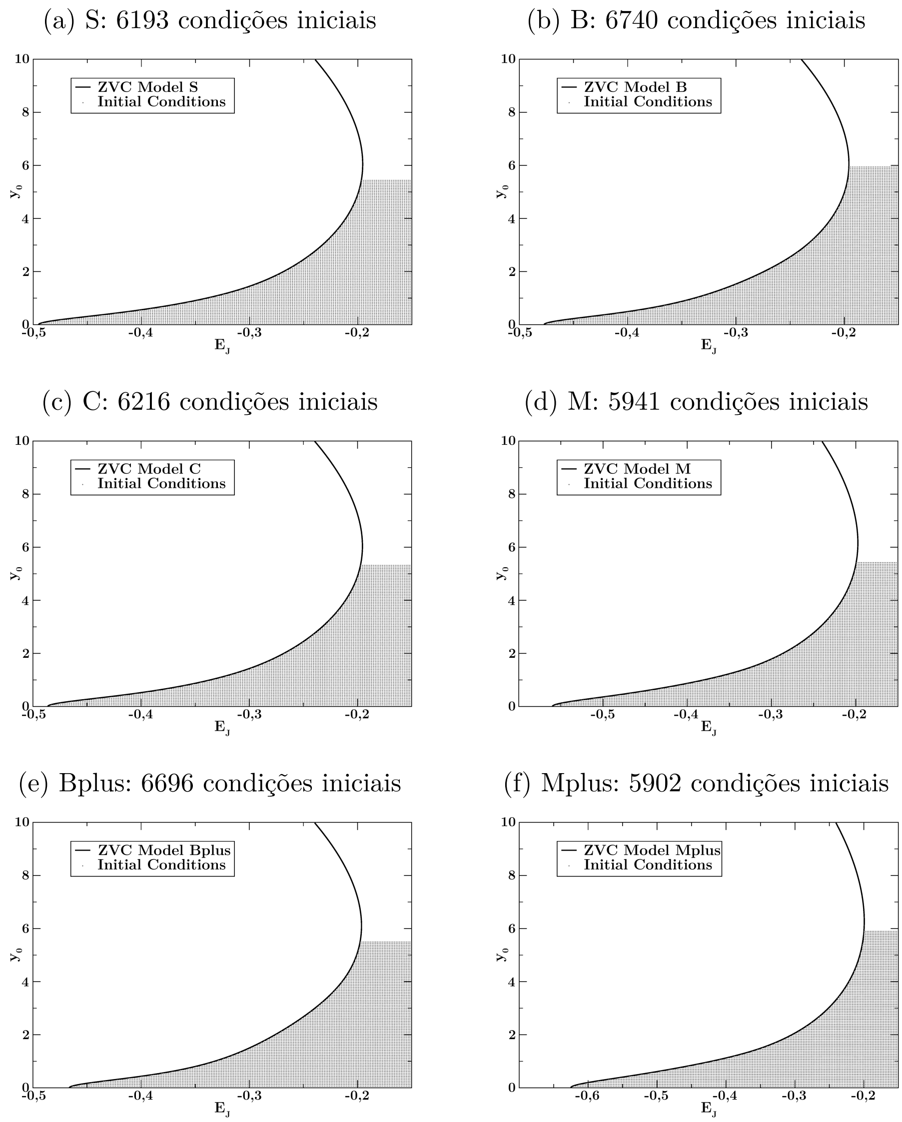
Perceba que da equação (7.2) pode-se estimar duas velocidades: Uma negativa e outra positiva. Utilizando este fato, tomamos y_0 sempre positivo, variando entre 0 e a corrotação da barra, para que quando v_{x_0} for tomado positivo, as órbitas sejam progradas (órbitas que giram no mesmo sentido que gira a barra) e quando v_{x_0} for negativo, as órbitas sejam retrogradas (órbitas que giram no sentido oposto do que gira a barra). A Figura 16 esquematiza esta situação. Já a Figura 17 exibe as condições iniciais lançadas representadas por pontos abaixo das Curvas de Velocidade Zero de cada modelo.

Figura 16 – Órbitas Progradas e Retrogradas.



Fonte: o autor.

Figura 17 – Condições Iniciais para os Modelos S, B, C, M, Bplus e Mplus.



Fonte: o autor.

Esta técnica é bastante diferente da escolhida por Manos e Athanassoula (2011) para gerar condições iniciais. Para se aproximar da família principal de órbitas periódicas, Manos e Athanassoula (2011) escolheram as condições iniciais em diferentes divisões no espaço de fase ou na distribuição de densidade. Não estamos interessados em avaliar a dinâmica perto de nenhuma família particular de órbitas periódicas. Na verdade, esta técnica que utilizamos nos permite ter uma boa visão geral, na qual regiões próximas a algumas famílias de órbitas periódicas também fazem parte. Nós também separamos as órbitas progradas das órbitas retrogradas para realizar estudos independentes, de forma diferente de Manos e Athanassoula (2011). Uma vantagem da maneira como escolhemos as condições iniciais é a possibilidade de ilustrar cada condição inicial como um ponto bem determinado em uma forma gráfica abaixo da Curva de Velocidade Zero. Isso é muito útil para a criação de imagens que ilustram a distribuição da ordem e do caos nos modelos, o que fizemos ao colorir esses pontos de acordo com o nível de caos da órbita que representa.

7.4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Sabe-se que o movimento de uma partícula de teste em um modelo tridimensional de rotação de uma galáxia barrada é dado pelo Hamiltoniano:

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Phi_T(x, y, z) + \Omega_b(xp_y - yp_x)$$

onde a barra galáctica roda em torno de z; x e y contém respectivamente os eixos maior e menor da barra, Φ_T é o potencial gravitacional e Ω_b representa a velocidade angular padrão da barra.

Para a distinção entre movimentos ordenados ou caóticos neste sistema utilizamos o SALI (ou $GALI_2$).

Recordemos que considerando um fluxo hamiltoniano (N graus de liberdade), uma órbita no espaço de fase $2N$-dimensional com condição inicial $P(0) = (x_1(0), \cdots, x_{2N}(0))$ e dois vetores de desvios iniciais distintos $w_1(t)$ e $w_2(t)$ a partir do ponto inicial $P(0)$, SALI é definido como:

$$SALI(t) = min\{||\widehat{w}_1(t) + \widehat{w}_2(t)||, ||\widehat{w}_1(t) - \widehat{w}_2(t)||\}$$

onde $\widehat{w}_i(t) = \dfrac{w_i(t)}{||w_i(t)||}$ para $i \in \{1, 2\}$.

No caso de órbitas caóticas, $SALI(t)$ cai exponencialmente para zero, do seguinte modo:

$$SALI(t) \propto e^{-(L_1 - L_2)t}$$

com L_1 e L_2 os maiores Expoentes Característicos de Lyapunov.

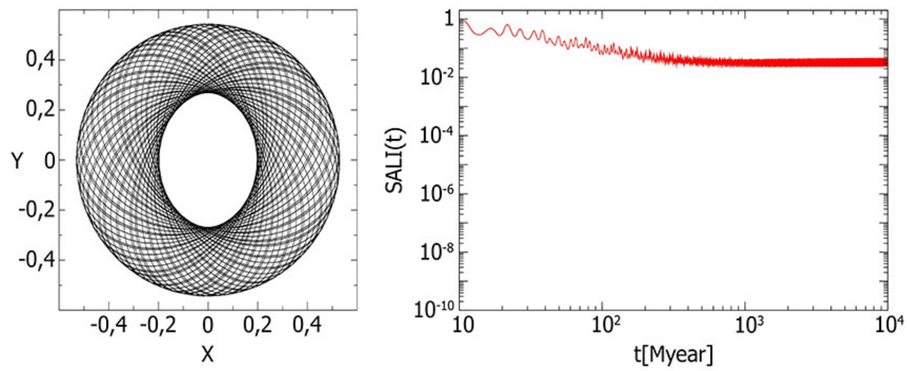
Quando o comportamento é ordenado, SALI oscila em valores não nulos, ou seja:

$$SALI(t) \approx constante > 0, t \longrightarrow \infty$$

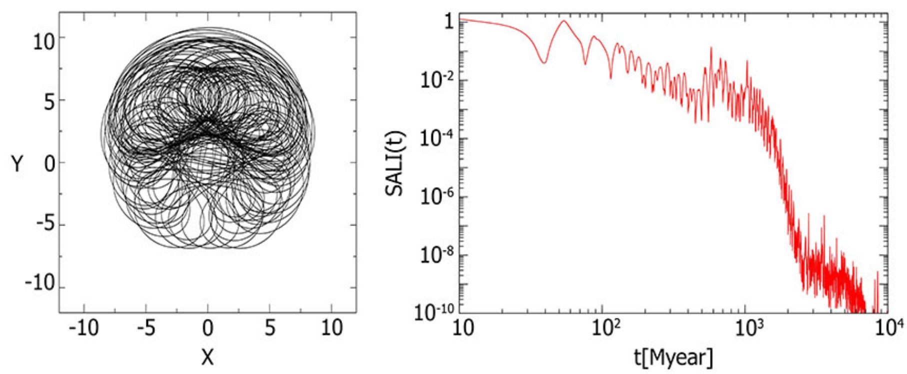
Consegue-se, portanto, como pode ser conferido na Figura 18, uma distinção clara entre comportamentos orbitais ordenados e caóticos nos modelos de galáxias barradas apresentados anteriormente

Figura 18 – Como SALI distingue ordem de caos.

(a) Condição Inicial: $(x, y, v_x, v_y) = (0, 0.5436, 0.1411, 0)$ - Modelo S - Órbita Regular



(b) Condição Inicial: $(x, y, v_x, v_y = (0, 0.0640, 0.7960, 0)$ - Modelo S - Órbita Caótica



Fonte: o autor.

Por uma questão de conveniência e eficiência, inserimos uma condição no cálculo de SALI no programa LP-VIcode de modo que nos fosse indicado o momento em que $SALI < 10^{-8}$, valor este que consideramos próximo o suficiente de zero para classificar a órbita como caótica. No momento em que isto ocorre, adaptamos o LP-VIcode para registrar o valor do tempo em que a órbita passou a ser considerada caótica e iniciar o cálculo da próxima órbita. Isto nos auxilia criar uma distinção entre o "grau de caoticidade"das órbitas na representação gráfica dos dados dando cores diferentes para cada caso.

Os níveis de caoticidade foram separados em 4 categorias exibidas na Tabela 2

As Figuras 19 à 24 mostram a porcentagem de órbitas caóticas, enquanto que as Figuras 25 à 30 exibem a distribuição entre ordem e caos em cada modelo.

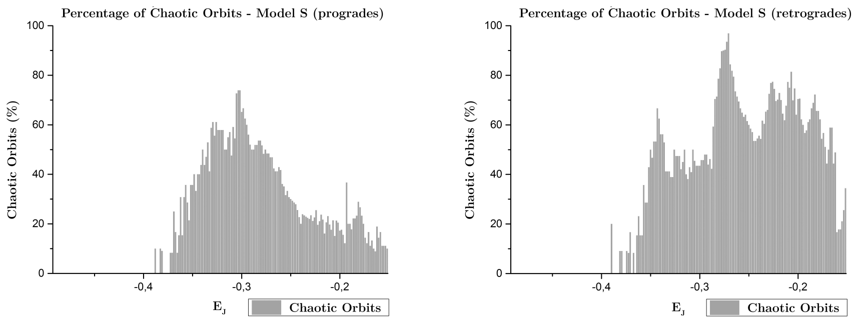
H

Tabela 2 – Níveis de caoticidade.

Nível	Condição
Nível 1	$SALI < 10^{-8}$ para $t \in [0, 2500)$ $Myear$
Nível 2	$SALI < 10^{-8}$ para $t \in [2500, 5000)$ $Myear$
Nível 3	$SALI < 10^{-8}$ para $t \in [5000, 7500)$ $Myear$
Nível 4	$SALI < 10^{-8}$ para $t \in [7500, 10000)$ $Myear$

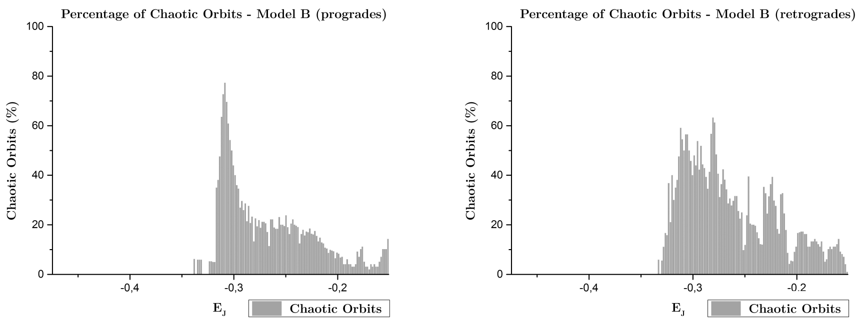
Fonte: O autor.

Figura 19 – Porcentagem de Caos no Modelo S para Órbitas Progradas e Retrogradas.



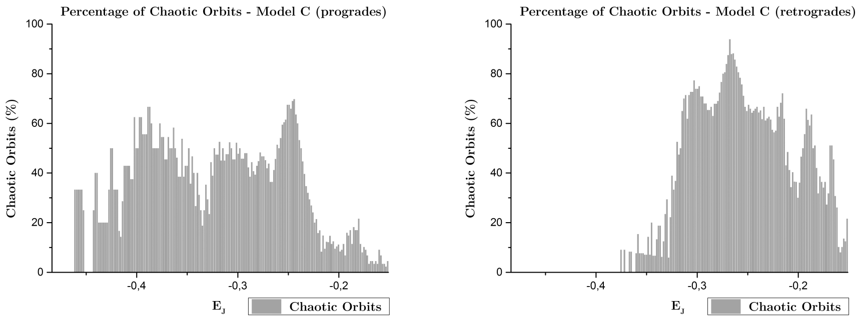
Fonte: o autor.

Figura 20 – Porcentagem de Caos no Modelo B para Órbitas Progradas e Retrogradas.



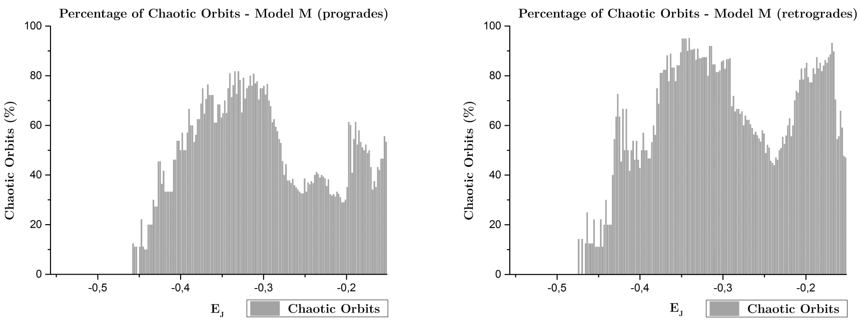
Fonte: o autor.

Figura 21 – Porcentagem de Caos no Modelo C para Órbitas Progradas e Retrogradas.



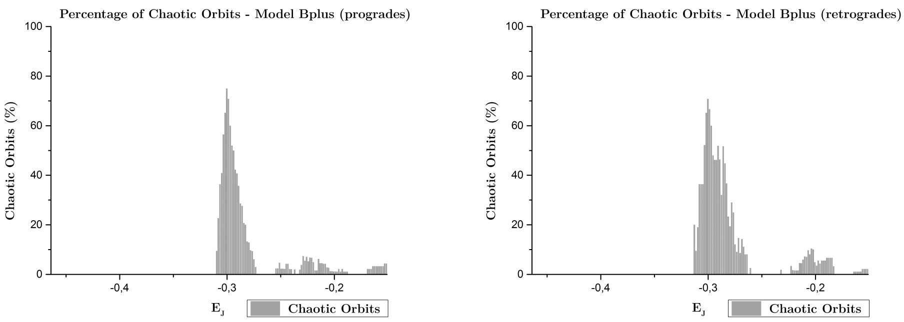
Fonte: o autor.

Figura 22 – Porcentagem de Caos no Modelo M para Órbitas Progradas e Retrogradas.



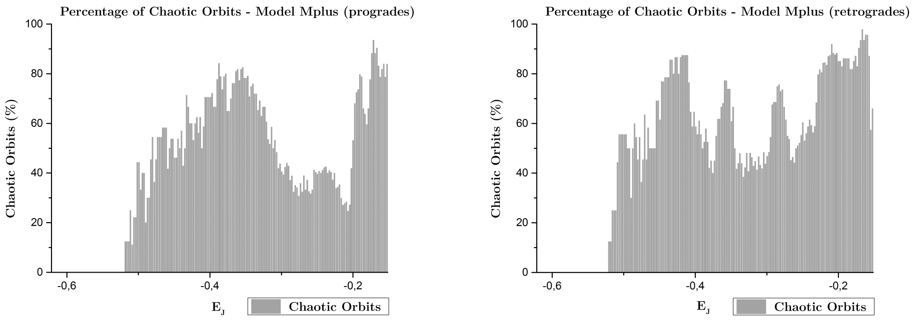
Fonte: o autor.

Figura 23 – Porcentagem de Caos no Modelo Bplus para Órbitas Progradas e Retrogradas.



Fonte: o autor.

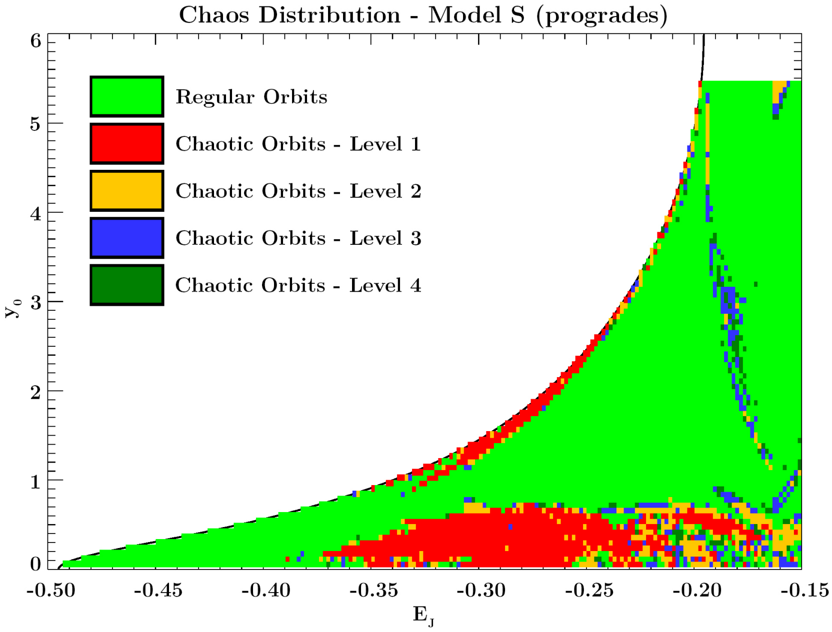
Figura 24 – Porcentagem de Caos no Modelo Mplus para Órbitas Progradas e Retrogradas.



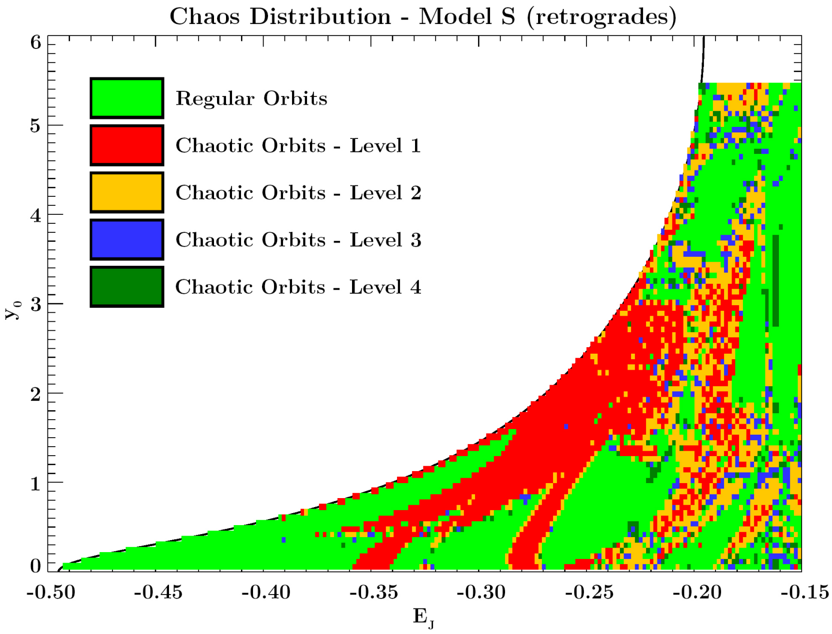
Fonte: o autor.

Figura 25 – Distribuição de Órbitas Regulares e Caóticas no Modelo S.

(a) Modelo S - órbitas progradas



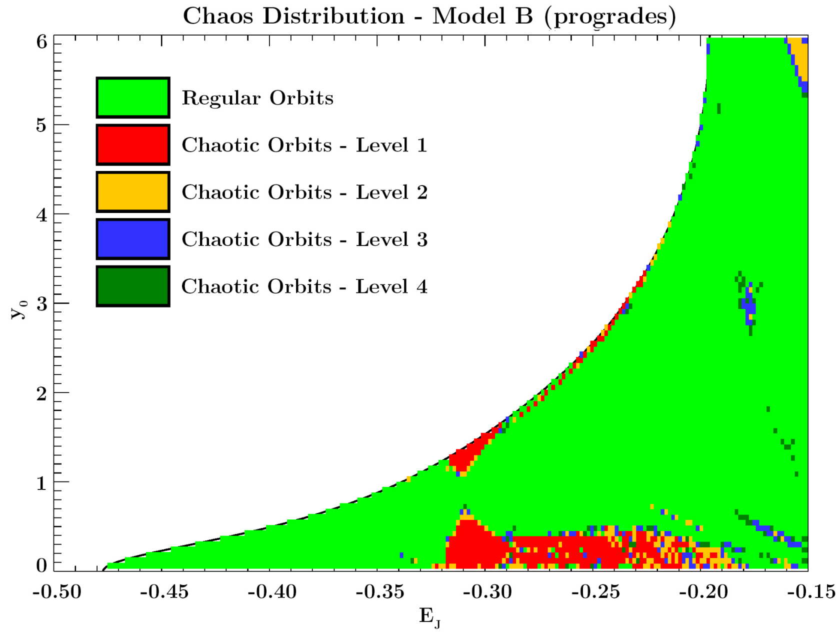
(b) Modelo S - órbitas retrogradas



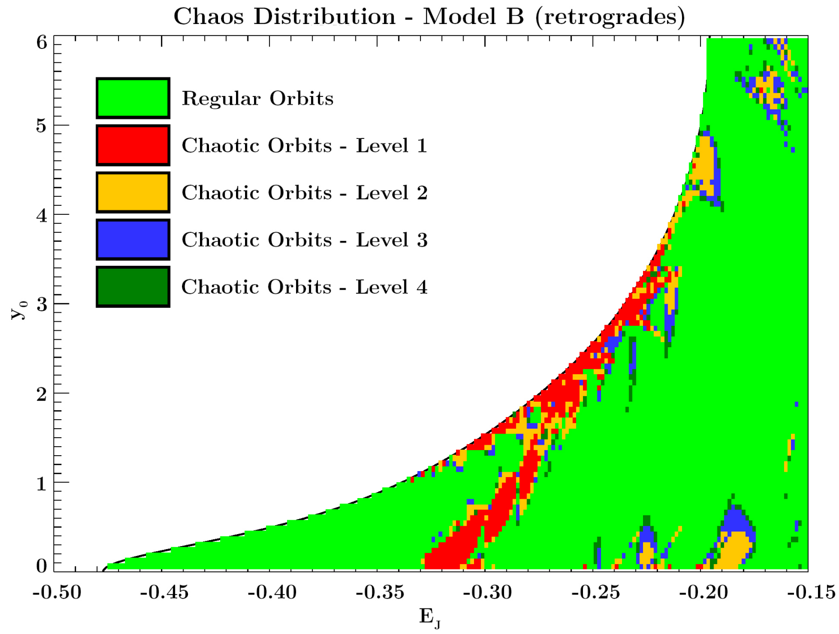
Fonte: o autor.

Figura 26 – Distribuição de Órbitas Regulares e Caóticas no Modelo B.

(a) Modelo B - órbitas progradas



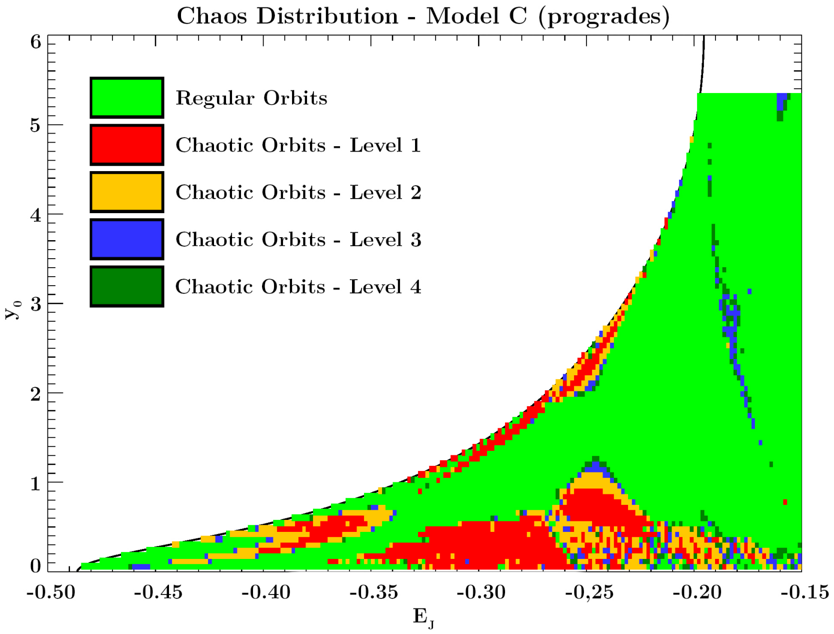
(b) Modelo B - órbitas retrogradas



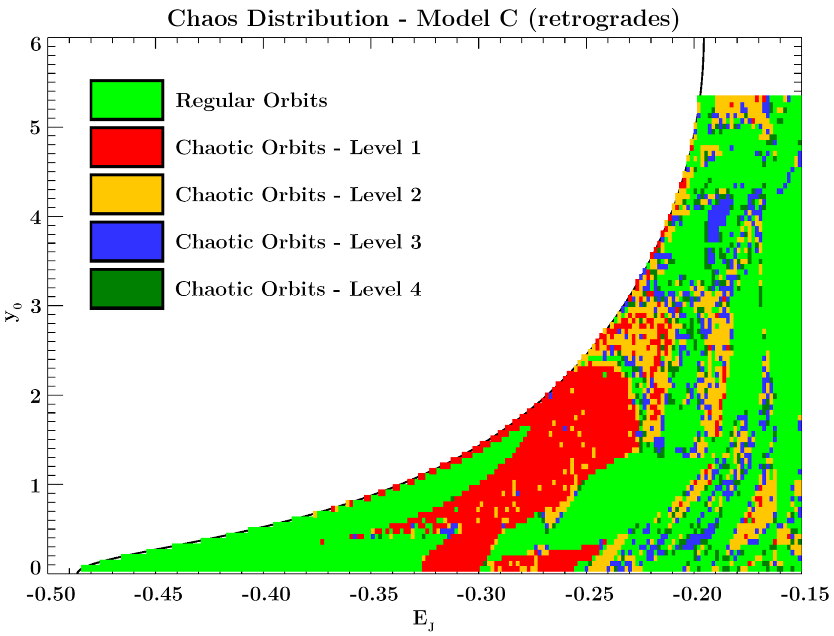
Fonte: o autor.

Figura 27 – Distribuição de Órbitas Regulares e Caóticas no Modelo C.

(a) Modelo C - órbitas progradas



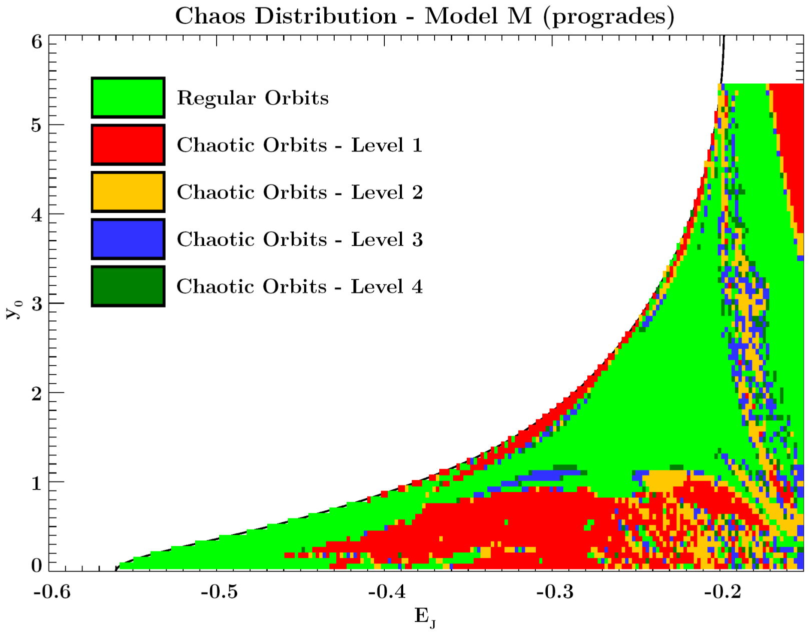
(b) Modelo C - órbitas retrogradas



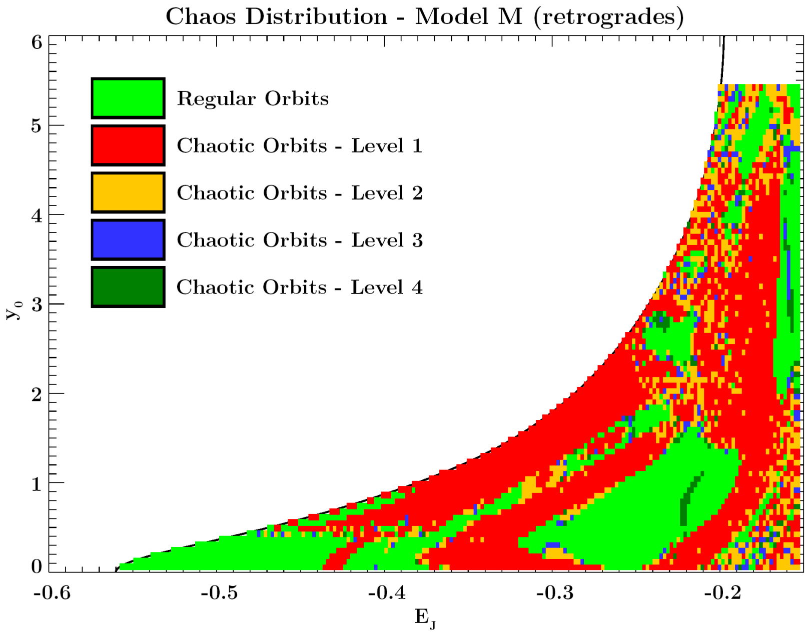
Fonte: o autor.

Figura 28 – Distribuição de Órbitas Regulares e Caóticas no Modelo M.

(a) Modelo M - órbitas progradas



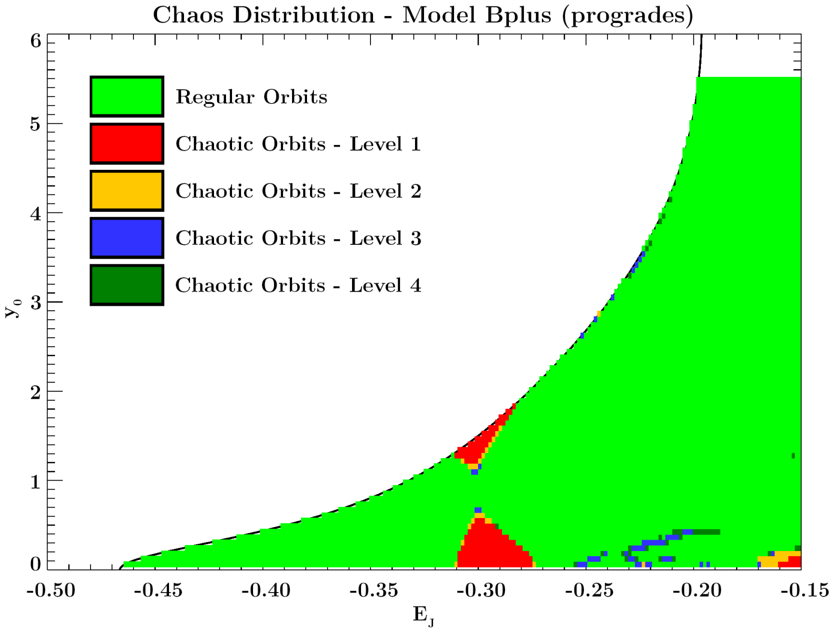
(b) Modelo M - órbitas retrogradas



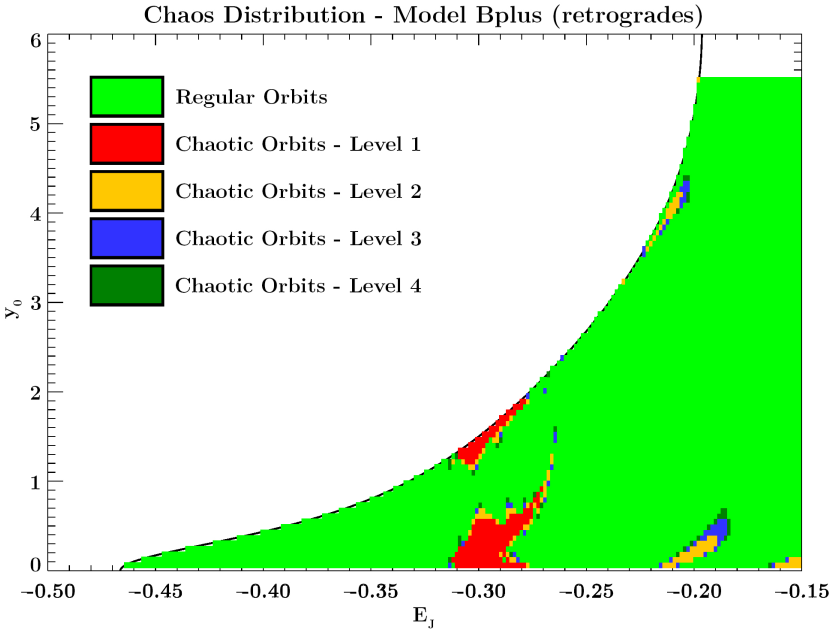
Fonte: o autor.

Figura 29 – Distribuição de Órbitas Regulares e Caóticas no Modelo Bplus.

(a) Modelo Bplus - órbitas progradas

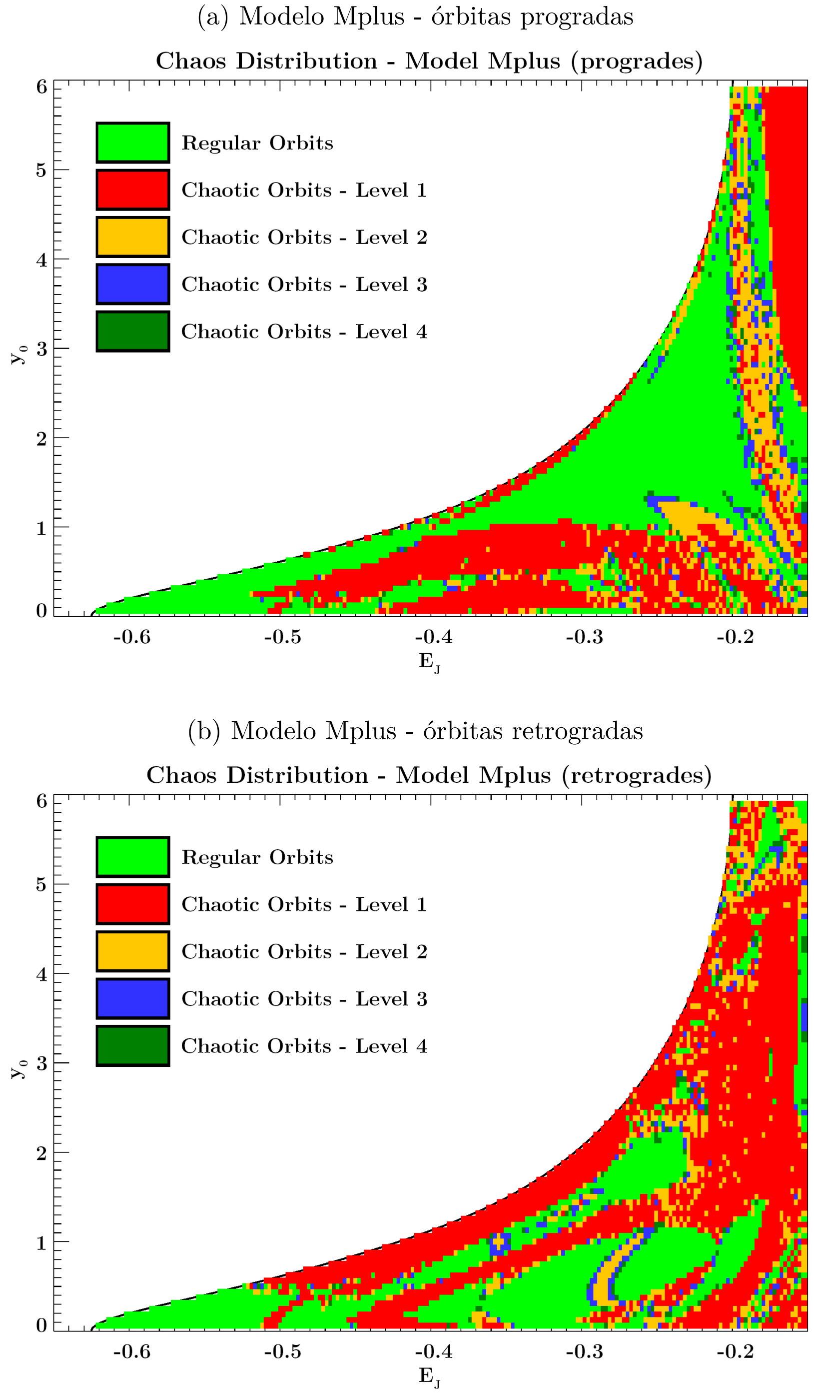


(b) Modelo Bplus - órbitas retrogradas



Fonte: o autor.

Figura 30 – Distribuição de Órbitas Regulares e Caóticas no Modelo Mplus.



Fonte: o autor.

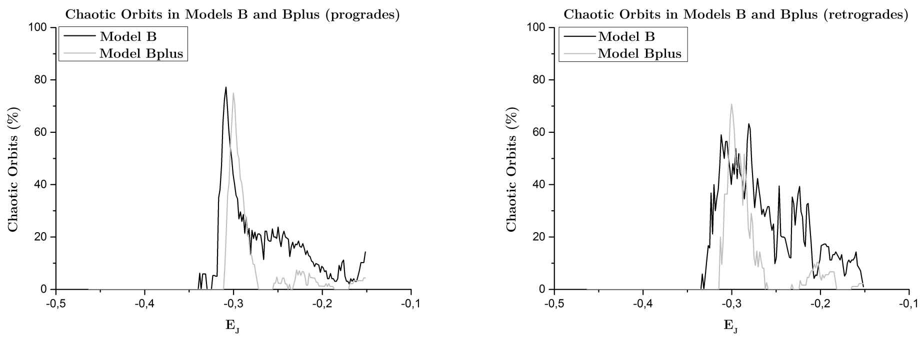
Como esperado, o Modelo B apresentou menos caos do que o Modelo S, uma vez que o Modelo B é "mais axissimétrico"do que o Modelo S. De fato, em casos totalmente axissimétricos não existe nenhum caos. Em nosso estudo, o fato de o Modelo B dobrar o valor de b comparado ao Modelo S, implica um modelo menos elipsoidal e "mais axissimétrico". Este é o motivo de o modelo B apresentar mais regularidade. De acordo

Manos e Athanassoula (2011), modelos com uma barra mais espessa apresentam órbitas geralmente menos caóticas. No artigo publicado por eles, o Modelo B, de fato, também exibiu mais regularidade quando comparado com os Modelos S, C e M.

Para explorar ainda mais essa tendência, introduzimos o Modelo Bplus, o qual deixamos "ainda mais axissimétrico". A Figura 31 mostra uma diminuição ainda maior na porcentagem de caos neste novo modelo, confirmando as declarações feitas acima. Na Figura 31, as órbitas progradas são mostradas em (a) e as retrogradas em (b). Pode-se observar que as linhas que representam o Modelo B ficam acima das linhas que representam o Modelo Bplus, exceto por pequenas exceções em alguns valores de E_J. Isso indica que o Modelo Bplus tem menos caos do que o Modelo B.

Figura 31 – Comparando as Porcentagens de Caos dos Modelos B e Bplus.

(a) Modelo B - Bplus progradas (b) Modelo B - Bplus retrogradas



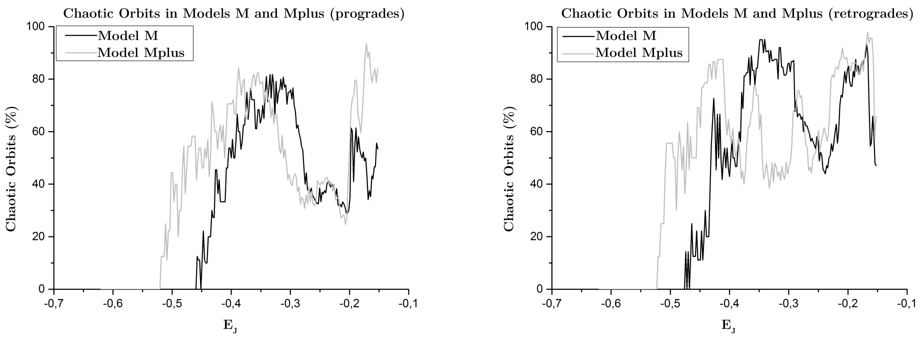
Fonte: o autor.

Nós conseguimos observar uma diferença razoável entre Modelos S e C, especialmente nas órbitas de progradas, apesar de c ser o tamanho do elipsoide que representa a barra na direção de z. Vale lembrar que, para obter dois graus de liberdade, fizemos um corte em $z = 0$ e $p_z = 0$ no Hamiltoniano mostrado na equação (5.24). Em outras palavras, estudamos um corte com dois graus de liberdade inseridos em um sistema com três graus de liberdade. Sendo assim, valor c não foi removido dos cálculos e aqui podemos observar sua influência a estabilidade das órbitas.

O Modelo M apresentou muito mais órbitas caóticas em comparação com o Modelo S. Uma barra com o dobro da massa criou um ambiente muito mais propício para órbitas caóticas. Introduzimos o Modelo Mplus para estudar a dinâmica em um modelo ainda mais massivo, com o triplo da massa quando comparado ao Modelo S. Uma comparação entre a porcentagem de caos no Modelo M e Modelo Mplus é exibida na Figura 32. Os resultados revelam mais caos no novo modelo, as órbitas progradas são mostradas em (a) e as retrogradas em (b). Pode-se observar que as linhas que representam o Modelo Mplus ficam acima das linhas que representam o Modelo M, exceto por pequenas exceções em alguns valores de E_J. Isso indica que o Modelo M tem menos caos do que o Modelo Mplus. Esta é uma evidência de que o caos se revela dominante nas galáxias onde a barra é mais massiva, em outras palavras, barras mais massivas criam um ambiente mais propício ao caos. De fato, essa observação reafirma o que foi apresentado por Athanassoula et al. (1983), onde os autores também encontraram mais caos em barras com maiores massas. Este fenômeno também foi observado por Manos e Athanassoula (2011), onde se observa que o mesmo Modelo M, quando comparado com os outros três Modelos S, B e C, apresentou consideravelmente menos regularidade.

Figura 32 – Comparando as Porcentagens de Caos dos Modelos M e Mplus.

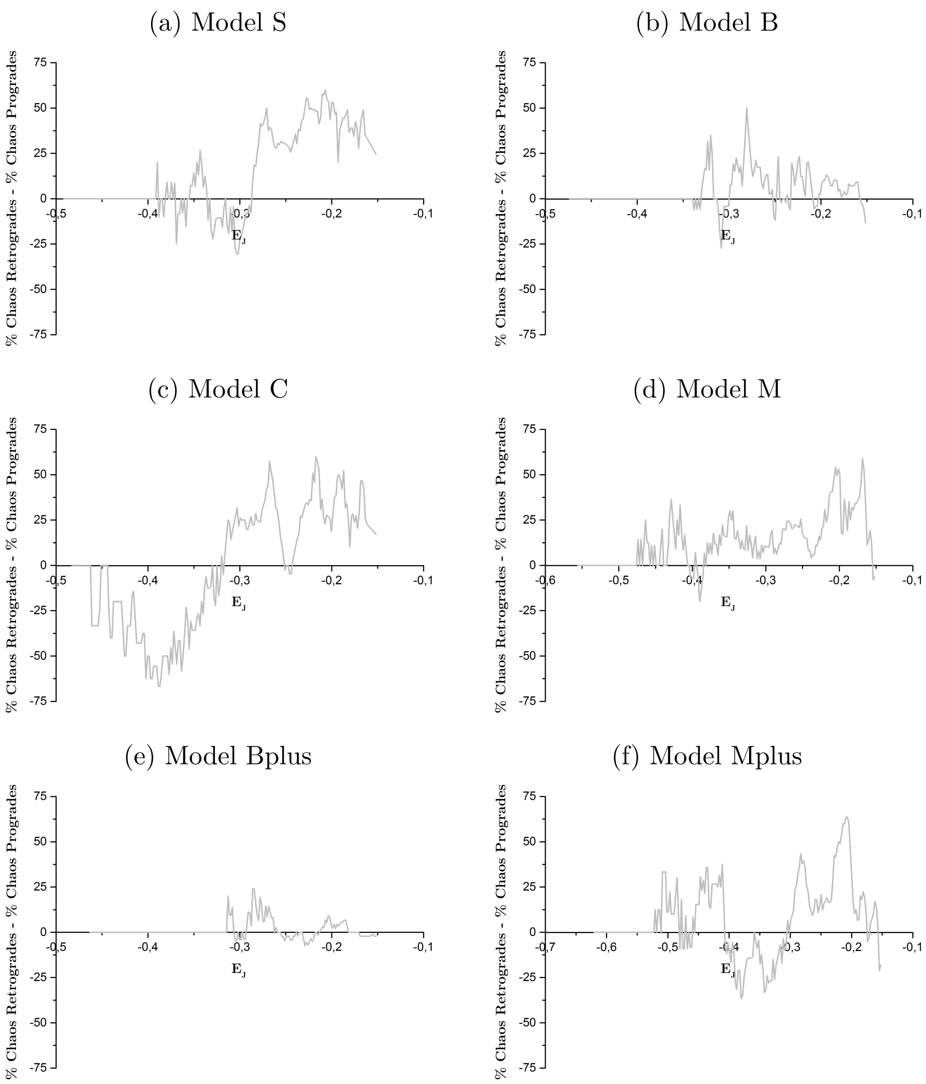
(a) Modelo M - Mplus progradas (b) Modelo M - Mplus retrogradas



Fonte: o autor.

Uma diferença natural é observada entre as órbitas progradas e retrogradas, uma vez que a direção da rotação da barra certamente afeta as trajetórias das órbitas lançadas com a mesma posição inicial e módulo de velocidade, mas com sinal oposto para a velocidade. Como pode ser visto claramente nas Figuras 19 à 30, as órbitas retrógradas parecem ser mais propícias ao caos. Para nos certificar deste fato, realizamos o cálculo da quantidade $\%\, de\, caos\, em\, órbitas\, retrogradas - \%\, de\, caos\, em\, órbitas\, progradas$ para cada energia E_J. O resultado é mostrado na Figura 33 e comprova nossas expectativas, exibindo mais caos em órbitas retrógradas. Note na Figura 33 que quando as linhas estão acima do eixo E_J, temos uma indicação de que há mais caos nas órbitas retrogradas do que nas órbitas progradas. Observando as imagens, pode-se confirmar que, para a maioria das energias, há mais caos nas órbitas retrógradas. A única exceção é o Modelo C, onde há um equilíbrio: para energias menores, há mais caos nas progradas e para maiores energias há mais caos nas retrogradas. No entanto, como já explicado anteriormente, o Modelo C é um caso especial que necessita de uma abordagem tridimensional para um estudo melhor. Curiosamente, como pode ser visto em (b) e (e), para modelos mais axissimétricos, a diferença entre as porcentagens de caos entre órbitas retrogradas e progradas é menor do que nos outros modelos.

Figura 33 – $\%\, de\, caos\, em\, \acute{o}rbitas\, retrogradas - \%\, de\, caos\, em\, \acute{o}rbitas\, progradas$ para cada energia E_J nos Modelos S, B, C, M, Bplus e Mplus.



Fonte: o autor.

Também pode ser notado nas Figuras 25 à 30 que, como esperado, em todos os casos, as regiões altamente caóticas estão cercadas por regiões *sticky*[2].

Apesar de observações gerais semelhantes, notamos que algumas porcentagens apresentadas em nosso estudo diferem significativamente das apresentadas por Manos e Athanassoula (2011) para alguns intervalos de energia. Quando apresentadas as porcentagens de órbitas caóticas em função da energia, seus valores tendem a ser diferentes para as energias mais elevadas. A priori, isso é altamente previsível, uma vez que estas porcentagens podem depender da escolha dos conjuntos de condições iniciais, portanto, não esperamos que elas fossem iguais em nenhum momento, uma vez que nossas condições

[2] Regiões sticky são regiões onde o caos é mais fraco (níveis 2, 3 ou 4 de acordo com a nossa classificação).

iniciais são totalmente diferentes das de Manos e Athanassoula (2011). Na verdade, oferecer um complemento ao estudo desses autores, incluindo novas análises, é um dos objetivos deste capítulo.

7.5 CONCLUSÕES

O objetivo principal deste capítulo foi verificar a influência da barra na estabilidade de órbitas imersas em potenciais gravitacionais analíticos representativos de barras fixas. Foram comparados seis modelos de barras e suas influências na estabilidade das órbitas. Quatro modelos extraídos de Manos e Athanassoula (2011) e dois novos modelos que representam situações extremas foram utilizados. Foi observado que quanto "mais axissimétrica"for a barra, menos caos o modelo apresenta; Bem como barras mais massivas criam um ambiente mais oportuno para órbitas caóticas. Além disso, através de um estudo independente e comparativo entre órbitas progradas e retrogradas, pudemos notar que, geralmente, as órbitas retrogradas são mais propícias ao caos.

Realizando as integrações com uma pequena adaptação do LP-VIcode, analisamos modelos consistentes para sistemas em rotação que modelam galáxias barradas e estudamos a estabilidade das órbitas através do Método SALI. O programa LP-VIcode atendeu a todas as nossas necessidades e apenas ajustes pequenos foram necessários.

Finalmente, utilizando a mesma modelagem e os mesmos conjuntos de parâmetros que Manos e Athanassoula (2011), mas alterando o caminho para fornecer condições iniciais, fomos capazes de oferecer outro ponto de vista para o trabalho desses autores, contribuindo e enriquecendo o estudo publicado por eles.

8 ESTABILIDADE EM MODELOS 2D COM BARRAS QUE EVOLUEM NO TEMPO: PARÂMETROS INSPIRADOS NA GALÁXIA REAL NGC 936.

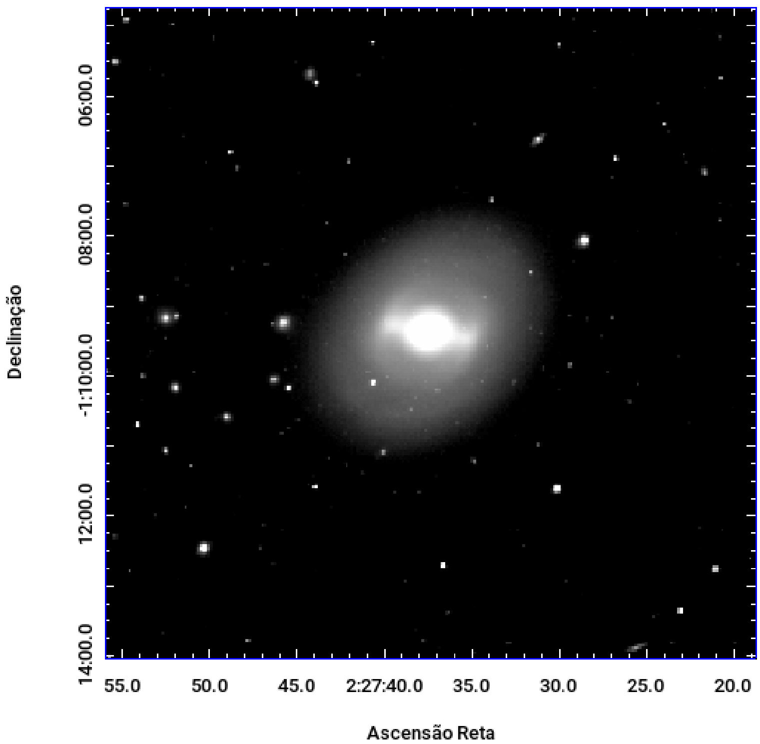
Neste capítulo trataremos de modelos de potenciais de barras galácticas que surgem e crescem ao longo do tempo. Utilizamos uma galáxia real como inspiração para nossos parâmetros: a NGC 936.

8.1 SOBRE A NGC 936

A NGC 936 é uma galáxia espiral barrada, tipo $SB0$ no esquema de Hubble, que está distante aproximadamente 60 milhões de anos luz na direção da constelação Cetus (da Baleia). Como pode ser observado na Figura 34, esta galáxia possui uma barra e um bojo muito proeminentes e uma estrutura de anel que rodeia a barra (todas essas componentes visíveis, inclusive, em telescópios amadores).

Foi descoberta no dia 06 de janeiro de 1785 por William Herschel e classificada, na época, como uma nebulosa planetária, por conta de seu formato redondo (Herschel, 1785a; Herschel, 1785b).

Figura 34 – Imagem em banda R da galáxia NGC936

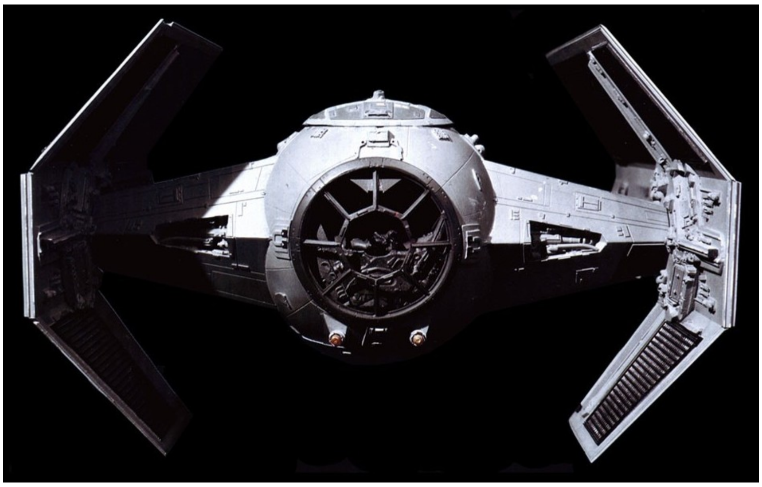


Fonte: SDSS - Sloan Digital Sky Survey

Uma curiosidade é que a galáxia NGC 936 é apelidada por galáxia do Darth Vader, de Star Wars, porque sua estrutura de bojo, barra e anel a faz parecer com um TIE Fighter

(Figura 35), nave utilizada pelo vilão em um dos episódios da saga.

Figura 35 – Nave TIE Fighter de Darth Vader



Fonte: The Fenomen of Travaller (2017)

8.2 MODELAGEM E PARÂMETROS

Como os modelos descritos na seção 5.2 já estavam implementados e funcionando bem no LP-VIcode, decidimos manter a mesma modelagem. Para realizar o ajuste dos parâmetros necessários, foram utilizados os trabalhos de Kent e Glaudell (1989) e Merrifield e Kuijken (1995). Os procedimentos serão descritos individualmente a seguir.

8.2.1 PARÂMETROS DO POTENCIAL DE PLUMMER

Kent e Glaudell (1989), propõem uma aproximação analítica para o bojo da NGC 936 dada por um Modelo de King (King, 1962) truncado. A densidade do modelo apresentado é:

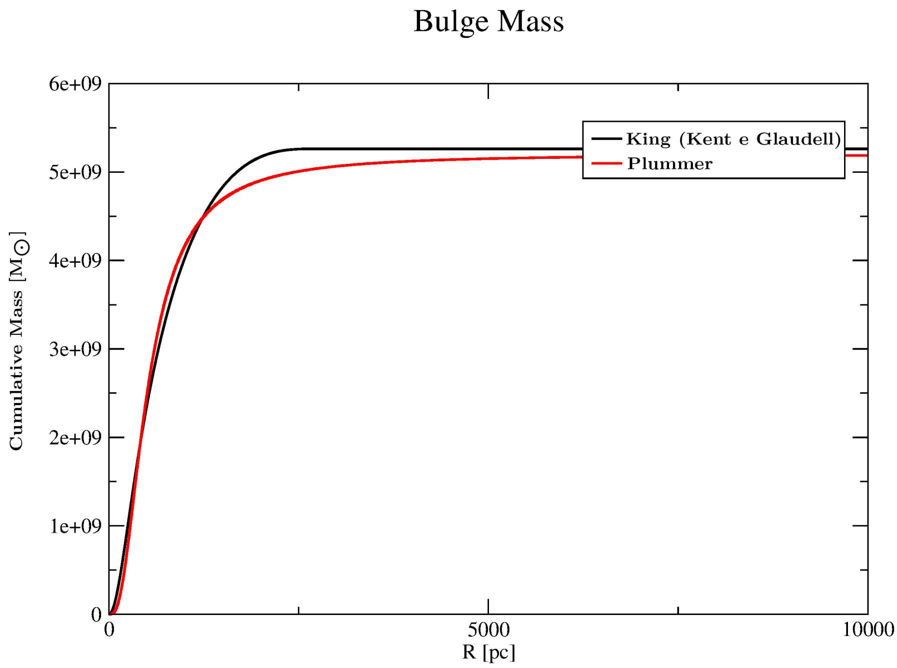
$$\rho(s) = \rho_c \left(\frac{1}{[1 + (\frac{s}{a})^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{[1 + (\frac{s_c}{a})^2]^{\frac{3}{2}}} \right) \tag{8.1}$$

onde $\rho_c = 22 \frac{L_{solar}}{pc^{-3}}$, $a = 265pc$, $s_c = 2,7kpc$ e a coordenada radial s é dada por $s^2 = x^2 + y^2 + (\frac{z}{0,63})^2$.

Variando os parâmetros ϵ_S e M_S no Modelo de Plummer (ver Seção 5.2), calculando a curva de massa acumulada para este modelo e comparando curva de massa acumulada do Modelo King descrito, utilizando o menor desvio padrão entre os pontos correspondentes dos gráficos, pudemos estimar os parâmetros ϵ_S e M_S para um melhor ajuste das curvas. O ajuste das curvas foi feito até o raio $2,7kpc$ e, desse modo, conseguimos estimar os valores

$\epsilon_S = 0,45$ e $M_S = 5,4 \times 10^9\ M_{solar}$. O resultado da aproximação destas curvas pode ser conferido na Figura 36.

Figura 36 – Comparação entre as curvas de crescimento de massa de King e Plummer.



Fonte: o autor.

8.2.2 PARÂMETROS DO POTENCIAL DE MIYAMOTO-NAGAI

O artigo de Kent e Glaudell (1989) apresenta o gráfico exibido na Figura 37, o qual nos permite extrair uma aproximação para o perfil de luminosidade do disco juntamente com a barra, como a que segue:

$$\Sigma = \Sigma_0 e^{-r/h} \tag{8.2}$$

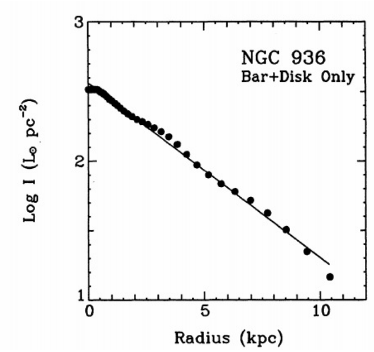
onde $\Sigma_0 = 355\ \frac{L_{solar}}{pc^2}$ e $h = 3.5\ kpc$.

Ajustando, análogo ao feito com o bojo, as curvas de crescimento de massa e utilizando o menor desvio padrão, pudemos estimar os parâmetros A e B de Miyamoto-Nagai, bem como a massa do disco somada a massa da barra. O ajuste das curvas foi feito até o raio $10kpc$ e, desse modo, conseguimos estimar os valores $A = 4,7$, $B = 0,4$ e $M_{disco+barra} = 3,7 \times 10^{10} M_{solar}$. O resultado da aproximação destas curvas é mostrado na Figura 38.

8.2.3 PARÂMETROS DO POTENCIAL DE FERRERS

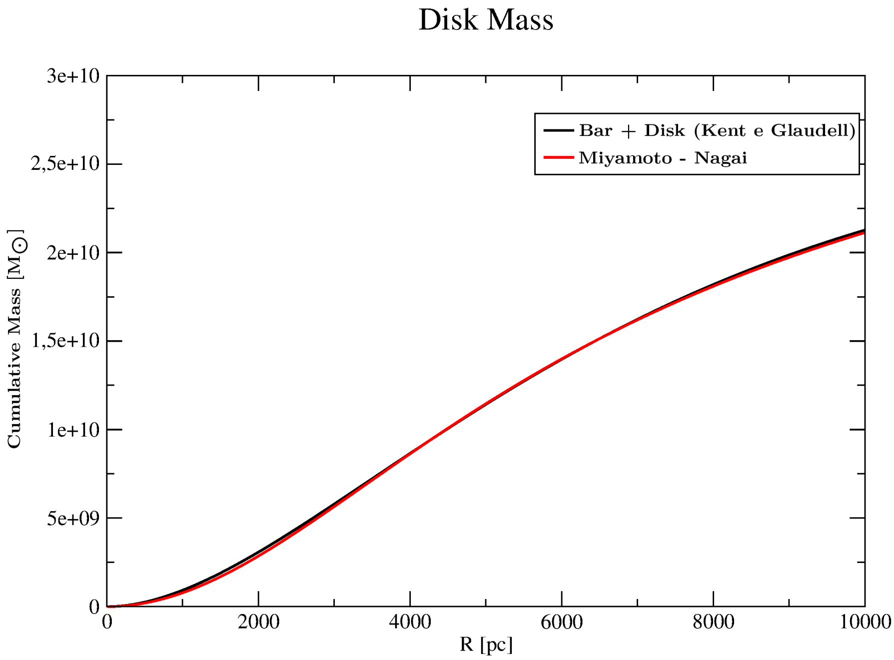
Para a barra, os parâmetros $a = 4\ kpc$ e $b = 1,1\ kpc$ do potencial de Ferrers, foram extraídos do artigo de Kent e Glaudell (1989) que aponta a barra como tendo

Figura 37 – Perfil de luminosidade exibido no artigo de Kent e Glaudell (1989).



Fonte: Kent e Glaudell (1989).

Figura 38 – Comparação entre as curvas de crescimento de massa do perfil extraído do gráfico e Miyamoto-Nagai.



Fonte: o autor.

dimensões $8,0 \times 2,2$ kpc. Deste mesmo trabalho, foi extraída a massa da barra, utilizando a informação da luminosidade, que no texto foi apresentada como $5,6 \times 10^9\ L_{solar}$. Desse fato, utilizando a relação $\frac{M}{L} = 1$ extraímos que a massa da barra $M_B = 5,6 \times 10^9\ M_{solar}$. Já o parâmetro c foi tomado como $c = 0,4\ kpc$ para apenas pela conveniência deste valor ser igual ao valor B do modelo de Miyamoto-Nagai apresentado anteriormente.

8.2.4 VELOCIDADE ANGULAR DA BARRA

Segundo Merrifield e Kuijken (1995), a velocidade angular da barra da galáxia NGC 936 está estimada em $\Omega_b = 60 \pm 14\ \frac{km}{s.kpc}$. Desse modo, decidimos estabelecer três modelos variando a velocidade da barra. As velocidades por nós consideradas e seus respectivos modelos estão exibidos na Tabela 3:

Tabela 3 – Modelos X, Y e Z variando a velocidade da barra da galáxia NGC 936.

Modelo X	Modelo Y	Modelo Z
$\Omega_b = 50 \dfrac{km}{s.kpc}$	$\Omega_b = 60 \dfrac{km}{s.kpc}$	$\Omega_b = 70 \dfrac{km}{s.kpc}$

Fonte: o autor.

8.3 QUADRO RESUMO DOS MODELOS INSPIRADOS NA NGC 936

A Tabela 4 exibe os três Modelos X, Y e Z e seus respectivos parâmetros. Ressaltamos que, assim como na seção 7.1, as unidades adotadas são: 1 kpc para distância, 10^3 $\dfrac{km}{sec}$ para velocidade, 10^3 $\dfrac{km}{sec.kpc}$ para velocidade angular, 1 Myr para tempo e 2×10^{11} M_{solar} para massa.

A constante gravitacional universal G será sempre considerada 1 e a massa total $G(M_S + M_D + M_B)$ será sempre igual a 1. Para isso, devemos efetuar alguns cálculos de proporções utilizando os valores das massas obtidos nas subseções 8.2.1, 8.2.2 e 8.2.3. Temos $M_S = 5,4 \times 10^9$ M_{solar}, $M_B = 5,6 \times 10^9$ M_{solar} e $M_D = M_{disco+barra} - M_B = 3,7 \times 10^{10} - 5,6 \times 10^9 = 37 \times 10^9 - 5,6 \times 10^9 = 31,4 \times 10^9$ M_{solar}. Dessa forma, a massa total $M_T = M_S + M_B + M_D = 5,4 \times 10^9 + 5,6 \times 10^9 + 31,4 \times 10^9 = 42,4 \times 10^9$ M_{solar}.

Sendo assim, as proporções ficam

$$\frac{M_S}{M_T} = \frac{5,4 \times 10^9}{42,4 \times 10^9} \approx 0,1273$$

$$\frac{M_D}{M_T} = \frac{31,4 \times 10^9}{42,4 \times 10^9} \approx 0,7406$$

$$\frac{M_B}{M_T} = \frac{5,6 \times 10^9}{42,4 \times 10^9} \approx 0,1321$$

Para que não haja confusão nas notações, vamos manter M_S, M_D e M_B inclusive para as proporções. Assim, temos as notações dos parâmetros iguais as que utilizamos ao longo de todo o texto até o momento.

Tabela 4 – Conjuntos de parâmetros: estão dispostos os Modelos X, Y e Z inspirados na galáxia NGC 936.

	M_S	ϵ_S	M_D	A	B	M_B	a	b	c	Ω_b
Modelo X	0.1273	0.45	0.7406	4.7	0.4	0.1321	4.0	1.1	0.4	0.05
Modelo Y	0.1273	0.45	0.7406	4.7	0.4	0.1321	4.0	1.1	0.4	0.06
Modelo Z	0.1273	0.45	0.7406	4.7	0.4	0.1321	4.0	1.1	0.4	0.07

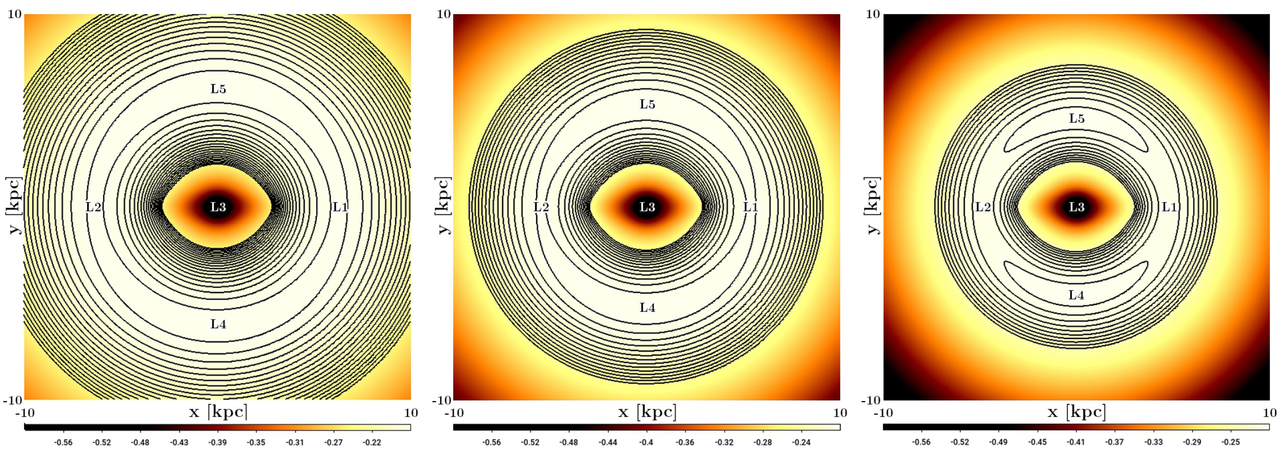
Fonte: o autor.

8.4 POTENCIAIS EFETIVOS

Análogo ao realizado na seção 7.2, na Figura 39 exibimos o Potencial Efetivo para os Modelos X, Y e Z; bem como seus Pontos de Lagrange $L1, L2, L3, L4$ e $L5$. Lembremos que o Potencial Efetivo é dado por $\Phi_{eff}(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}|\Omega \times \mathbf{x}|^2$ e os Pontos de Lagrange são cinco pontos onde $\bigtriangledown\Phi_{eff} = 0$.

Figura 39 – Contornos do Potencial Efetivo para os Modelos X, Y e Z e os pontos de Lagrange $L1, L2, L3, L4$ e $L5$.

(a) Modelo X (b) Modelo Y (c) Modelo Z



Fonte: o autor.

Na Figura 39 foram dispostos 20 contornos onde $-0.25 < E_J < -0.18$.

8.5 IMPLEMENTAÇÃO DO SURGIMENTO/CRESCIMENTO DA BARRA

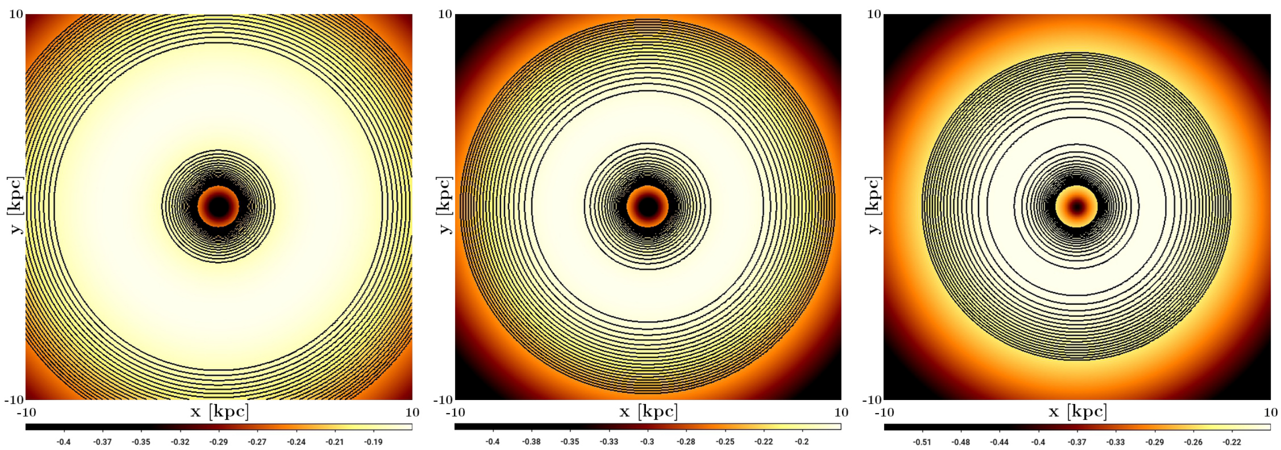
A formação de uma barra é um processo secular que pode ter diversas histórias. É consenso que nenhuma galáxia nasce barrada: a barra pode se formar, se alterar (aumentar, diminuir, rotacionar, ...) e se extinguir com o passar do tempo, em processos que dependem dos parâmetros das galáxias que as hospedam. Não são encontrados estudos do ponto de vista analítico em potenciais gravitacionais de barras que evoluem com o tempo. Alguns trabalhos recentes, como Manos e Machado (2014) e Machado e Manos (2016), para exemplificar, estudam barras dependentes do tempo, mas utilizam parâmetros específicos para determinados tempo de uma simulação N-corpos.

Sendo assim, nosso intuito é realizar um estudo onde o potencial gravitacional que representa a barra evolua com o tempo. A ideia é que nosso sistema inicie como uma galáxia sem barra e se torne representativo de uma galáxia barrada, onde a barra nasce e cresce com o tempo.

Vamos iniciar com potenciais totalmente axissimétricos, sem barra, para com o tempo transformar este potenciais em não axissimétricos, com barra. A Figura 40 exibe os potenciais iniciais para os Modelos X, Y e Z, que se tornarão os exibidos anteriormente na Figura 39.

Figura 40 – Contornos do Potencial Efetivo inicial sem barra para os Modelos X, Y e Z

(a) Início para o Modelo X (b) Início para o Modelo Y (c) Início para o Modelo Z



Fonte: o autor.

Na Figura 40 foram dispostos 20 contornos onde $-0.25 < E_J < -0.18$. Perceba a diferença entre o potencial inicial sem barra ilustrado na Figura 40 e o potencial final ilustrado na Figura 39.

Para realizar esta evolução no potencial da barra, optamos por implementar uma função linear, dependente do tempo, na massa da barra no potencial de Ferrers[1]. Neste processo, criamos dois casos específicos para cada modelo: a evolução se completa no tempo equivalente a 5 ou 10 rotações completas da barra. Utilizaremos os índices a e b para diferenciar um caso de evolução do outro nas notações já apresentadas para os Modelos X, Y e Z. Sendo assim, por exemplo, o Modelo Xa representa o Modelo X onde

[1] Isto foi feito no no arquivo `****.pav` do LP-VIcode.

a barra surge em sua completitude no tempo equivalente a 5 voltas de sua rotação; o Modelo Zb, por sua vez, representa o Modelo Z onda a barra surge em sua completitude no tempo equivalente a 10 voltas de sua rotação. Por sua vez, o tempo de evolução da barra para cada modelo obviamente depende da velocidade de rotação da barra Ω_b e do comprimento da barra. Estes tempos foram calculados para servirem como parâmetro da função de crescimento da barra e são exibidos na Tabela 5.

Tabela 5 – Tempo Aproximado para Evolução da Barra nos Modelos X, Y e Z.

Modelo	Tempo Aprox. ($Myear$)
Xa	614.35
Xb	1228.70
Ya	511.96
Yb	1023.92
Za	438.82
Zb	877.65

Fonte: o autor.

A Energia de Jacobi $E_J = \dfrac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + \Phi_{eff}(\mathbf{x})$ se conserva em um sistema de potencial em rotação representativo de uma barra fixa. Todavia, percebemos que essa energia não se conserva durante o período de evolução. Enquanto a massa da barra está crescendo linearmente, o valor E_J diminui aparentemente também linearmente, e volta a se conservar a partir do momento que a barra surge em sua completitude e o sistema passa a ser de barra fixa após a evolução.

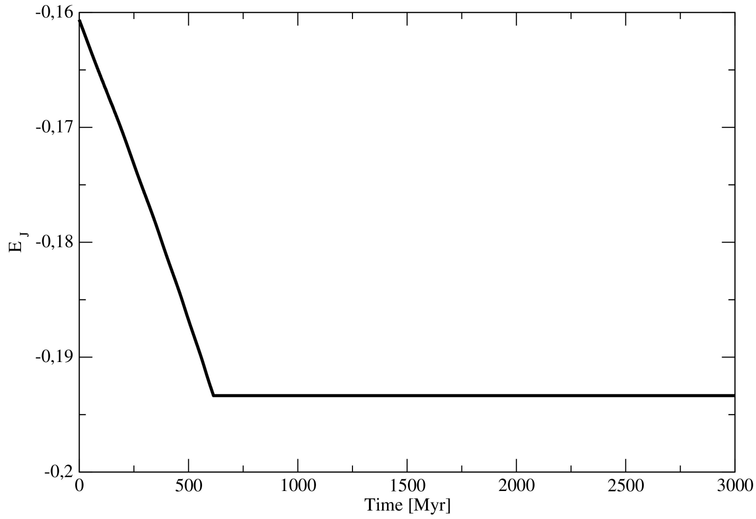
Para exemplificar o que foi afirmado no parágrafo anterior, vamos utilizar uma órbita aleatória, com movimento inicialmente circular, integrada no Modelo Xa. A integração começa sem a barra, a estrutura de barra começa a surgir e sua massa cresce linearmente até o tempo 614.35 $Myear$. Terminada essa evolução, o sistema se torna de barra fixa até o final da integração em 10 000 $Myear$. Veja na Figura 41 como se comporta E_J neste caso até 3 000 $Myear$:

A conservação de E_J, nas partes em que há conservação, neste capítulo é da ordem de 10^{-6}.

8.6 CONDIÇÕES INICIAIS

Barras galácticas se comportam como corpos rígidos, ou seja, Ω_b é sempre uma constante. Entretanto, discos galácticos não se comportam deste modo, sua velocidade angular Ω é uma função da coordenada radial. Assim, é natural imaginar que aparecerão ressonâncias entre os movimentos da barra e do disco. Um exemplo é a ressonância de corrotação, que ocorre onde $\Omega = \Omega_b$.

Figura 41 – Comportamento de E_J para uma órbita aleatória enquanto a barra surge no Modelo Xa.



Fonte: o autor.

Também haverão ressonâncias, quando a seguinte condição for satisfeita:

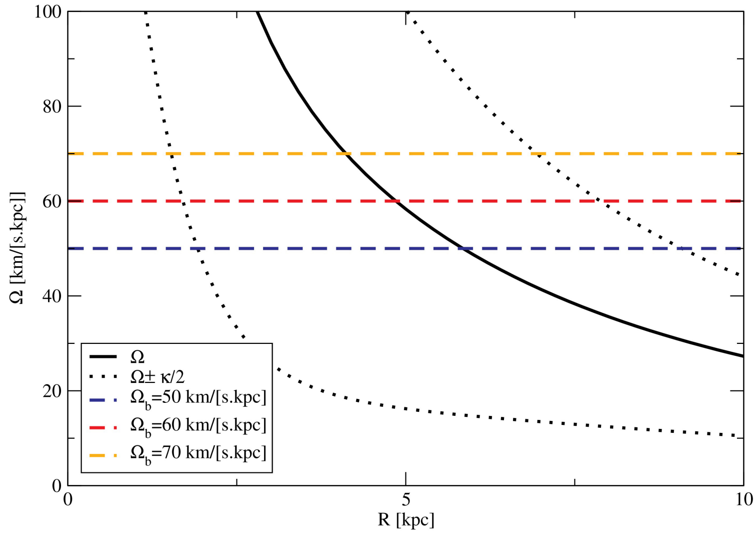
$$\Omega = \Omega_b \pm \frac{\kappa}{m} \tag{8.3}$$

onde m é um inteiro que está relacionado com a simetria da estrura de interesse (braços espirais, barras e etc...) e $\kappa^2 = \frac{d^2\Phi}{dR^2} + \frac{3}{R}\frac{d\Phi}{dR}$ é chamada de frequência epiciclica. Neste caso, haverão duas ressonâncias chamadas Ressonâncias de Lindblad. Na Equação 8.3, no caso do sinal negativo, tem-se a Ressonância Interna de Lindblad (ILR devido a *Inner Lindblad Resonance*); já no caso do sinal positivo tem-se a Ressonância Externa de Lindblad (OLR devido a *Outer Lindblad Resonance*). Para potenciais de barras galácticas utiliza-se $m = 2$, por serem estruturas bissimétricas (Moellenhoff; Matthias; Gerhard, 1995). A Figura 42, exibe as curvas Ω, $\Omega + \frac{1}{2}\kappa$ e $\Omega - \frac{1}{2}\kappa$ para os Modelos X, Y e Z.

Para este estudo, as órbitas terão velocidade inicial circular e estarão distribuídas aleatoriamente até a ressonância OLR de cada modelo, sendo distribuídas 10 mil órbitas progradas e 10 mil órbitas retrogradas para cada modelo, partindo das posições apresentadas na Figura 43.

Perceba que quanto maior a velocidade angular da barra Ω_b, menor é o raio da ressonância OLR. Conforme nosso critério para a escolha das condições iniciais, isto faz com que o Modelo X possua órbitas mais espalhadas que o Modelo Y e, por sua vez, o Modelo Y possua órbitas mais espalhadas que o Modelo Z. Este fenômeno é exibido claramente na Figura 43.

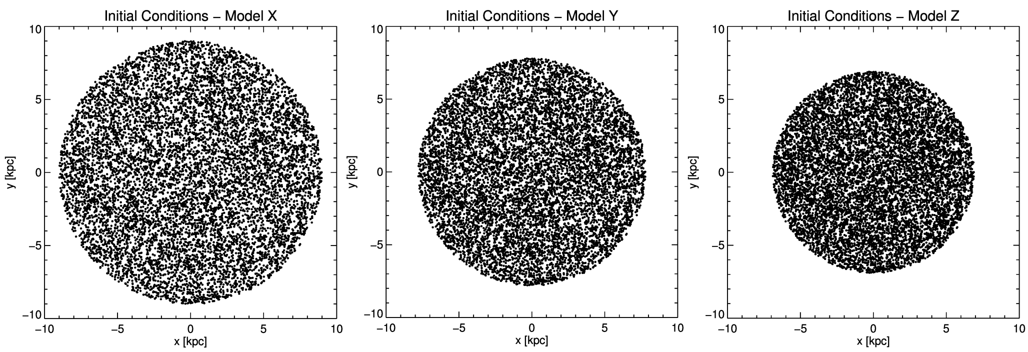
Figura 42 – ILR, OLR e gráficos de Ω, $\Omega + \frac{1}{2}\kappa$ e $\Omega - \frac{1}{2}\kappa$ para os Modelos X, Y e Z



Fonte: o autor.

Figura 43 – Posição das Condições Iniciais para os Modelos X, Y e Z

(a) Condições Iniciais - Modelo X (b) Condições Iniciais - Modelo Y (c) Condições Iniciais - Modelo Z



Fonte: o autor.

8.7 RESULTADOS E DISCUSSÕES

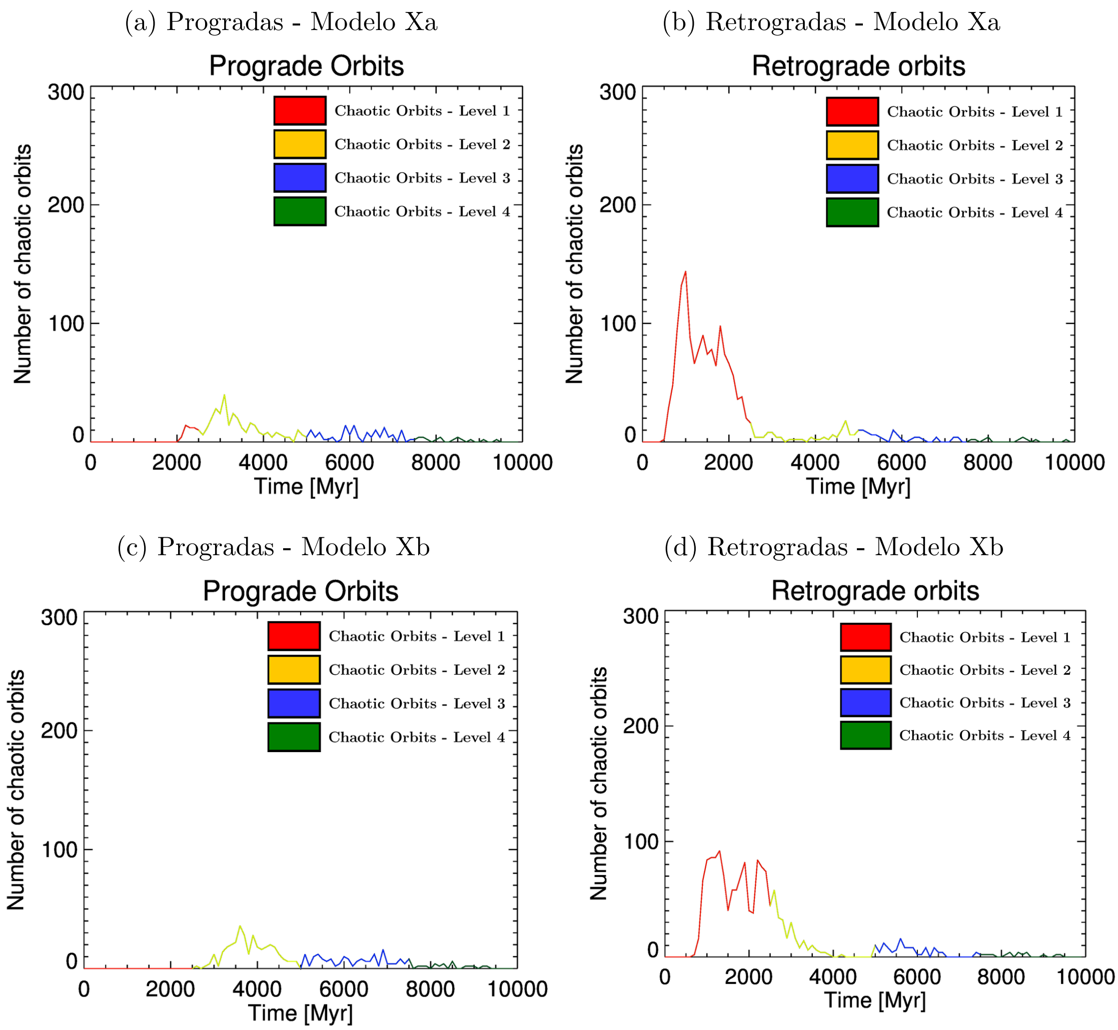
Com um procedimento análogo ao realizado no Capítulo 7, os níveis de caoticidade foram separados nas 4 categorias exibidas na Tabela 2. No entanto, desta vez, todas as órbitas foram integradas até 10 000 $Myear$, independentemente do aparecimento de caos antes deste período.

As Figuras 44 a 46 mostram a quantidade de caos que surgiu em cada tempo da integração para cada modelo, tanto para órbitas progradas quanto para retrogradas. Os níveis de caoticidade estão representados por cores distintas. Observa-se claramente que as órbitas retrogradas possuem mais tendência ao caos, assim como observado nos modelos do Capítulo 7. Todos os modelos estudados apresentaram um caos forte, dominante no

Nível 1, para as órbitas retrógradas e um aparente domínio de caos Nível 2 para as órbitas progradas. Nota-se que pouco caos Nível 1 é gerado nas órbitas progradas, especificamente nos Modelos Xb e Za este tipo de caos é nulo ou praticamente desprezível.

Por sua vez, temos na Figura 47 a quantidade de órbitas caóticas acumuladas para órbitas progradas, retrogradas e para a quantidade total de órbitas dos dois tipos em todos os modelos. As distribuições entre ordem e caos, levando em conta as posições iniciais, para cada modelo, estão disponibilizadas nas Figuras 48 a 50.

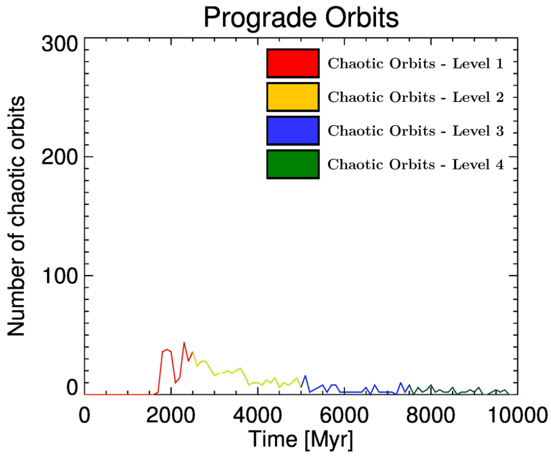
Figura 44 – Tempo × Número de Órbitas Caóticas - Modelo Xa e Xb



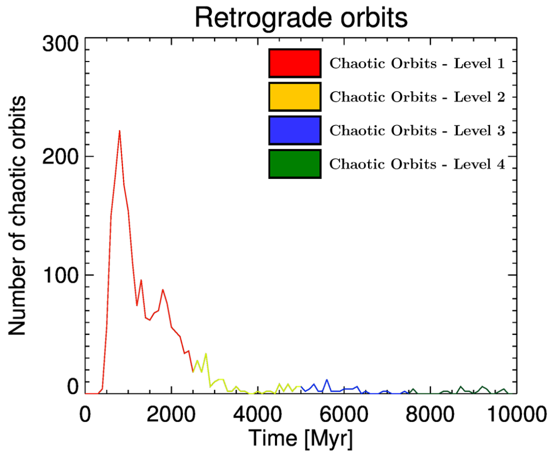
Fonte: o autor.

Figura 45 – Tempo × Número de Órbitas Caóticas - Modelo Ya

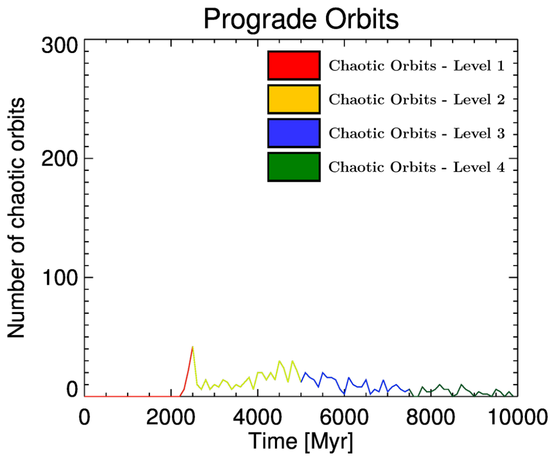
(a) Progradas - Modelo Ya



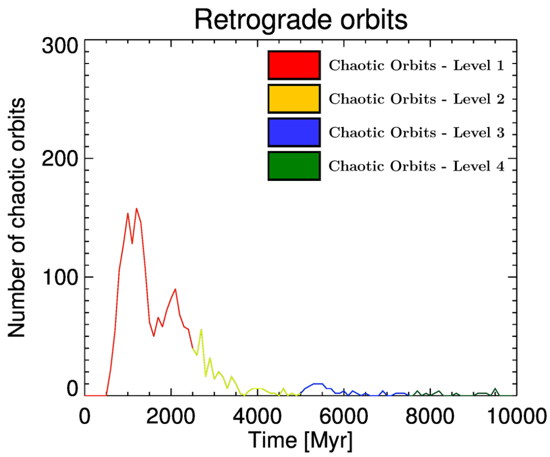
(b) Retrogradas - Modelo Ya



(c) Progradas - Modelo Yb

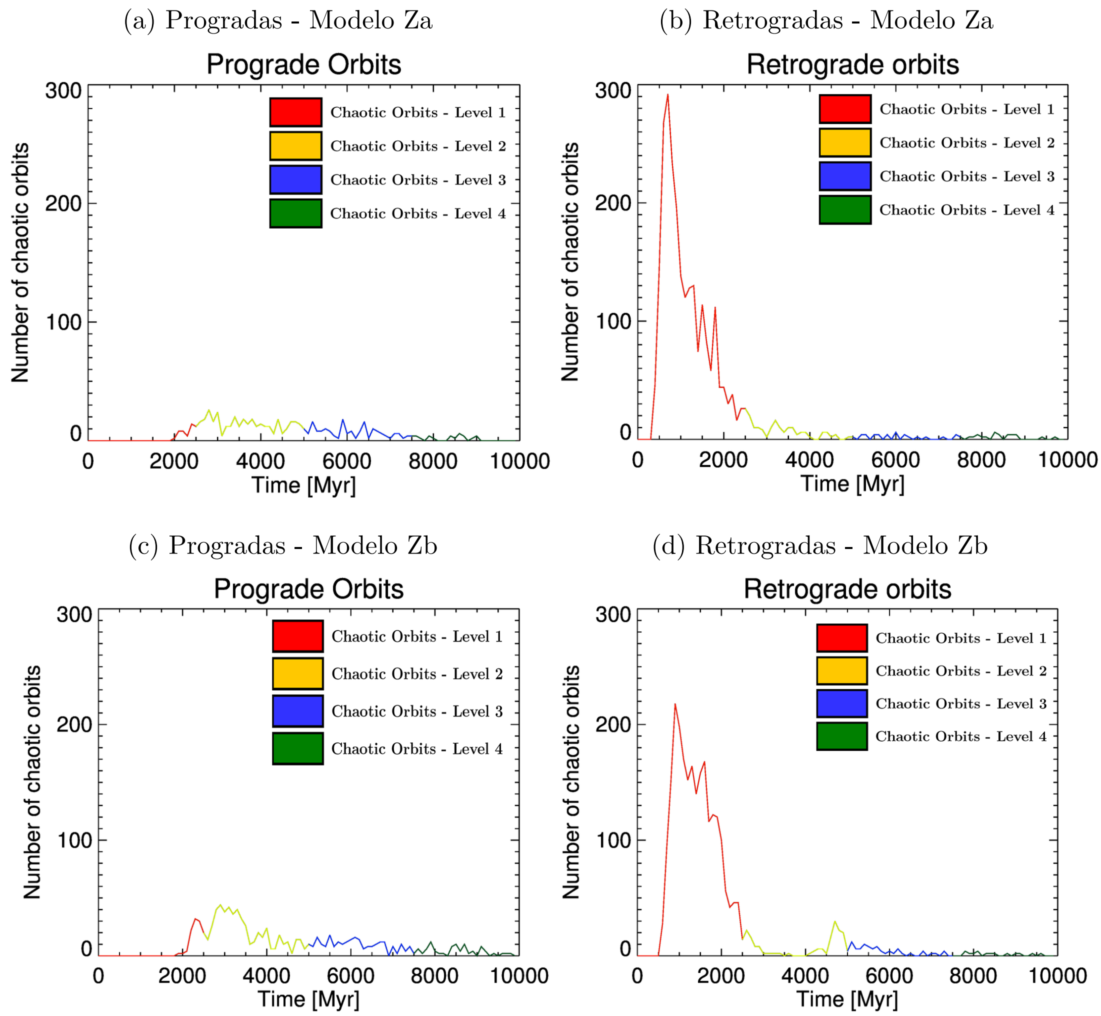


(d) Retrogradas - Modelo Yb



Fonte: o autor.

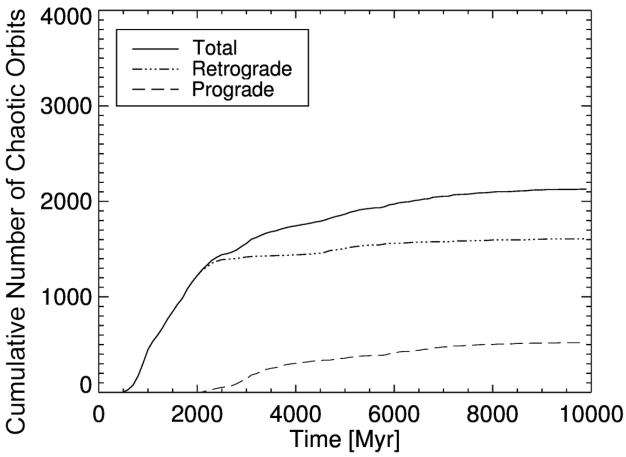
Figura 46 – Tempo × Número de Órbitas Caóticas - Modelo Za



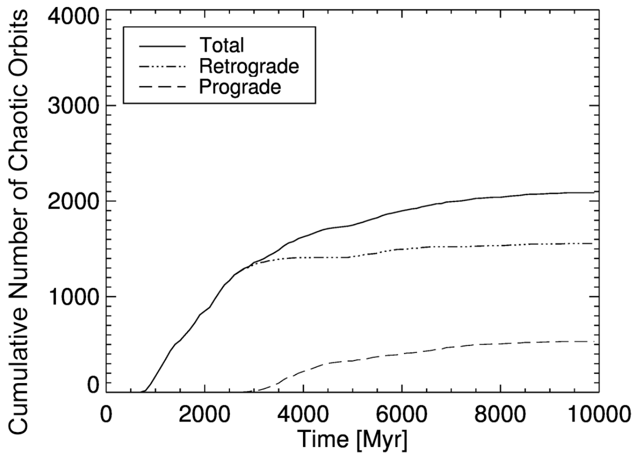
Fonte: o autor.

Figura 47 – Tempo × Número Acumulado de Órbitas Caóticas - Modelos Xa, Xb, Ya, Yb, Za e Zb

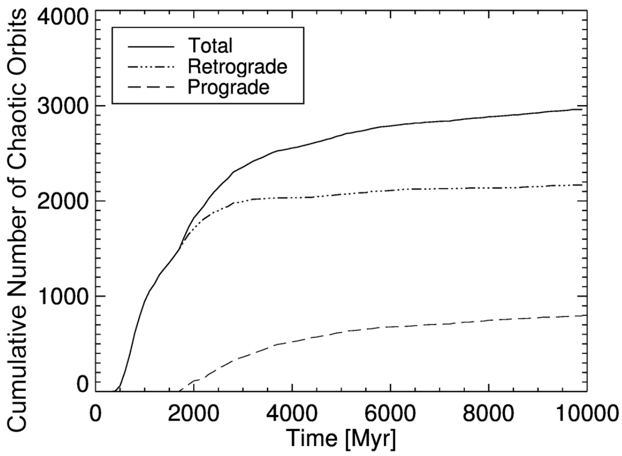
(a) Modelo Xa



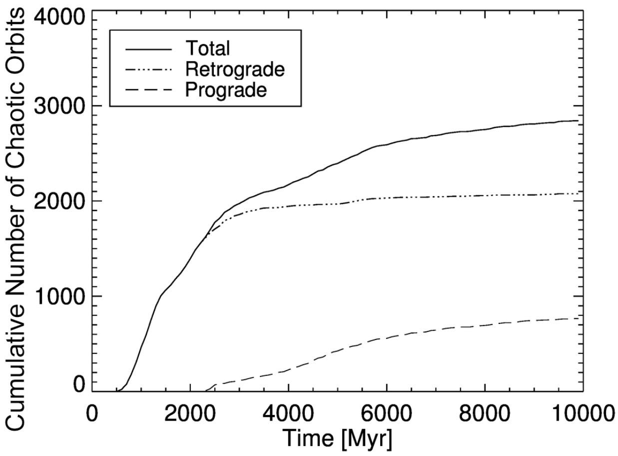
(b) Modelo Xb



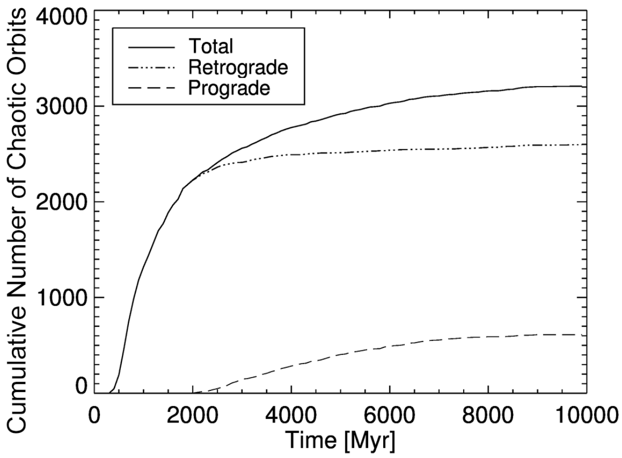
(c) Modelo Ya



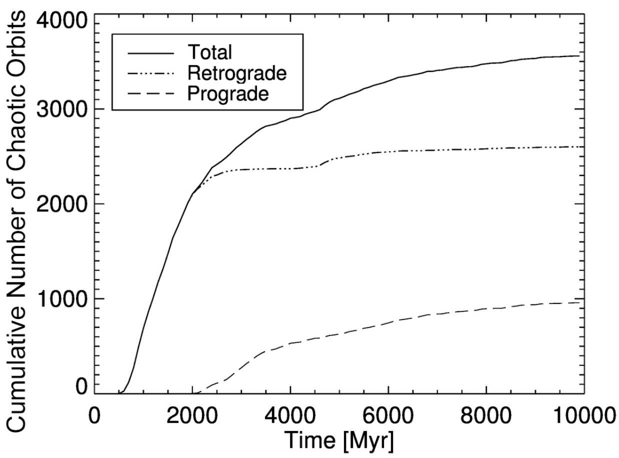
(d) Modelo Yb



(e) Modelo Za



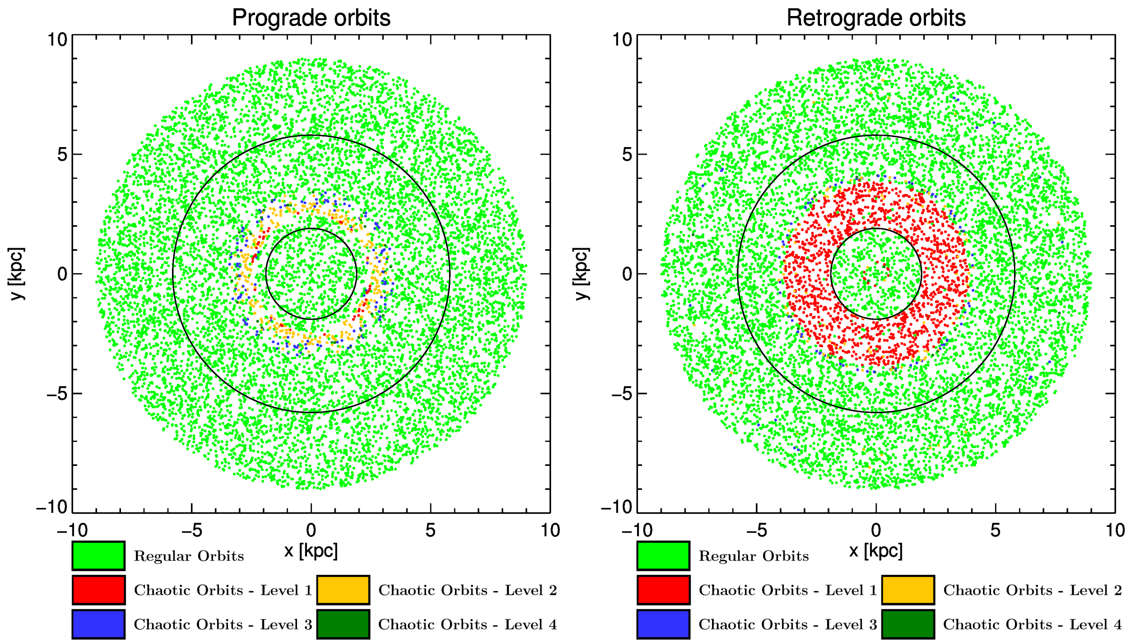
(f) Modelo Zb



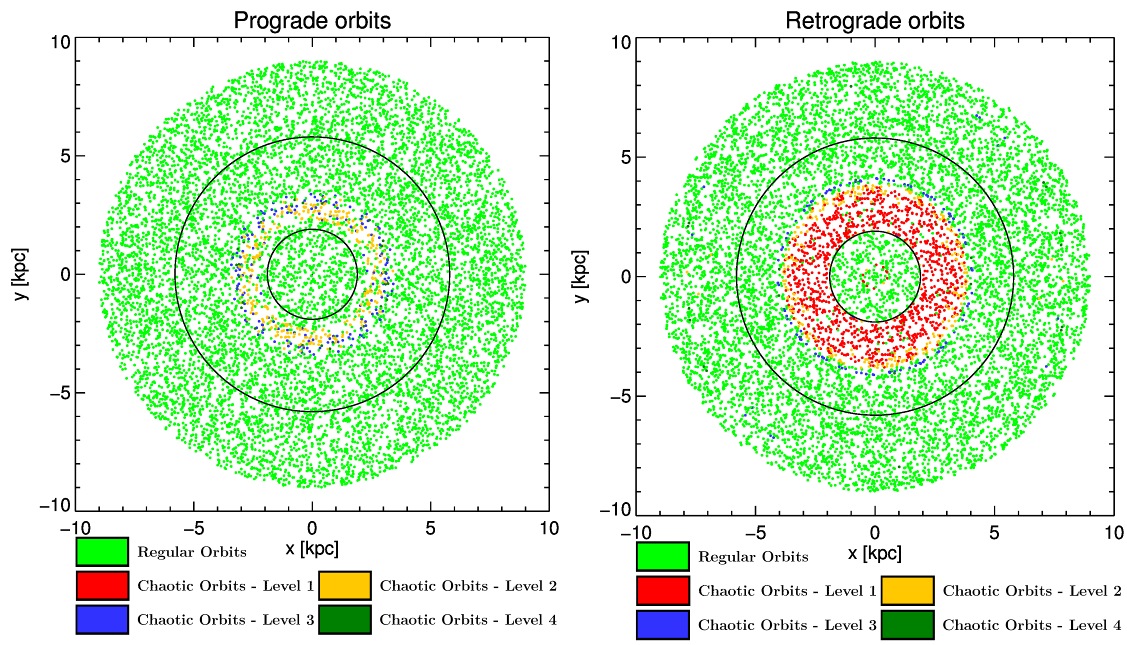
Fonte: o autor.

Figura 48 – Ressonâncias ILR e CR com a Distribuição de Órbitas Regulares e Caóticas - Modelo X

(a) Modelo Xa



(b) Modelo Xb

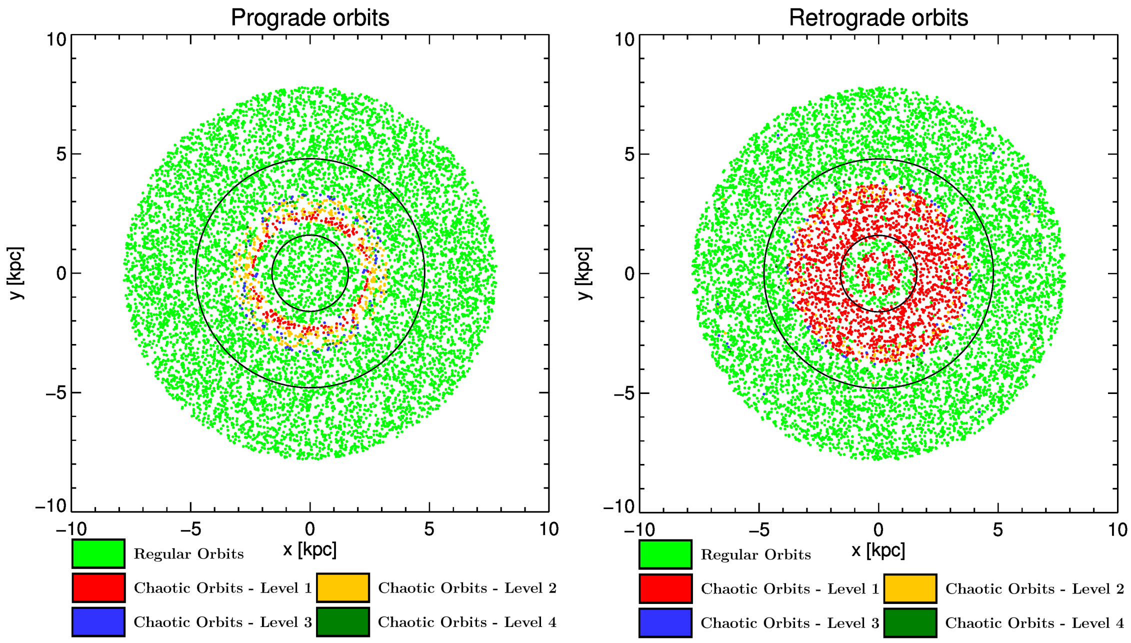


Fonte: o autor.

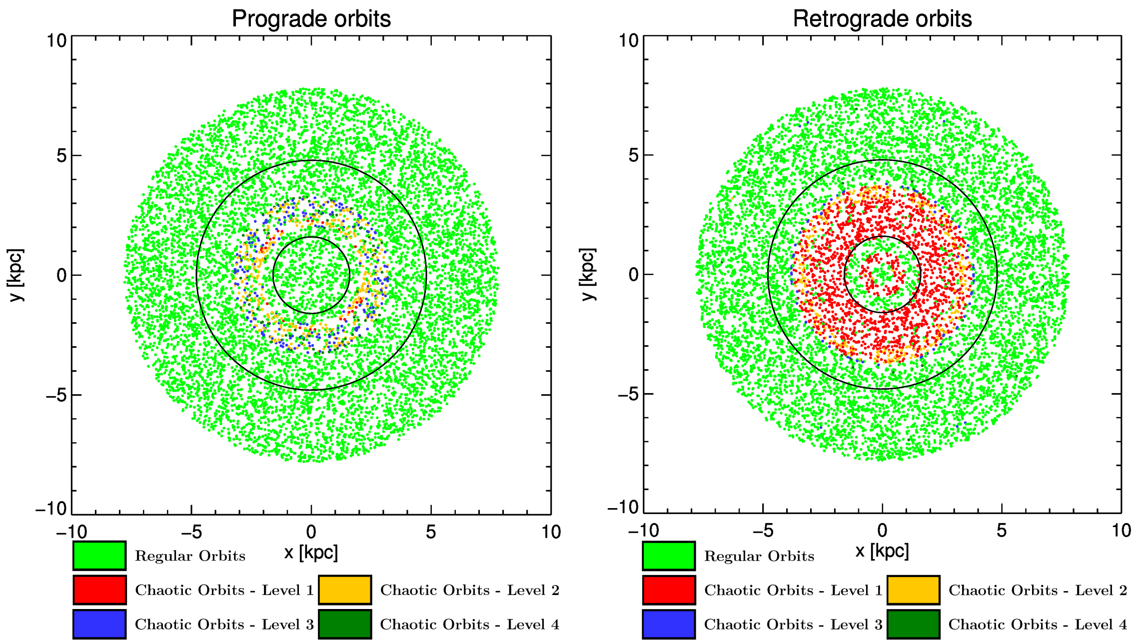
De modo geral, para as órbitas progradas, que giram no mesmo sentido da barra galáctica, o número de caos gerado foi bastante baixo, variando entre 5% e 10% do número total de órbitas progradas lançadas dependendo do modelo analisado. Já para as órbitas retrogradas, este percentual aumenta consideravelmente e encontra-se entre 15% e 25% do número total de órbitas retrogradas lançadas dependendo do modelo. Em números totais,

Figura 49 – Ressonâncias ILR e CR com a Distribuição de Órbitas Regulares e Caóticas - Modelo Y

(a) Modelo Ya



(b) Modelo Yb



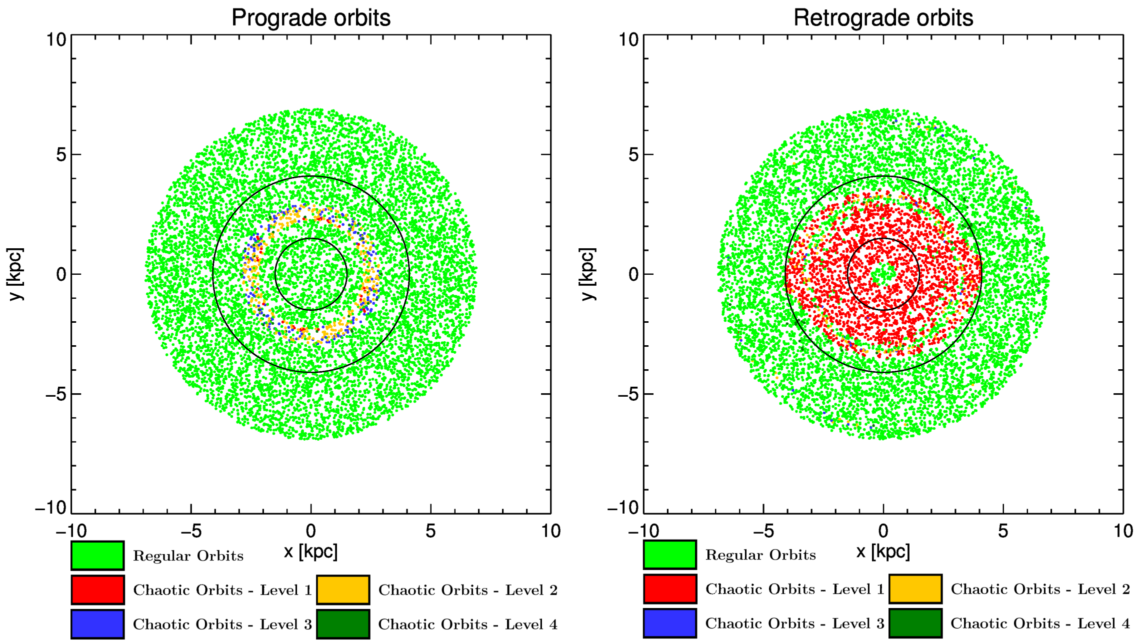
Fonte: o autor.

considerando as órbitas progradas e retrogradas, observamos sempre entre 10% e 18% o percentual de caos nas órbitas integradas dependendo do modelo analisado.

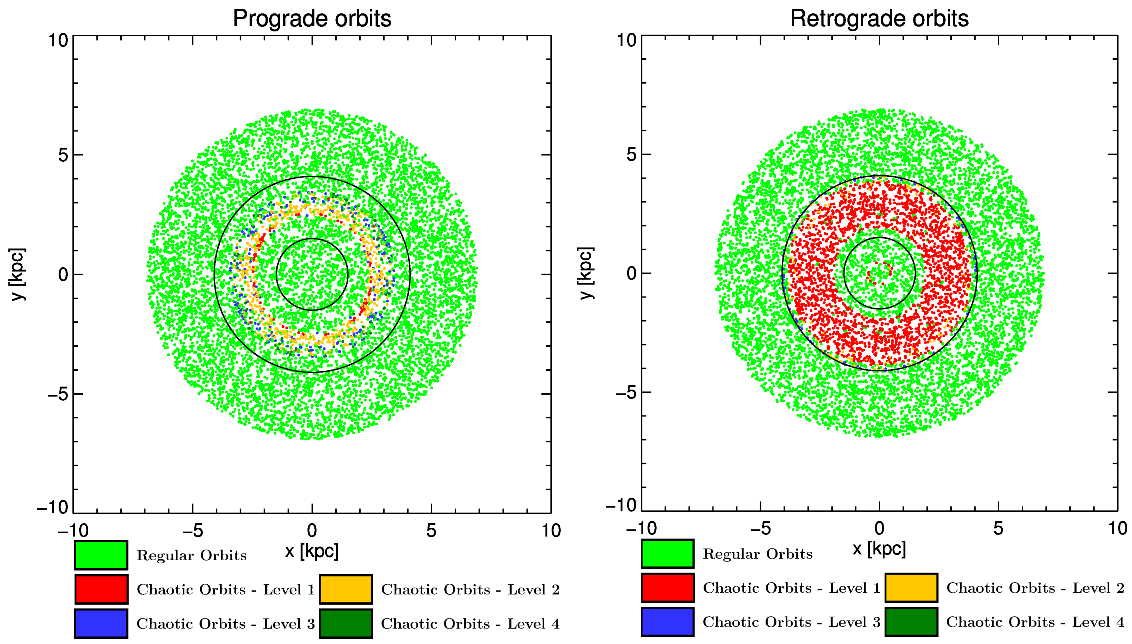
Para comparar a diferença entre a velocidade de surgimento/crescimento da barra, a Figura 47 não oferece diferenças consideráveis. Todavia, atentando aos gráficos das

Figura 50 – Ressonâncias ILR e CR com a Distribuição de Órbitas Regulares e Caóticas - Modelo Z

(a) Modelo Za



(b) Modelo Zb



Fonte: o autor.

Figuras 44 a 46 pode-se notar dessemelhanças. Os modelos onde a barra cresce com 5 voltas (índices a) parecem propiciar levemente mais caos que os modelos onde a barra cresce em 10 voltas (índices b). Isto é uma indicação que um surgimento abrupto da barra causa maior perturbação no sistema.

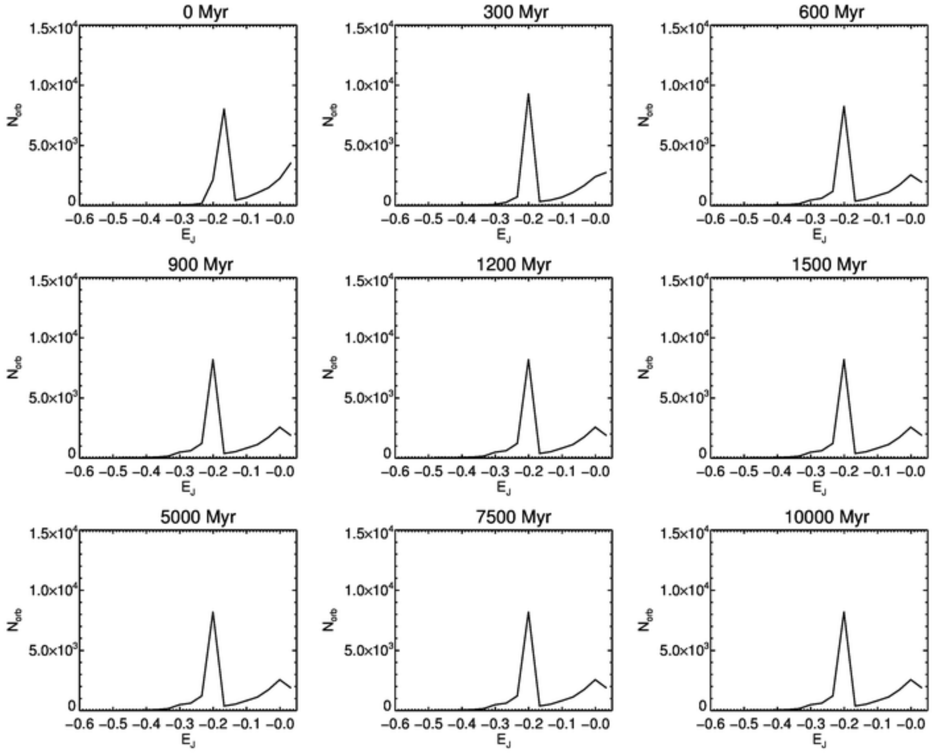
Algumas estruturas podem ser observadas nas Figuras 48 a 50: aparentemente, com o modo que utilizamos para escolher as condições iniciais, são formadas regiões de caos muito bem definidas pelas condições iniciais, as quais se assemelham com anéis. Poucas órbitas apresentam caos com condições iniciais fora dessas regiões. Nas órbitas progradas, estes anéis de caos se apresentam de forma única para cada modelo. Nas órbitas retrogradas, temos dois anéis de caos, predominantemente a estrutura se apresenta como um grande e espesso anel externo, cercando um sutil anel interno, com uma única exceção para o Modelo Za. A ressonância CR é um limitador para esses anéis de caos, neste contexto, interessantemente, os anéis mais proeminentes estão confinados entre as ressonâncias ILR e CR, com uma única exceção para o Modelo Za. Nestas imagens também se torna clara a diferença na quantidade de caos para órbitas progradas e retrogradas.

Quanto maior a velocidade angular da barra Ω_b, menor é o raio da ressonância OLR. Neste contexto, também é observado, a partir das Figuras 44 a 50, que quanto maior Ω_b, as órbitas que sofrem maiores influências da barra galáctica (dentro do raio da ressonância OLR), possuem maior inclinação a desenvolverem trajetórias caóticas. De fato, as Figuras 44 à 46 deixam nítido que a principal diferença, neste quesito, está especialmente nas órbitas retrogradas no caos Nível 1. Isto indica que a velocidade angular da barra também influencia na sensibilidade do sistema ao surgimento da barra, uma vez que as órbitas com caos Nível 1, apresentaram caos em um tempo próximo ao de surgimento/crescimento da barra galáctica. Para as órbitas progradas, nenhuma diferença considerável é exibida neste ponto.

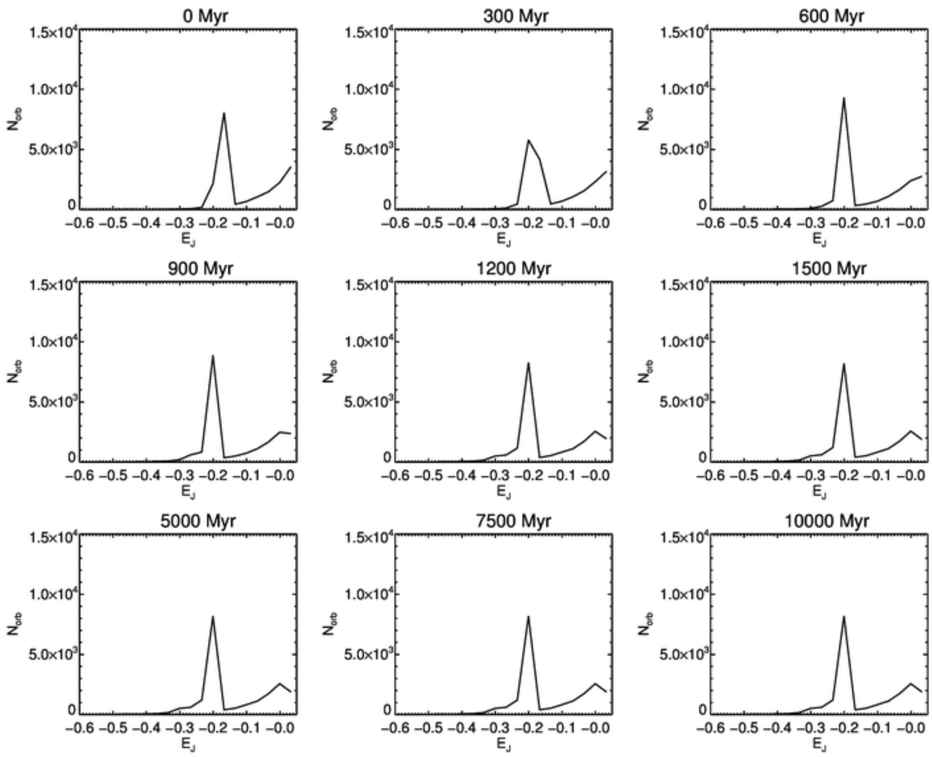
Conforme esperado E_J não se conserva durante o período de evolução da barra galáctica. Conforme já mencionado, enquanto a massa da barra está crescendo linearmente, o valor E_J diminui aparentemente também linearmente, e volta a se conservar a partir do momento que a barra surge em sua completitude e o sistema passa a ser de barra fixa após a evolução. Para visualizar este fenômeno, nas Figuras 51 a 53 estão dispostas a quantidade de órbitas por E_J para determinados tempos durante e após o surgimento/crescimento da barra para cada modelo. Nestas imagens podemos observar movimentação nos valores E_J até os tempos estabelecidos na Tabela 5, após este período observa-se a conservação.

Figura 51 – E_J $\times$ Quantidade de Órbitas - Modelo Xa e Xb

(a) Modelo Xa



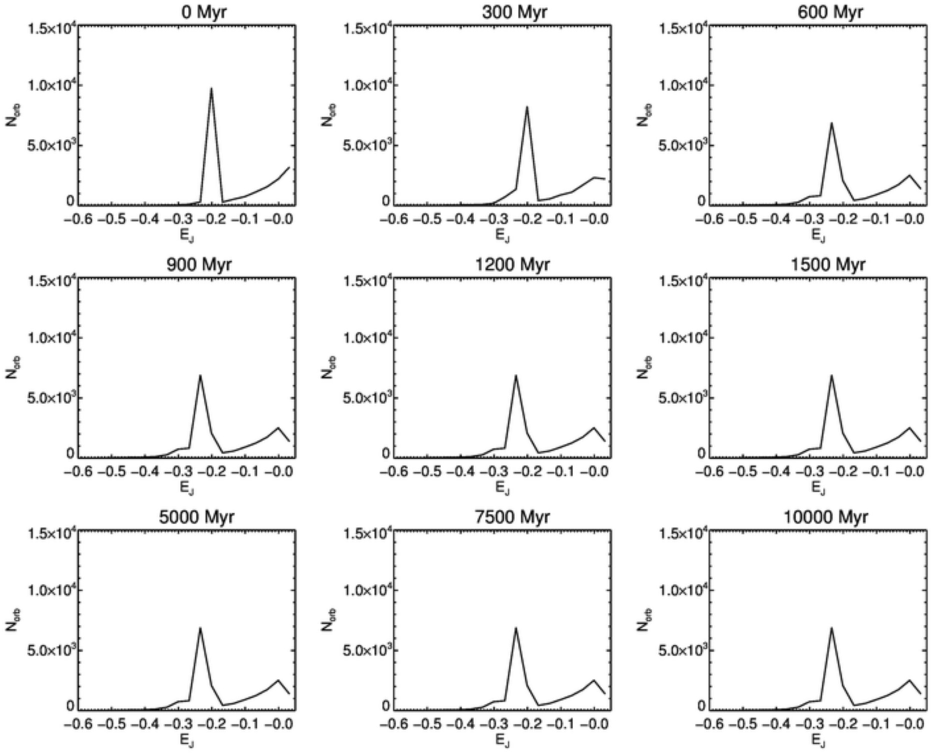
(b) Modelo Xb



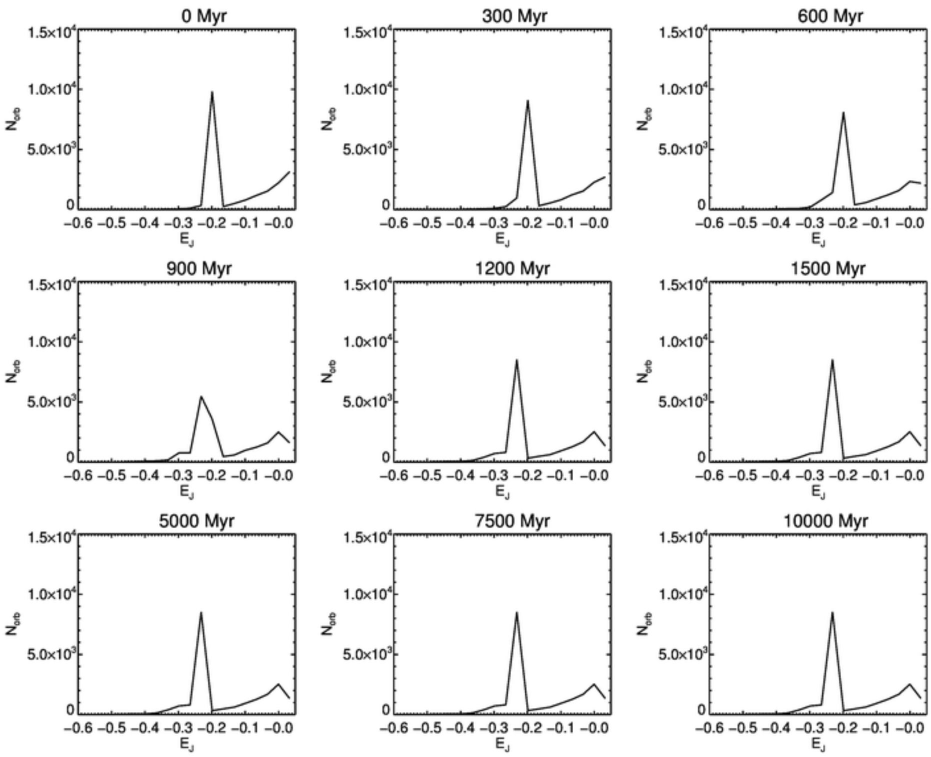
Fonte: o autor.

Figura 52 – E_J × Quantidade de Órbitas - Modelo Ya e Yb

(a) Modelo Ya



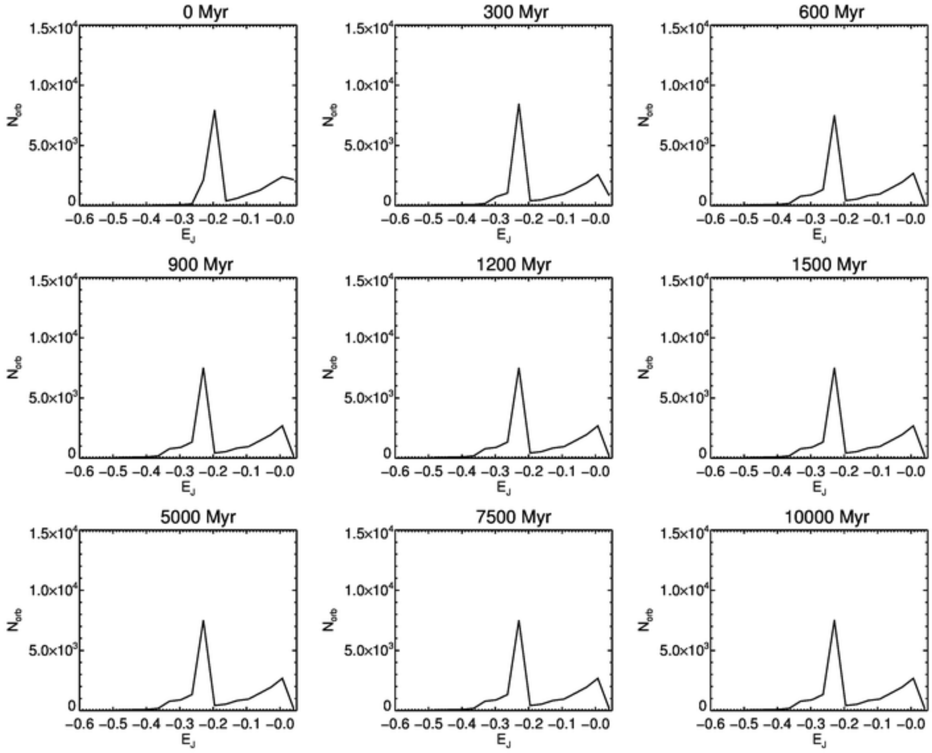
(b) Modelo Yb



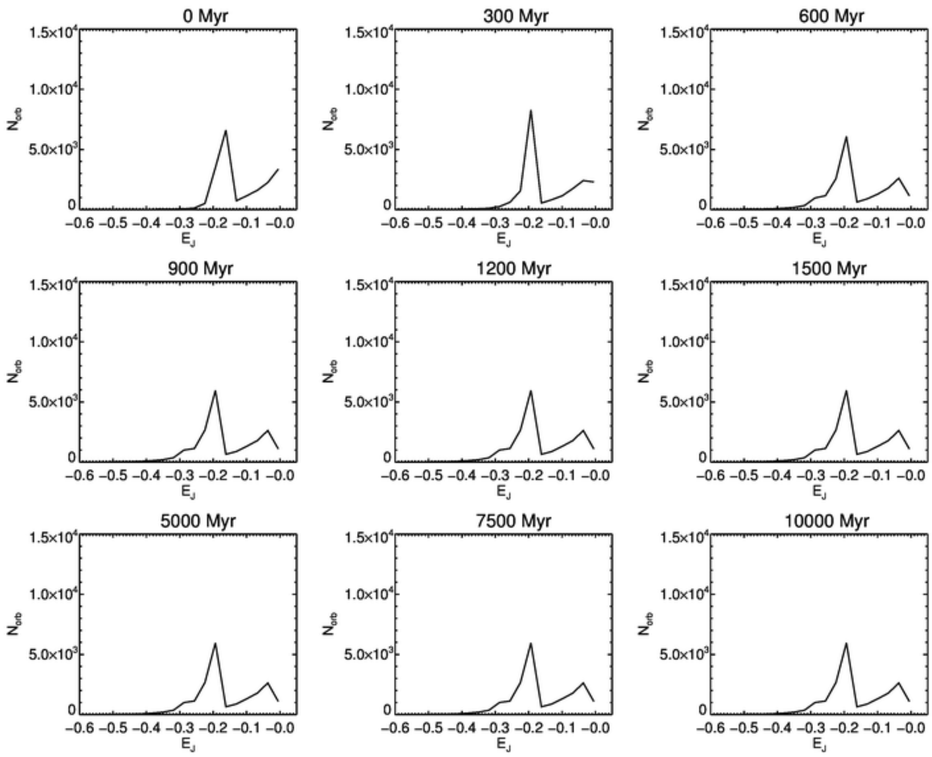
Fonte: o autor.

Figura 53 – E_J × Quantidade de Órbitas - Modelo Za e Zb

(a) Modelo Za



(b) Modelo Zb



Fonte: o autor.

8.8 CONCLUSÕES

O objetivo principal deste capítulo foi verificar a influência da barra na estabilidade de órbitas imersas em potenciais gravitacionais analíticos representativos de barras que surgem/crescem com o tempo em um processo evolutivo. Foram comparados seis modelos com parâmetros inspirados na galáxia NGC 936 e suas influências na estabilidade das órbitas. As dimensões da barra foram mantidas em todos os seis modelos e os parâmetros variados foram a velocidade angular da barra e o tempo de surgimento/crescimento.

Encontramos evidências de que quando a barra surge mais rapidamente, mais caos é gerado. Além disso, para as órbitas progradas, o número de caos gerado variou entre 5% e 10% do número total de órbitas progradas lançadas dependendo do modelo analisado. Para as órbitas retrogradas, este percentual variou entre 15% e 25% do número total de órbitas retrogradas lançadas dependendo do modelo. Observou-se que as órbitas retrógradas são mais propícias ao caos. Percebemos, conforme esperado, que a Energia de Jacobi não se conserva enquanto a barra esta em processo de evolução. Também notamos que quanto maior a velocidade angular da barra, maior é sua influência na dinâmica do sistema.

Regiões de caos bem definidas semelhantes a anéis foram observadas levando em consideração as condições iniciais, poucas órbitas apresentam caos fora dessas regiões. Nas órbitas progradas, estes anéis de caos se apresentam de forma única para cada modelo. Nas órbitas retrogradas, temos dois anéis de caos, quase sempre um grande e espesso anel externo, cercando um sutil anel interno. A ressonância CR é um limitador para esses anéis de caos e os anéis mais proeminentes estão predominantemente confinados entre as ressonâncias ILR e CR.

Assim como no estudo com barras fixas, realizando as integrações com uma pequena adaptação do LP-VIcode, analisamos modelos consistentes para sistemas em rotação que modelam galáxias barradas e estudamos a estabilidade das órbitas através do Método SALI. O programa LP-VIcode atendeu a todas as nossas necessidades e apenas ajustes pequenos foram necessários.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente tese de doutorado apresentou um estudo da dinâmica de órbitas estelares imersas em potenciais gravitacionais analíticos que modelam galáxias barradas. Foi utilizado o Método SALI como ferramenta matemática para distinguir movimentos regulares e caóticos nas integrações das órbitas. O principal objetivo deste trabalho foi analisar a influência da barra na dinâmica galáctica. Para isso, diversos cenários de barras galácticas foram estudados: desde barras fixas em rotação até barras dependentes do tempo, em processo de evolução.

Consideramos que as principais contribuições deste trabalho foram:

- A exibição dos cálculos das derivadas do potencial de Ferrers de forma analítica;
- A confirmação da possibilidade de se trabalhar com referenciais em rotação no LP-VIcode através de algumas adaptações;
- O oferecimento de um ponto de vista adicional para o trabalho publicado por Manos e Athanassoula (2011);
- O estudo de dois cenários extremos para barras galácticas: barras muito massivas e barras "mais axissimétricas";
- O estudo de cenários de evolução de barras galácticas de modo analítico, em situações onde um sistema inicia totalmente axissimétrico e há um surgimento/crescimento da barra ao longo do tempo;
- A separação dos estudos em órbitas progradas e retrogradas e a comparação entre eles.

Naturalmente, ainda há muito o que se pesquisar no contexto dessa tese. Em trabalhos futuros, o doutorando e seu orientador pretendem analisar outros cenários de evolução, estudar a variação de outros parâmetros, estudar famílias de órbitas, entre tantas outras possibilidades que esta pesquisa gerou. Apesar de o programa LP-VIcode ter se mostrado eficiente, também existe a pretenção de futuramente escrevermos um código próprio para a integração das órbitas e o cálculo de SALI, com o intuito de melhorar o tempo computacional e a conservação de E_J.

REFERÊNCIAS

Almeida Júnior, A. K. *Introdução à Dinâmica de Rotação Clássica*. 2011. Citado na página 65.

American Association for the Advancement of Science. *Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set a Tornado in Texas?* 1972. Disponível em: <http://eaps4.mit.edu/research/Lorenz/Butterfly_1972.pdf>. Acesso em: 05 de outubro de 2017. Citado na página 36.

Athanassoula, E. et al. Orbits as building blocks of a barred galaxy model. *Astronomy and Astrophysics*, v. 127, p. 349–360, nov. 1983. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 101.

Avila-Reese, V.; Firmani, C. The dark and stellar mass assembly of galaxies. In: *Revista Mexicana de Astronomia y Astrofisica Conference Series*. [S.l.: s.n.], 2011. (Revista Mexicana de Astronomia y Astrofisica, vol. 27, v. 40), p. 27–35. Citado na página 25.

Bassalo, J. M. F.; Cattani, M. S. D. *Cálculo Exterior*. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. Citado na página 45.

Benettin, G.; Galgani, L.; Giorgilli, A. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems; a method for computing all of them. *Meccanica*, v. 15, p. 9–30, 1980. Citado na página 156.

Binney, J.; Tremaine, S. *Galactic Dynamics*. 2. ed. NJ USA: Princeton University Press, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 66 e 84.

Bountis, T.; Manos, T.; Antonopoulos, C. Complex statistics in Hamiltonian barred galaxy models. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, v. 113, p. 63–80, maio 2012. Citado na página 26.

Caritá, L. A. et al. The Smaller Alignment Index (SALI) applied in a study of stellar orbits in barred galaxies potential models using the LP-VIcode. *New Astronomy*, v. 60, p. 48–60, 2017. Citado na página 81.

Carpintero, D. D.; Maffione, N.; Darriba, L. *La Plata Variational Indicators code: a program to compute a suite of variational chaos indicators (User's Guide for Version 102[Kaos])*. [S.l.], 2013. Citado na página 78.

Carpintero, D. D.; Maffione, N.; Darriba, L. LP-VIcode: A program to compute a suite of variational chaos indicators. *Astronomy and Computing*, v. 5, p. 19–27, jul. 2014. Citado na página 77.

Combes, F. et al. Box and peanut shapes generated by stellar bars. *Astronomy and Astrophysics*, v. 233, p. 82–95, jul. 1990. Citado na página 26.

Devaney, R. L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. 1. ed. [S.l.]: Addison-Wesley, 1989. Citado na página 31.

D'Onghia, E.; Vogelsberger, M.; Hernquist, L. Self-perpetuating Spiral Arms in Disk Galaxies. *Astronomical Society of the Pacifc Conference Series*, v. 766, p. 34, mar. 2013. Citado na página 25.

Eskridge, P. B. et al. The Frequency of Barred Spiral Galaxies in the Near-Infrared. *The Astronomical Journal*, v. 119, p. 536–544, fev. 2000. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 55.

European Southern Observatory (ESO) website. *European Southern Observatory (ESO) website*. 2017. Disponível em: <https://www.eso.org/public/usa/>. Acesso em: 11 de outubro de 2017. Citado na página 105.

Ferrers, N. M. On the potential of ellipsoids, ellipsoidal shells, elliptic laminae and elliptic rings, of variables densities. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, v. 14, p. 1–22, 1877. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 62.

Ganesan, K.; Lakshmanan, M. Dynamics of atomic hydrogen in a generalized van der waals potential. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 42, p. 3940–3947, Oct 1990. Citado na página 151.

Goldstein, H.; Poole, C.; Safko, J. *Classical Mechanics*. 3. ed. New York: Pearson Education, 2002. Citado na página 136.

Herschel, W. Catalogue of Double Stars. By William Herschel, Esq. F. R. S. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series I*, v. 75, p. 40–126, 1785. Citado na página 105.

Herschel, W. On the Construction of the Heavens. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series I*, v. 75, p. 213–266, 1785. Citado na página 105.

Hubble, E. P. Extragalactic nebulae. *Astrophysical Journal*, v. 64, dez. 1926. Citado na página 54.

Hubble website. *Hubble website*. 2017. Disponível em: <http://hubblesite.org/>. Acesso em: 05 de outubro de 2017. Citado 5 vezes nas páginas 54, 55, 56, 57 e 58.

Kaufmann, D. E.; Patsis, P. A. Propeller Orbits in Barred Galaxy Models. *The Astrophysical Journal*, v. 624, p. 693–700, maio 2005. Citado na página 26.

Kent, S. M.; Glaudell, G. The bar in NGC 936. *Astronomical Journal*, v. 98, p. 1588–1597, nov. 1989. Citado 4 vezes nas páginas 16, 106, 107 e 108.

King, I. The structure of star clusters. I. an empirical density law. *Astronomical Journal*, v. 67, p. 471, out. 1962. Citado na página 106.

Lemos, N. A. *Mecânica Analítica*. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 136 e 137.

Lima, E. L. *Espaços Métricos*. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. Citado na página 32.

Lorenz, E. N. Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of Atmospheric Sciences*, v. 20, p. 130–148, mar. 1963. Citado na página 34.

Machado, R. E. G.; Manos, T. Chaotic motion and the evolution of morphological components in a time-dependent model of a barred galaxy within a dark matter halo. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 458, p. 3578–3591, jun. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 111.

Manos, A. *A Study of Hamiltonian Dynamics with Applications to Models of Barred Galaxies*. Tese (Doutorado) — PhD in Mathematics, 2008. Citado na página 71.

Manos, T.; Athanassoula, E. Regular and chaotic orbits in barred galaxies - I. Applying the SALI/GALI method to explore their distribution in several models. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 415, p. 629–642, jul. 2011. Citado 12 vezes nas páginas 17, 26, 27, 62, 81, 84, 89, 100, 101, 102, 103 e 127.

Manos, T.; Machado, R. E. G. Chaos and dynamical trends in barred galaxies: bridging the gap between N-body simulations and time-dependent analytical models. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 438, p. 2201–2217, mar. 2014. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 111.

Marinacci, F.; Pakmor, R.; Springel, V. The formation of disc galaxies in high-resolution moving-mesh cosmological simulations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 437, p. 1750–1775, jan. 2014. Citado na página 25.

Massago, S. *Matriz Hessiana e Aplicações*. 2010. Manuscrito. Disponível em: <https://www.dm.ufscar.br/profs/sadao/student.php?lang=pt>. Acesso em: 05 de outubro de 2017. Citado na página 41.

Merrifield, M. R.; Kuijken, K. The pattern speed of the bar in NGC 936. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 274, p. 933–938, jun. 1995. Citado 2 vezes nas páginas 106 e 108.

Miyamoto, M.; Nagai, R. Three-dimensional models for the distribution of mass in galaxies. *Astronomical Society of Japan*, v. 27, p. 533–543, 1975. Citado na página 62.

Moellenhoff, C.; Matthias, M.; Gerhard, O. E. The central bar in M94. *Astronomy and Astrophysics*, v. 301, p. 359, set. 1995. Citado 2 vezes nas páginas 73 e 113.

Oliveira Filho, K. S.; Saraiva, M. F. O. *Astronomia e Astrofísica*. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013. Citado na página 54.

Olle, M.; Pfenniger, D. Vertical orbital structure around the Lagrangian points in barred galaxies. Link with the secular evolution of galaxies. *Astronomy and Astrophysics*, v. 334, p. 829–839, jun. 1998. Citado na página 26.

Oseledec, V. I. A multiplicative ergotic theorem. ljapunov characteristic numbers dor dynamical systems. *Trans. Mosc. Math. Soc.*, v. 19, p. 197–231, 1968. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 156.

Patsis, P. A. Orbital Morphology of 3D Bars. In: Athanassoula, E.; Bosma, A.; Mujica, R. (Ed.). *Disks of Galaxies: Kinematics, Dynamics and Peturbations*. [S.l.: s.n.], 2002. (Astronomical Society of the Pacific Conference Series, v. 275), p. 161–168. Citado na página 62.

Patsis, P. A.; Skokos, H.; Athanassoula, E. Orbital dynamics of three-dimensional bars - III. Boxy/peanut edge-on profiles. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 337, p. 578–596, dez. 2002. Citado na página 26.

Patsis, P. A.; Skokos, H.; Athanassoula, E. Orbital dynamics of three-dimensional bars - IV. Boxy isophotes in face-on views. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 342, p. 69–78, jun. 2003. Citado na página 26.

Pfenniger, D. The 3D dynamics of barred galaxies. *Astronomy and Astrophysics*, v. 134, p. 373–386, maio 1984. Citado 5 vezes nas páginas 26, 63, 64, 70 e 79.

Plummer, H. C. On the problem of distribution in globular star clusters. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 71, p. 460–470, mar. 1911. Citado na página 62.

Sheth, K. et al. Barred Galaxies at z > 0.7: NICMOS Hubble Deep Field-North Observations. *The Astrophysical Journal*, v. 592, p. L13–L16, jul. 2003. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 55.

Skokos, H. Alignment indices: a new, simple method for determining the ordered or chaotic nature of orbits. *Journal of Physics: Mathematical and General*, v. 34, p. 10029—-10043, 2001. Citado 4 vezes nas páginas 26, 43, 44 e 147.

Skokos, H. *The Smaller (SALI) and Generalized (GALI) Alignment Index Methods of Chaos Detection: Methods of Chaos Detection: Theory and Applications*. 2010. Disponível em: <http://math_research.uct.ac.za/~hskokos/Talks/2010_Namur_SALI_GALI.pdf>. Acesso em: 15 de outubro de 2017. Citado na página 153.

Skokos, H. The Lyapunov Characteristic Exponents and Their Computation. In: Souchay, J.; Dvorak, R. (Ed.). *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*. [S.l.: s.n.], 2010. (Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag, v. 790), p. 63–135. Citado 5 vezes nas páginas 33, 34, 42, 43 e 156.

Skokos, H. et al. Smaller alignment index (SALI): Determining the ordered or chaotic nature of orbits in conservative dynamical systems. *eprint arXiv:nlin/0210053*, out. 2002. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 43.

Skokos, H. et al. How Does the Smaller Alignment Index (SALI) Distinguish Order from Chaos? *Progress of Theoretical Physics Supplement*, v. 150, p. 439–443, 2003. Citado 7 vezes nas páginas 26, 43, 150, 151, 152, 153 e 162.

Skokos, H. et al. Detecting order and chaos in Hamiltonian systems by the SALI method. *Journal of Physics A Mathematical General*, v. 37, p. 6269–6284, jun. 2004. Citado 4 vezes nas páginas 26, 43, 44 e 148.

Skokos, H.; Bountis, T. C. *Complex Hamiltonian Dynamics*. [S.l.]: Springer, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 44, 145, 146 e 147.

Skokos, H.; Bountis, T. C.; Antonopoulos, C. Geometrical properties of local dynamics in Hamiltonian systems: The Generalized Alignment Index (GALI) method. *Physica D Nonlinear Phenomena*, v. 231, p. 30–54, jul. 2007. Citado 6 vezes nas páginas 26, 44, 162, 163, 166 e 168.

Skokos, H.; Patsis, P. A.; Athanassoula, E. Orbital dynamics of three-dimensional bars - I. The backbone of three-dimensional bars. A fiducial case. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 333, p. 847–860, jul. 2002. Citado na página 26.

Skokos, H.; Patsis, P. A.; Athanassoula, E. Orbital dynamics of three-dimensional bars - II. Investigation of the parameter space. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 333, p. 861–870, jul. 2002. Citado na página 26.

The Fenomen of Travaller. *The Fenomen of Travaller*. 2017. Disponível em: <http://anmysite.com/top/darth-vaders-tie-fighter.html>. Acesso em: 11 de outubro de 2017. Citado na página 106.

Zotos, E. E.; Caranicolas, N. D. Determining the type of orbits in the central regions of barred galaxies. *Research in Astronomy and Astrophysics*, v. 16, p. 26, fev. 2016. Citado na página 26.

A APÊNDICE: TÓPICOS ADICIONAIS SOBRE SISTEMAS HAMILTONIANOS

A.1 COLCHETE DE POISSON

Definição A.1. *Sejam $F, G : U \subset \mathbb{R}^{2N} \longrightarrow \mathbb{R}$ com U aberto em $\mathbb{R}^{2N}$. O Colchete de Poisson é definido por:*

$$\{F, G\} := \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q_j} \right) =< \bigtriangledown F, J \bigtriangledown G >= \Omega(\bigtriangledown F, \bigtriangledown G)$$

onde $\Omega : \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^{2N} \longrightarrow \mathbb{R}$ é a Forma Canônica Simplética de $\mathbb{R}^{2N}$.

Propriedade A.1. *Sejam $F, G, T : U \subset \mathbb{R}^{2N} \longrightarrow \mathbb{R}$ com U aberto em $\mathbb{R}^{2N}$. O Colchete de Poisson satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $\{F, G\} = -\{G, F\}$

(ii) $\{F + G, T\} = \{F, T\} + \{G, T\}$

(iii) $\{F.G, T\} = F\{G, T\} + G\{F, T\}$

(iv) $\{\{F, G\}, T\} = \{\{G, T\}, F\} + \{\{T, F\}, G\} = 0$

Corolário A.1. *Sejam $F, G : U \subset \mathbb{R}^{2N} \longrightarrow \mathbb{R}$ com U aberto em $\mathbb{R}^{2N}$ tais que $\{F, G\} = 0$. Então $\{G, F\} = 0$.*

Demonstração. $\{F, G\} = 0 \Longrightarrow -\{G, F\} = 0 \Longrightarrow \{G, F\} = 0.$ □

Teorema A.1. *Sejam uma Função Hamiltoniana $H : U \subset \mathbb{R}^{2N} \longrightarrow \mathbb{R}$ e uma curva integral do Sistema Hamiltoniano associado $(\boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{p}(t)), t \in I$, com U aberto em $\mathbb{R}^{2N}$ e I um intervalo real. Então, para toda função diferenciável $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$, vale:*

$$\frac{dF}{dt}(\boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{p}(t)) = \{F, H\}(\boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{p}(t))$$

Demonstração. $\frac{dF}{dt}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) =< \bigtriangledown F, (\frac{dq_k}{dt}, \frac{dp_k}{dt}) > \overset{por 2.1}{=} < \bigtriangledown F, J \bigtriangledown H >= \{F, H\}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)).$ □

Corolário A.2. *Sendo U aberto em $\mathbb{R}^{2N}$, $F : U \subset \mathbb{R}^{2N} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma Constante de Movimento (ou Integral Primeira) do Sistema Hamiltoniano (2.1) se, e somente se, $\{F, H\} = 0$.*

Definição A.2. *Se F e G são Constantes de Movimento do Sistema Hamiltoniano (2.1), dizemos que F e G estão em involução quando $\{F, G\} = 0$.*

Note que o Corolário A.2 nos diz que toda Constante de Movimento está em involução com a Função Hamiltoniana H.

A.2 TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS

Considerando um Sistema Hamiltoniano com N Graus de Liberdade, sendo $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ a Função Hamiltoniana com $\mathbf{q} = (q_1, \cdots, q_N)$, $\mathbf{p} = (p_1, \cdots, p_N)$ e $q_1, \cdots, q_N, p_1, \cdots, p_N$ independentes, sabemos que são satisfeitas as equações do sistema (2.1). Gostaríamos de sugerir uma mudança de variáveis, tipo

$$\begin{cases} Q_i = Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \\ P_i = P_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \end{cases}$$

onde as transformações Q_i e P_i, para $i \in \{1, \cdots, N\}$, são inversíveis e diferenciáveis, de modo que as equações do sistema (2.1) sejam preservadas.

Para isto, uma nova Função Hamiltoniana $K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ deve satisfazer

$$\begin{cases} \dfrac{dQ_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial P_i} \\ \\ \dfrac{dP_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial Q_i} \end{cases}$$

para $i \in \{1, \cdots, N\}$.

Do Princípio Variacional (Goldstein; Poole; Safko, 2002; Lemos, 2004), sabemos que

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\sum_i p_i \frac{dq_i}{dt} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t))dt = 0 \tag{A.1}$$

e gostaríamos que isto implicasse

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\sum_i P_i \frac{dQ_i}{dt} - H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t))dt = 0 \tag{A.2}$$

Uma maneira de fazer isto é supor que os dois integrandos diferem por uma derivada total de uma função $\phi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ (poderíamos tomar $\phi(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$).

Ou seja,

$$\overbrace{\sum_i (p_i \frac{dq_i}{dt} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t))}^{integrando\ de\ (A.1)} = \overbrace{\sum_i (P_i \frac{dQ_i}{dt} - H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t))}^{integrando\ de\ (A.2)} - \frac{d\phi}{dt}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \tag{A.3}$$

Integrando $\dfrac{d\phi}{dt}$ em t e aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\phi}{dt} dt = \phi(\mathbf{q}(t_2), \mathbf{p}(t_2), t_2) - \phi(\mathbf{q}(t_1), \mathbf{p}(t_1), t_1) = 0$$

pois, segundo Lemos (2004), podemos tomar $\delta q_i(t_2) = \delta q_i(t_1) = 0$ e $\delta p_i(t_2) = \delta p_i(t_1) = 0$.

Desse modo, temos que

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\phi}{dt} dt = 0$$

e portanto, toda vez que (A.1) valer, (A.2) também valerá.

Por conseguinte, usaremos (A.3) para definir Transformação Canônica:

Definição A.3. *A transformação inversível, diferenciável, com inversa diferenciável, $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \longmapsto (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P})$ dada por $Q_i = Q_i(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ e $P_i = P_i(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ é canônica se, e somente se, existirem funções $\phi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ e $K(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, t)$ tais que:*

$$\sum_{i=1}^{N} (p_i \frac{dq_i}{dt} - P_i \frac{dQ_i}{dt}) + K(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, t) - H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) = \frac{d\phi}{dt}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$$

Ou na forma diferencial:

$$\sum_{i=1}^{N} (p_i dq_i - P_i dQ_i) + K(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, t) - H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) = d\phi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) \tag{A.4}$$

A.3 FUNÇÕES GERADORAS

Para esta seção, continuamos nas condições trabalhadas, até o momento, na Seção A.2.

Suponha que seja possível resolver as N equações $Q_i = Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ para os N p's $p_i = p_i(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$, $i \in \{1, \cdots, N\}$.

Definindo $F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) := \phi(\mathbf{q}, \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t), t)$, temos que, da equação (A.4), segue que

$$\sum_{i=1}^{N} (p_i dq_i - P_i dQ_i) + K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = dF_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$$

Portanto

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ \\ P_i = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_i} \end{cases} \tag{A.5}$$

para $i \in \{1, \cdots, N\}$ e, ainda,

$$K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) \tag{A.6}$$

Note que, considerando (A.5) e (A.6), obtemos uma transformação canônica. Logo, F_1 gera uma transformação canônica e, por esse motivo, é denominada função geradora.

Mas F_1 não é o único tipo de função geradora para transformações canônicas.

Observamos que nem sempre é possível (ou conveniente) resolver $Q_i = Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ da forma $p_i = p_i(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$.

Um exemplo de fácil entendimento é a transformação identidade: $Q_i = q_i$ e $P_i = p_i$. Neste caso, é impossível extrair $p_i = p_i(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$. Sendo assim, F_1 não é geradora da identidade.

Suponha que se possa tomar $q_1, \cdots, q_N, P_1, \cdots, P_N$ como variáveis independentes.

Usando

$$d \sum Q_i P_i = \sum P_i dQ_i + \sum Q_i dP_i$$

temos

$$-\sum P_i dQ_i = \sum Q_i dP_i - d \sum Q_i P_i$$

e substituindo em (A.4):

$$\sum_{i=1}^{N} (p_i dq_i - P_i dQ_i) + K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = d(\overbrace{\sum P_i Q_i - \phi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}^{F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)}) = dF_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$$

Assim,

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i} \\ \\ Q_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_i} \end{cases}$$

para $i \in \{1, \cdots, N\}$ e, ainda,

$$K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) \tag{A.7}$$

A função $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ também é geradora.

Observação A.1. *Existem muitos tipos de funções geradoras e, dentre elas, estão $F_3(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{Q}, t)$ e $F_4(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{P}, t)$ que também satisfazem $K(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, t) = H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) + \dfrac{\partial F_3}{\partial t}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{Q}, t)$ e $K(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, t) = H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) + \dfrac{\partial F_4}{\partial t}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{P}, t)$, respectivamente.*

B APÊNDICE: TEORIA DE HAMILTON-JACOBI

Neste momento, desenvolveremos alguns tópicos da Teoria de Hamilton-Jacobi, considerada por muitos cientistas o auge da Mecânica Analítica.

B.1 EQUAÇÃO DE HAMILTON-JACOBI

Considerando um Sistema Hamiltoniano de N Graus de Liberdade, descrito pelas variáveis $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ e pela Função Hamiltoniana $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, suporemos ser possível encontrar uma transformação canônica $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \longmapsto (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$, por meio de uma função geradora do tipo $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$, de modo que a nova Função Hamiltoniana satisfaça $K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = 0$.

Em tais condições, temos:

$$\begin{cases} \dot{Q_i} = \dfrac{\partial K}{\partial P_i} = 0 \\ \\ \dot{P_i} = -\dfrac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \end{cases}$$

o que implica $Q_i = \beta_i$ e $P_i = \alpha_i$, onde β_i e α_i são constantes para $i \in \{1, \cdots, N\}$.

Note que, se olharmos para a transformação inversa, teremos:

$$q_i = q_i(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \Longrightarrow q_i(t) = q_i(\beta, \alpha, t)$$

e

$$p_i = p_i(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \Longrightarrow p_i(t) = p_i(\beta, \alpha, t)$$

Para uma função geradora do tipo F_2, temos:

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i} \\ \\ Q_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_i} \end{cases}$$

para $i \in \{1, \cdots, N\}$.

Por convenção, trocaremos a notação $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ para $S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ e, então, teremos:

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial S}{\partial q_i} \\ \\ Q_i = \dfrac{\partial S}{\partial P_i} \end{cases} \tag{B.1}$$

para $i \in \{1, \cdots, N\}$.

A nova Função Hamiltoniana, segundo a equação (A.7), é dada por:

$$K(\mathbf{Q},\mathbf{P},t) = H(\mathbf{q},\mathbf{p},t) + \frac{\partial S}{\partial t}(\mathbf{q},\mathbf{P},t)$$

Como nossa hipótese é $K(\mathbf{Q},\mathbf{P},t) = 0$, então:

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p},t) + \frac{\partial S}{\partial t}(\mathbf{q},\mathbf{P},t) = 0$$

e usando $p_i = \dfrac{\partial S}{\partial q_i}$, temos:

$$H(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, t) + \frac{\partial S}{\partial t}(\mathbf{q},\mathbf{P},t) = 0 \tag{B.2}$$

A equação (B.2) é uma equação diferencial parcial de 1ª ordem, não linear, em $N+1$ variáveis independentes $q_1, \cdots, q_N, t$. Esta equação recebe o nome de Equação de Hamilton-Jacobi.

Observe que o problema de resolver o sistema de equações hamiltonianas, de $2N$ equações diferenciais ordinárias, é reduzido a um problema equivalente de solucionar apenas uma equação diferencial parcial de $N+1$ variáveis.

Nosso intuito agora é definir Solução Completa (Integral Completa) da equação (B.2). Para isso, suponhamos que se tenha uma solução da forma

$$S(q_1, \cdots, q_N, P_1, \cdots, P_N, t)$$

Uma vez que $P_i = \alpha_i$ e $Q_i = \beta_i$, para $i \in \{1, \cdots, N\}$, podemos reescrever tal solução como

$$S(q_1, \cdots, q_N, \alpha_1, \cdots, \alpha_N, t)$$

e, ainda, as equações (B.1) se tornam

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial S}{\partial q_i}(q_1, \cdots, q_N, \alpha_1, \cdots, \alpha_N, t) \\[2ex] \beta_i = \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_i}(q_1, \cdots, q_N, \alpha_1, \cdots, \alpha_N, t) \end{cases}$$

para $i \in \{1, \cdots, N\}$.

Definição B.1. *Uma Solução Completa (Integral Completa) da Equação de Hamilton-Jacobi é uma solução da forma $S(q_1, \cdots, q_N, \alpha_1, \cdots, \alpha_N, t)$, contendo N constantes não aditivas $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$, tais que $\det A \neq 0$, onde $A = [a_{ij}] = \dfrac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j}$.*

B.2 O TEOREMA DE JACOBI

O resultado central da Teoria de Hamilton-Jacobi é o seguinte teorema:

Teorema B.1 (Teorema de Jacobi). *Seja $S(q_1, \cdots, q_N, \alpha_1, \cdots, \alpha_N, t)$ uma solução completa (integral completa) da Equação de Hamilton-Jacobi. Então os q's e p's definidos por $p_i = \dfrac{\partial S}{\partial q_i}$ e $\beta_i = \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_i}$, obedecem as Equações de Hamilton:*

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

para $i \in \{1, \cdots, N\}$.

Demonstração. Derivando $\beta_i = \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_i}$ em relação a t, temos:

$$0 = \dot{\beta}_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial \alpha_i}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_i} \tag{B.3}$$

Como $S(q_1, \cdots, q_N, \alpha_1, \cdots, \alpha_N, t)$ é solução completa da Equação de Hamilton-Jacobi, temos:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}(q_1, \cdots, q_N, \alpha_1, \cdots, \alpha_N, t), t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{B.4}$$

Derivando (B.4) em relação a α_i, segue:

$$\sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_i} = 0 \tag{B.5}$$

Substituindo (B.5) em (B.3) e usando $\dfrac{\partial p_j}{\partial \alpha_i} = \dfrac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial \alpha_i}$, temos:

$$0 = \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial \alpha_i}.(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j}) \tag{B.6}$$

Como a matriz $A = [a_{ij}] = \dfrac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial \alpha_i}$ é não singular, isto é, $det A \neq 0$, o sistema homogêneo de equações lineares (B.6) possui somente a solução trivial. Ou seja:

$$\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} = 0$$

o que implica

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

o que mostra a 1ª parte.

Vamos a 2ª parte:

Tomando a derivada de $p_i = \dfrac{\partial S}{\partial q_i}$ em relação a t:

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial S}{\partial q_i} = \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j}\,\dot{q}_j + \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_i} \tag{B.7}$$

Derivando (B.4) em relação a q_i, temos:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial q_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial t} = 0 \tag{B.8}$$

Substituindo (B.8) em (B.7):

$$\dot{p}_i = \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial q_i}\,\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j}.\frac{\partial H}{\partial p_j}$$

Pela 1ª parte, segue:

$$\dot{p}_i = \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial q_i}\,\dot{q}_j$$

implicando

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

o que mostra a 2ª parte e, consequentemente, o teorema. □

B.3 SISTEMAS MULTIPERIÓDICOS E VARIÁVEIS DE AÇÃO E ÂNGULO

Definição B.2. *Um Sistema Hamiltoniano de N Graus de Liberdade no qual a Função Hamiltoniana não depende explicitamente do tempo é dito separável se, para algum conjunto de coordenadas generalizadas $(q_1, \cdots, q_N)$, existe uma solução completa da Equação de Hamilton-Jacobi, independente do tempo, da forma*

$$W(q_1, \cdots, q_N, \alpha_1, \cdots, \alpha_N) = W_1(q_1, \alpha_1, \cdots, \alpha_N) + \cdots + W_N(q_N, \alpha_1, \cdots, \alpha_N) \tag{B.9}$$

No caso separável, temos

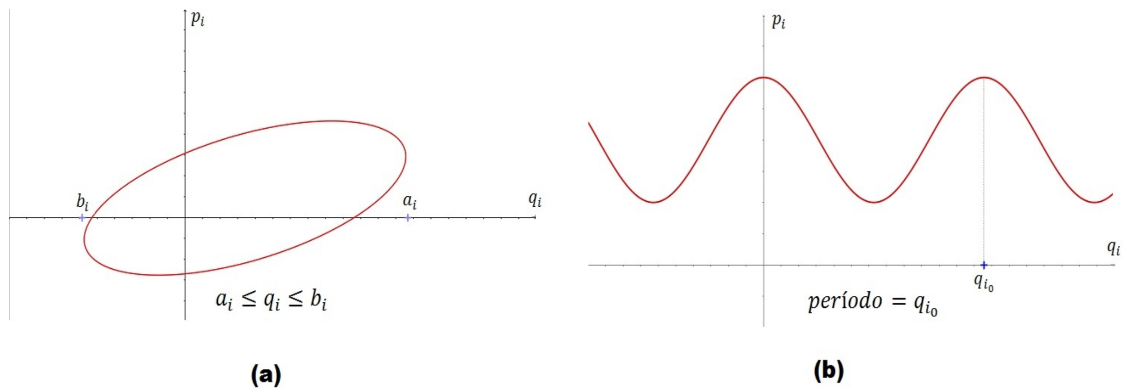
$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W_i}{\partial q_i} = f_i(q_i, \alpha_1, \cdots, \alpha_N) \tag{B.10}$$

para $i \in \{1, \cdots, N\}$.

A Equação (B.10) representa a projeção sobre o plano (q_i, p_i) do movimento que o sistema realiza no espaço de fase.

A Figura 54 mostra dois casos interessantes da projeção sobre o plano (q_i, p_i):

Figura 54 – Movimento: Libração e Rotação



Fonte: o autor.

(a) Libração

(b) Rotação

Definição B.3. *Um sistema separável é dito multiperiódico se a projeção do movimento sobre cada plano* (q_i, p_i) *enquadra-se em uma das duas categorias:*

(A) A curva $p_i(q_i, \alpha_1, \cdots, \alpha_N)$ *é fechada, isto é,* q_i *oscila entre dois limites definidos* a_i *e* b_i*: Libração. (Vide Figura 54 (a));*

(B) p_i *é uma função periódica de* q_i*, embora* q_i *não seja função periódica do tempo: Rotação. (Vide Figura 54 (b)).*

Em sistemas multiperiódicos, podemos definir as Variáveis de Ação e, também, as Variáveis de Ângulo, que servem para efetuar o cálculo das frequências associadas ao movimento, sem a necessidade de integrar completamente as Equações de Hamilton.

Definição B.4. *Considerando um sistema multiperiódico, as Variáveis de Ação são definidas por*

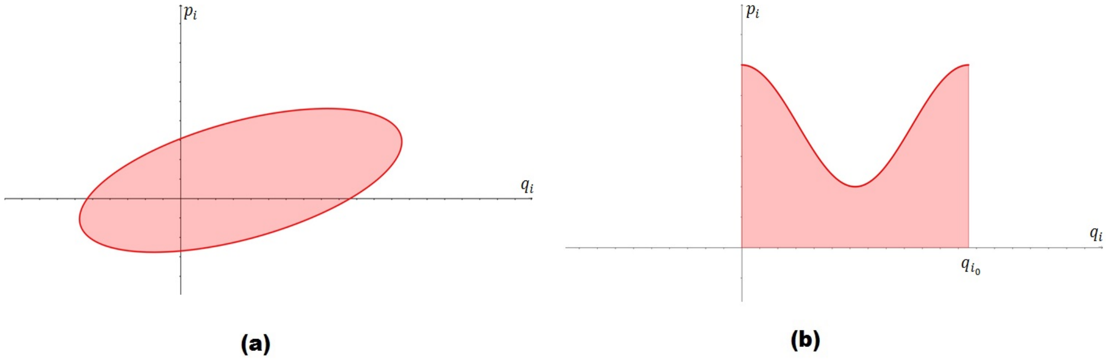
$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i \tag{B.11}$$

onde $i \in \{1, \cdots, N\}$.

Observação B.1. *As integrais de (B.11) são calculadas ao longo da curva fechada no caso de libração (Vide Figura 54 (a)) ou feita sobre a curva em um período* q_{i0} *no caso da rotação (Vide Figura 54 (b)).*

Geometricamente, as integrais de (B.11) representam a área da figura fechada no caso de libração ou a área abaixo da curva em um período q_{i0} no caso de rotação. Observe a Figura 55

Figura 55 – Interpretação da Integral: Libração e Rotação



Fonte: o autor.

Lembrando que $p_i = \dfrac{\partial W_i}{\partial q_i} = p_i(q_i, \alpha_1, \cdots, \alpha_N)$, a Equação (B.11) leva a conclusão de que

$$J_i = J_i(\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$$

Resolvendo para os N α's, temos:

$$\alpha_i = \alpha_i(J_1, \cdots, J_N)$$

Considerando a transformação canônica gerada pela solução da Equação de Hamilton-Jacobi, $W(q_1, \cdots, q_N, \alpha_1, \cdots, \alpha_N)$, independente do tempo, temos que a Função Hamiltoniana não muda, ou seja $K = H$. Do método por separação para equações diferenciais parciais, segue que $K = H = \alpha_1 = \alpha_1(J_1, \cdots, J_N)$

Logo, a nova Função Hamiltoniana é a antiga Função Hamiltoniana expressa em termos dos J's:

$$K = H = H(J_1, \cdots, J_N)$$

E consequentemente, temos:

$$W = W(q_1, \cdots, q_N, J_1, \cdots, J_N)$$

Definição B.5. *Considerando um sistema multiperiódico, as variáveis canônicas conjugadas aos J's são chamadas de Variáveis de Ângulo e são definidas por*

$$\theta_i = \frac{\partial W}{\partial J_i} \tag{B.12}$$

onde $i \in \{1, \cdots, N\}$.

Note que $\theta_i = \theta_i(\mathbf{q}, \mathbf{J})$.

Assim, temos:

$$\begin{cases} \theta_i \equiv Q_i \\ J_i \equiv P_i \end{cases}$$

As equações de movimento transformadas, como $K = H$ e H só depende dos J's, ficam:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_i = \dfrac{\partial K}{\partial P_i} = \dfrac{\partial H}{\partial J_i} = \omega_i = constante \\ \\ \dot{J}_i = -\dfrac{\partial K}{\partial Q_i} = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta_i} = 0 \end{cases}$$

Onde as soluções são expressas por:

$$\begin{cases} \theta_i(t) = \theta_i(0) + \omega_i t \\ J_i = constante \end{cases}$$

Vamos comprovar neste momento que, se o sistema é periódico, os ω_i's são as frequências fundamentais, isto é, frequências angulares associadas a projeção do movimento em cada plano de fase.

Calculando a variação de θ_i em um período τ, segue:

$$\Delta\theta_i = \oint \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \theta_i}{\partial q_k} dq_k = \oint \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2 W}{\partial q_k \partial J_i} dq_k = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial W}{\partial q_k} dq_k \tag{B.13}$$

onde usamos (B.12) e invertemos a ordem da diferenciação. Usando (B.9) e (B.10), podemos reescrever (B.13) como:

$$\Delta\theta_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial W}{\partial q_k} dq_k = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint \sum_{k=1}^{N} p_k dq_k$$

Denotando por n_k o número de voltas completas descritas pelas coordenadas q_k, temos:

$$\Delta\theta_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \sum_{k=1}^{N} \overbrace{\oint p_k dq_k}^{2\pi n_k J_k} = \frac{\partial}{\partial J_i} \sum_{k=1}^{N} 2\pi n_k J_k = 2\pi n_i$$

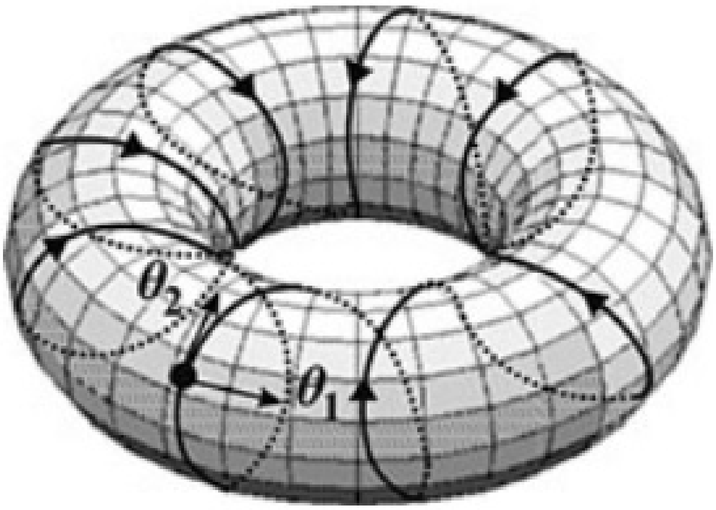
Sendo τ_i o período associado a projeção do movimento no i-ésimo plano de fase, temos $n_i \tau_i = \tau$ e concluímos que:

$$n_i \tau_i = \tau \Longrightarrow 2\pi n_i = \omega_i \tau \Longrightarrow 2\pi n_i = \omega_i n_i \tau \Longrightarrow \omega_i = \frac{2\pi}{\tau_i}$$

Portanto, ω_i é a frequência angular associada ao período τ.

Observação B.2. *Em um Sistema Hamiltoniano de 2 Graus de Liberdade, integrável, temos que quando* $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{m}{n}$*, com* m *e* n *inteiros positivos sem divisores em comum, as órbitas serão periódicas e estarão retidas em um toro invariante 2-dimensional, como pode ser visto na Figura 56. Já quando a razão* $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ *for irracional, as órbitas nunca serão fechadas e, eventualmente, cobrem uniformemente um toro 2-dimensional no espaço de fase 4-dimensional de coordenadas* q_1, q_2, p_1, p_2*. Para mais detalhes consulte Skokos e Bountis (2012).*

Figura 56 – Órbita retida no toro invariante 2-dimensional.



Fonte: Skokos e Bountis (2012)

C APENDICE: OS MÉTODOS DOS ÍNDICES DE ALINHAMENTO - EM DETALHES

C.1 O MÉTODO SALI

O Método SALI foi criado por Skokos (2001). A premissa básica deste método (e também o que o essencialmente diferencia do cálculo do MLE) é a consideração de dois vetores de desvio de uma órbita de referência. Segundo Skokos e Bountis (2012), considerando a relação entre dois vetores de desvio (em vez de apenas um), é possível, no caso de órbitas caóticas, contornar obstáculos da convergência lenta dos Expoentes de Lyapunov para constantes não nulas, quando t tende ao infinito.

C.1.1 ÍNDICES DE ALINHAMENTO PARALELO E ANTI PARALELO

Para calcular SALI, segue-se a evolução temporal simultânea de dois vetores de desvio de uma órbita de referência com condições iniciais $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$. Uma vez que estamos interessados apenas nas direções destes vetores de desvio, podemos normalizá-los, de tempo em tempo, mantendo suas normas iguais a 1:

$$\widehat{\mathbf{w}}_i(t) = \frac{\mathbf{w}_i(t)}{||\mathbf{w}_i(t)||}$$

onde $i \in \{1, 2\}$ e $||.||$ denota a norma Euclidiana usual. Sendo assim, por uma questão de comodidade, sempre que nos referirmos a vetores de desvio, já o estamos considerando com norma 1.

Definimos, então, as duas seguintes quantidades:

(i) O Índice de Alinhamento Paralelo, como:

$$d_- := ||\widehat{\mathbf{w}}_1(t) - \widehat{\mathbf{w}}_2(t)||$$

(ii) O Índice de Alinhamento Anti Paralelo, como:

$$d_+ := ||\widehat{\mathbf{w}}_1(t) + \widehat{\mathbf{w}}_2(t)||$$

onde $||.||$ denota a norma Euclidiana usual de vetores.

Observa-se facilmente que, quando $d_- = 0$, as direções dos vetores de desvio coincidem e, quando $d_+ = 0$, as direções dos dois vetores de desvio são opostas.

A direção dos dois vetores de desvio, quando a órbita referência é caótica, tendem a coincidir-se quando $d_- \longrightarrow 0$ e $d_+ \longrightarrow 2$, ou tendem a tornarem-se opostas quando $d_- \longrightarrow 2$ e $d_+ \longrightarrow 0$. Já no caso de órbitas ordenadas, os vetores de desvio tornam-se tangentes ao toro no qual a órbita está confinada, em direções diferentes. Então, as quantidades d_+ e d_- tendem a valores positivos pertencentes ao intervalo $]0, 2[$.

C.1.2 O MENOR ÍNDICE DE ALINHAMENTO (SALI)

O Menor Índice de Alinhamento (SALI) é definido como o menor entre os valores do Índice de Alinhamento Paralelo e Índice de Alinhamento Anti Paralelo, $SALI(t) = min\{d_+, d_-\}$, ou seja:

$$SALI(t) = min\{||\widehat{\mathbf{w}}_1(t) + \widehat{\mathbf{w}}_2(t)||, ||\widehat{\mathbf{w}}_1(t) - \widehat{\mathbf{w}}_2(t)||\} \tag{C.1}$$

Sendo assim, é evidente que $SALI(t) \in [0, \sqrt{2}]$.

$SALI = 0$ indica que os dois vetores de desvio estão alinhados na mesma direção, ou seja, são linearmente dependentes.

C.1.3 O COMPORTAMENTO DE SALI PARA MOVIMENTOS CAÓTICOS

Os apontamentos feitos nesta subseção são espelhados no estudo realizado por Skokos et al. (2004).

Neste momento, vamos investigar a dinâmica na vizinhança de órbitas caóticas em um Sistema Hamiltoniano de N Graus de Liberdade.

Neste caso, uma órbita é definida por $\mathbf{x} = (q_1, q_2, \cdots, q_{2N}, p_1, p_2, \cdots, p_{2N})$ onde q_i e p_i são as coordenadas generalizadas e momento conjugado, respectivamente, com $i \in \{1, \cdots, N\}$.

A evolução temporal desta órbita é dada pelas Equações Hamiltonianas de Movimento

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{V}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\right) \tag{C.2}$$

Resolvendo as Equações Variacionais sobre a solução de (C.2), $\mathbf{x}(t)$, que é nossa órbita investigada,

$$\dot{\mathbf{w}} = \frac{d\mathbf{w}}{dt} = M(\mathbf{x}(t)).\mathbf{w}$$

onde $M = \dfrac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}$ é a Matriz Jacobiana de $\mathbf{V}$, nós obtemos a evolução temporal de um vetor de desvio inicial $\mathbf{w}(t_0)$, para intervalos infinitesimais $[t_0, t_0 + \Delta t]$. Notemos também que, neste contexto, os autovalores $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{2N}$ da matriz M, em $t = t_0$, podem ser pensados como Expoentes Locais de Lyapunov, com $\widehat{e}_1, \widehat{e}_2, \cdots, \widehat{e}_{2N}$ sendo os correspondentes autovetores. De fato, esses autovalores oscilam sobre $L_1, L_2, \cdots, L_{2N}$, que são os LCE's globais da dinâmica nesta região. Como sabemos, em Sistemas Dinâmicos Hamiltonianos, os Expoentes de Lyapunov, nos casos de órbitas caóticas, são números reais e agrupam-se em pares de sinais opostos, sendo os dois últimos iguais à zero (Lichtenberg,(**??**)). Assim, a evolução de qualquer vetor de desvio inicial $\mathbf{w}_1(0)$ é dada por:

$$\mathbf{w}_1(t) = \sum_{i=1}^{2N} c_i^{(1)} e^{\lambda_i t} \widehat{e}_i \tag{C.3}$$

onde os $c_i^{(1)}$'s são, em geral, números complexos e λ_i e $\widehat{e}_i$ dependem da localização específica no espaço de fase através do qual passa nossa órbita de referência.

Iremos considerar aqui apenas autovalores reais (e, consequentemente, $c_i^{(1)}$'s reais também), pois se algum autovalor for complexo, sua contribuição em (C.3) oscilará e não afetará os próximos passos.

Afim de realizar um primeiro estudo sobre a evolução de SALI, faremos duas aproximações acerca dos vetores de desvio:

(1) $\lambda_i \approx L_i$, para todo $i \in \{1, \cdots, 2N\}$;

(2) Vamos considerar que a principal contribuição para um vetor de desvio $\mathbf{w}_1(t)$ é oriunda dos dois maiores termos da equação (C.3).

Sendo assim:

$$\mathbf{w}_1(t) \approx c_1^{(1)} e^{\lambda_1 t}\widehat{e}_1 + c_2^{(1)} e^{\lambda_2 t}\widehat{e}_2 \approx c_1^{(1)} e^{L_1 t}\widehat{e}_1 + c_2^{(1)} e^{L_2 t}\widehat{e}_2$$

e então, para dois vetores de desvio $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$:

$$\frac{\mathbf{w}_1(t)}{||\mathbf{w}_1(t)||} \approx \frac{c_1^{(1)} e^{L_1 t}\widehat{e}_1 + c_2^{(1)} e^{L_2 t}\widehat{e}_2}{|c_1^{(1)}| e^{L_1 t}}$$

e

$$\frac{\mathbf{w}_2(t)}{||\mathbf{w}_2(t)||} \approx \frac{c_1^{(2)} e^{L_1 t}\widehat{e}_1 + c_2^{(2)} e^{L_2 t}\widehat{e}_2}{|c_1^{(2)}| e^{L_1 t}}$$

Considerando $s_i = sign(c_1^{(i)})$, para $i \in \{1, 2\}$, temos:

$$\frac{\mathbf{w}_1(t)}{||\mathbf{w}_1(t)||} \approx s_1\widehat{e}_1 + \frac{c_2^{(1)} e^{-(L_1 - L_2)t}\widehat{e}_2}{|c_1^{(1)}|}$$

e

$$\frac{\mathbf{w}_2(t)}{||\mathbf{w}_2(t)||} \approx s_2\widehat{e}_1 + \frac{c_2^{(2)} e^{-(L_1 - L_2)t}\widehat{e}_2}{|c_1^{(2)}|}$$

Calculando SALI, de acordo com a definição dada em (C.1), temos:

$$SALI(t) = min\left|\left|\frac{\mathbf{w}_1(t)}{||\mathbf{w}_1(t)||} \pm \frac{\mathbf{w}_2(t)}{||\mathbf{w}_2(t)||}\right|\right| \approx \left|\frac{c_2^{(1)}}{|c_1^{(1)}|} \pm \frac{c_2^{(2)}}{|c_1^{(2)}|}\right| e^{-(L_1 - L_2)t}||\widehat{e}_2|| = ce^{-(L_1 - L_2)t}$$

Ou seja,

$$SALI(t) \propto e^{-(L_1 - L_2)t} \tag{C.4}$$

Percebe-se que (C.4) sugere que, no caso de órbitas caóticas, SALI tende a zero exponencialmente e a taxa deste decrescimento está intimamente ligada aos dois maiores LCE's.

C.1.4 O COMPORTAMENTO DE SALI PARA MOVIMENTOS REGULARES

Os apontamentos feitos nesta subseção, são espelhados no estudo realizado por Skokos et al. (2003).

O objetivo, neste momento, é tentar compreender o motivo pelo qual SALI não se anula para movimentos regulares, partindo do estudo dos vetores de desvio. Para isto, realizaremos investigações em Sistemas Hamiltonianos Integráveis.

Um Sistema Hamiltoniano Integrável de 2 Graus de Liberdade possui, além do Hamiltoniano H, uma segunda integral independente F, em involução com H:

$$\{H, F\} = 0 \tag{C.5}$$

onde $\{\cdot, \cdot\}$ denota o Colchete de Poisson. Nestes sistemas, o movimento acontece na intersecção das duas variedades:

$$H = k_H \ \ , \ \ F = k_F$$

onde k_H e k_F são os valores constantes das duas integrais. Desse modo, a órbita em um espaço de fase 4-dimensional, está se movendo instantaneamente em um subespaço tangente 2-dimensional, perpendicular aos valores

$$\triangledown\mathbf{H} = \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial p_x}, \frac{\partial H}{\partial p_y}\right) \quad e \quad \triangledown\,\mathbf{F} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial p_x}, \frac{\partial F}{\partial p_y}\right) \tag{C.6}$$

sendo x e y as coordenadas generalizadas do sistema e p_x e p_y seus momentos conjugados.

Pode-se dizer que o movimento é governado por qualquer um dos campos vetoriais hamiltonianos:

$$\mathbf{f}_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_x}, \frac{\partial H}{\partial p_y}, -\frac{\partial H}{\partial x}, -\frac{\partial H}{\partial y}\right) \quad ou \quad \mathbf{f}_F = \left(\frac{\partial F}{\partial p_x}, \frac{\partial F}{\partial p_y}, -\frac{\partial F}{\partial x}, -\frac{\partial F}{\partial y}\right) \tag{C.7}$$

Os vetores $\triangledown\mathbf{H}$ e $\triangledown\mathbf{F}$ (e consequentemente $\mathbf{f}_H$ e $\mathbf{f}_F$) são linearmente independentes, por conta da independência funcional das duas integrais em quase todo o espaço de fase. Então, os vetores unitários correspondentes

$$\widehat{\mathbf{f}}_H = \frac{\mathbf{f}_H}{||\mathbf{f}_H||}, \widehat{\mathbf{f}}_F = \frac{\mathbf{f}_F}{||\mathbf{f}_F||}, \widehat{\triangledown\mathbf{H}} = \frac{\triangledown\mathbf{H}}{||\triangledown\,\mathbf{H}||}, \widehat{\triangledown\mathbf{F}} = \frac{\triangledown\mathbf{F}}{||\triangledown\,\mathbf{F}||} \tag{C.8}$$

tais que

$$\widehat{\mathbf{f}}_H \perp \widehat{\triangledown\mathbf{H}} \ \ e \ \ \widehat{\mathbf{f}}_F \perp \widehat{\triangledown\mathbf{F}}$$

podem ser utilizados como uma base para o espaço de fase 4-dimensional, onde os vetores de desvio evoluem. Denotemos por $B = \{\widehat{\mathbf{f}}_H, \widehat{\mathbf{f}}_F, \widehat{\triangledown\mathbf{H}}, \widehat{\triangledown\mathbf{F}}\}$.

Uma vez que

$$< \widehat{\triangledown\mathbf{H}}, \widehat{\triangledown\mathbf{F}} >=< \widehat{\mathbf{f}}_H, \widehat{\mathbf{f}}_F >= \frac{\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial p_x}\frac{\partial F}{\partial p_x} + \frac{\partial H}{\partial p_y}\frac{\partial F}{\partial p_y}}{||\widehat{\triangledown\mathbf{H}}||.||\widehat{\triangledown\mathbf{H}}||} \neq 0$$

onde $<\cdot,\cdot>$ é o produto interno, $||\bigtriangledown \mathbf{H}|| = ||\mathbf{f}_H||$ e $||\bigtriangledown \mathbf{F}|| = ||\mathbf{f}_F||$; podemos afirmar que esta base, em geral, não é ortogonal.

Note que, das definições dadas em (C.6) e (C.7), temos:

$$< \widehat{\bigtriangledown \mathbf{H}}, \widehat{\mathbf{f}}_H >= \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p_x} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial p_y} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p_x} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial p_y} = 0$$

e

$$< \widehat{\bigtriangledown \mathbf{F}}, \widehat{\mathbf{f}}_F >= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p_x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial p_y} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p_x} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial p_y} = 0$$

Enquanto que, de (C.5), lembrando que $\{H,F\} = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p_x} - \frac{\partial H}{\partial p_x}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial p_y} - \frac{\partial H}{\partial p_y}\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \overset{\{H,F\}=-\{F,H\}}{\Longrightarrow} \{F,H\} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p_x} - \frac{\partial F}{\partial p_x}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial p_y} - \frac{\partial F}{\partial p_y}\frac{\partial H}{\partial y} = 0$, temos:

$$< \widehat{\bigtriangledown \mathbf{H}}, \widehat{\mathbf{f}}_F >= \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p_x} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial p_y} - \frac{\partial H}{\partial p_x}\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial p_y}\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

e

$$< \widehat{\bigtriangledown \mathbf{F}}, \widehat{\mathbf{f}}_H >= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p_x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial p_y} - \frac{\partial F}{\partial p_x}\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial p_y}\frac{\partial H}{\partial y} = 0$$

Ou seja, temos $< \widehat{\bigtriangledown \mathbf{H}}, \widehat{\mathbf{f}}_H >=< \widehat{\bigtriangledown \mathbf{F}}, \widehat{\mathbf{f}}_F >= 0$ e $< \widehat{\bigtriangledown \mathbf{H}}, \widehat{\mathbf{f}}_F >=< \widehat{\bigtriangledown \mathbf{F}}, \widehat{\mathbf{f}}_H >= 0$.

Assim, utilizando a base $B = \{\widehat{\mathbf{f}}_H, \widehat{\mathbf{f}}_F, \widehat{\bigtriangledown \mathbf{H}}, \widehat{\bigtriangledown \mathbf{F}}\}$, considerando um vetor de desvio $\mathbf{w}_1$, podemos escrevê-lo como:

$$\mathbf{w}_1 = a_1\widehat{\mathbf{f}}_H + a_2\widehat{\mathbf{f}}_F + a_3\widehat{\bigtriangledown \mathbf{H}} + a_4\widehat{\bigtriangledown \mathbf{F}} \tag{C.9}$$

onde $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. Os valores dos coeficientes a_i, para $i \in \{1,2,3,4\}$, exibem uma clara figura da evolução temporal do vetor de desvio $\mathbf{w}_1$.

Considerando o que foi desenvolvido nesta seção até agora, Skokos et al. (2003) estudaram modelos hamiltonianos integráveis 2D e acompanharam a evolução númerica dos coeficientes $a_i, i \in \{1,2,3,4\}$. De acordo com Skokos et al. (2003), o vetor de desvio $\mathbf{w}_1$ tende a cair no espaço tangente ao toro, estendido em cada ponto por $\widehat{\mathbf{f}}_H$ e $\widehat{\mathbf{f}}_F$, o que indica que a_3 e a_4 tendem a zero, enquanto a_1 e a_2 tendem, em geral, a valores não nulos.

Exibiremos agora, um estudo feito ainda por Skokos et al. (2003), no modelo hamiltoniano 2D de Van de Waals (Ganesan; Lakshmanan, 1990), afim de estudar o comportamento dos coeficientes $a_i, i \in \{1,2,3,4\}$ e inferir o comportamento de SALI em órbitas regulares.

O modelo em questão é:

$$H(x,y,p_x,p_y) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - E(x^2+y^2) + A(x^6+y^6) + B(x^4y^2 + x^2y^4) \tag{C.10}$$

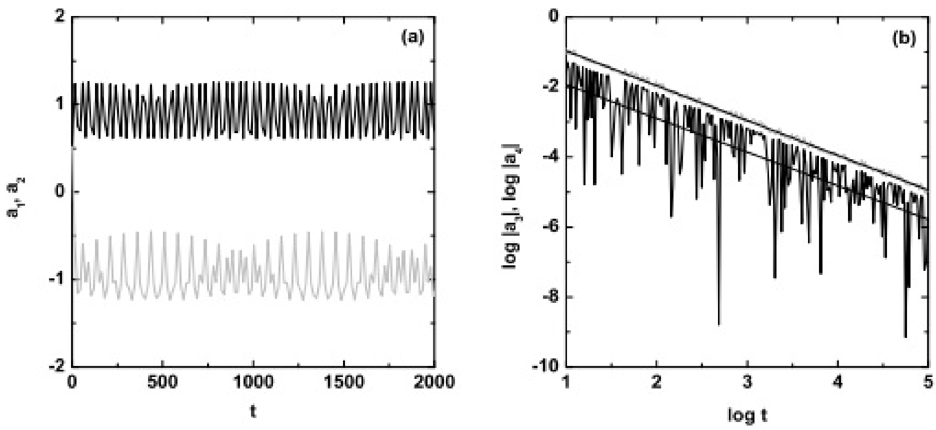
onde E, A e B são números reais. Para $B = 3A$, o Hamiltoniano (C.10) é completamente integrável e a segunda integral de movimento é:

$$F(x,y,p_x,p_y) = (xp_y - yp_x)^2 = x^2p_y^2 - 2xyp_xp_y + y^2p_x^2$$

Para os cálculos, foram utilizados $A = 0.25$, $B = 3A = 0.75$ e $E = -10^{-8}$ e foram calculados, para diferentes vetores de desvio, os coeficientes a_1, a_2, a_3 e a_4 de (C.9). Os resultados encontrados foram a_1 e a_2 não nulos e a_3 e a_4 tendendo a zero proporcionalmente a t^{-1}.

A Figura 57, mostra um caso particular em que o vetor de desvio inicial foi tomado com $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$ e $a_4 = 1$. No caso (a), temos a_1 (em preto) e a_2 (em cinza) e nota-se claramente que a_1 e a_2 não se tornam nulos. No caso (b), temos, em escala logarítmica, $|a_3|$ (em preto) e $|a_4|$ (em cinza), ambos tendendo a zero; as duas curvas plotadas como referência são, respectivamente, $y = 0.107t^{-0.962}$ e $y = 0.067t^{-0.995}$ e, assim, notamos que $|a_3|, |a_4| \propto t^{-1}$. Esclarecemos que a órbita utilizada possuía condições iniciais $(x, y, p_x, p_y) = (-0.6, 0, 0, 1.99416)$.

Figura 57 – Estudo dos coeficientes a_1, a_2, a_3 e a_4 de um vetor de desvio de uma órbita do Hamiltoniano (C.10).



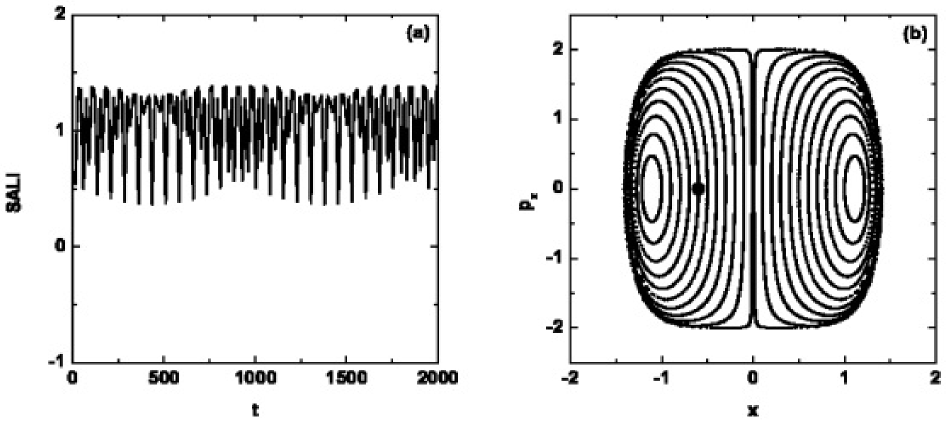
Fonte: Skokos et al. (2003)

Da Figura 57, conclui-se que qualquer vetor cairá no espaço tangente do toro no qual as órbitas estão envolvidas. Esse espaço tangente é produzido pelos vetores $\widehat{\mathbf{f}}_H$ e $\widehat{\mathbf{f}}_F$ e os vetores de desvio se tornam combinação linear de $\widehat{\mathbf{f}}_H$ e $\widehat{\mathbf{f}}_F$ apenas.

Como não existe motivo particular para dois vetores de desvio iniciais acabarem com os mesmos valores de a_1 e a_2, SALI, em geral, oscila em torno de uma constante não nula.

Tomando a órbita com condições iniciais $(x, y, p_x, p_y) = (-0.6, 0, 0, 1.99416)$ e dois vetores de desvio iniciais $\mathbf{w}_1$ com $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$ e $a_3 = 1$ e $\mathbf{w}_2$ com $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$ e $a_4 = 0$, Skokos e colaboradores, fizeram os gráficos ilustrados na Figura 58, que ilustra a evolução de SALI, em (a), que oscila em torno de um valor diferente de zero, para uma órbita regular, indicada em (b) pelo ponto negro.

Figura 58 – Evolução temporal de SALI em uma órbita regular do Hamiltoniano (C.10).



Fonte: Skokos et al. (2003)

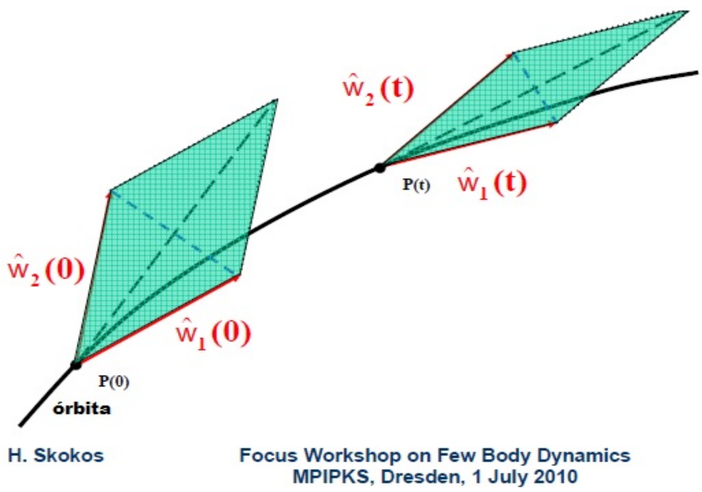
Generalizando os apontamentos vistos, inferimos SALI em um movimento regular por:

$$SALI(t) \approx constante > 0, t \longrightarrow \infty \tag{C.11}$$

C.1.5 UMA INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA PARA SALI

Note, a partir dos cálculos seguintes, que SALI mede efetivamente a área do paralelogramo originado pelos dois vetores de desvio:

Figura 59 – SALI como a área de um paralelogramo formado pelos vetores de desvio.



Fonte: Skokos (2010a)

$$Area = ||\widehat{\mathbf{w}}_1 \wedge \widehat{\mathbf{w}}_2|| = \frac{< ||\widehat{\mathbf{w}}_1 - \widehat{\mathbf{w}}_2||, ||\widehat{\mathbf{w}}_1 + \widehat{\mathbf{w}}_2|| >}{2} = \frac{min\{d_+, d_-\} \cdot max\{d_+, d_-\}}{2} =$$

$$= SALI \cdot \frac{max\{d_+, d_-\}}{2}$$

Logo,

$$Area \propto SALI$$

C.2 O MÉTODO GALI

C.2.1 O ÍNDICE DE ALINHAMENTO GENERALIZADO (GALI)

Consideremos um Sistema Hamiltoniano Autônomo de N Graus de Liberdade com a seguinte Função Hamiltoniana:

$$H(q_1, q_2, \cdots, q_N, p_1, p_2, \cdots, p_N) = h = constante$$

onde p_i e p_i, para $i \in \{1, 2, \cdots, N\}$, são as coordenadas generalizadas e os momentos conjugados, respectivamente.

Uma órbita neste sistema é dada por um vetor $\mathbf{x}(t) = (q_1(t), q_2(t), \cdots, q_N(t), p_1(t), p_2(t), \cdots, p_N(t))$ com $x_i = q_i$ e $x_{i+N} = p_i$, para $i \in \{1, 2, \cdots, N\}$.

A evolução temporal desta órbita é governada pelas Equações Hamiltonianas de Movimento

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{V}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \frac{-\partial H}{\partial \mathbf{q}}\right) \tag{C.12}$$

enquanto a evolução temporal de um vetor de desvio inicial $\mathbf{w}(0) = (\Delta x_1(0), \cdots, \Delta x_{2N}(0))$ da órbita $\mathbf{x}(t)$ obedece as Equações Variacionais

$$\dot{\mathbf{w}} = \frac{d\mathbf{w}}{dt} = M(\mathbf{x}(t)).\mathbf{w} \tag{C.13}$$

onde $M = \dfrac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}}$ é a Matriz Jacobiana de $\mathbf{V}$.

Para generalizar o Método SALI, vamos considerar k vetores de desvio iniciais (linearmente independentes) $\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_k$, com $2 \leq k \leq 2N$, e determinar se estes vetores se tornam linearmente dependentes, checando se o volume do paralelepípedo originado por eles tende a zero. Este volume é calculado como a norma do produto exterior destes vetores.

Normalizando os vetores de desvio, temos:

$$\widehat{\mathbf{w}}_i = \frac{\mathbf{w}_i(t)}{||\mathbf{w}_i(t)||}$$

para $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$.

Todos os vetores de desvio $\widehat{\mathbf{w}}_i$, $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$, pertencem ao espaço tangente $2N$-dimensional do fluxo hamiltoniano. Considerando $B = \{\widehat{e}_1, \widehat{e}_2, \cdots, \widehat{e}_{2N}\}$ a base canônica deste espaço, qualquer vetor de desvio $\widehat{\mathbf{w}}_i$ pode ser escrito como

$$\widehat{\mathbf{w}}_i = \sum_{j=1}^{2N} w_{ij}\widehat{e}_j$$

para $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$, onde w_{ij} são números reais tais que

$$\sum_{j=1}^{2N} w_{ij}^2 = 1$$

Desse modo

$$\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{w}}_1 \\ \widehat{\mathbf{w}}_2 \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{w}}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{12N} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{22N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{k1} & w_{k2} & \cdots & w_{k2N} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \widehat{e}_1 \\ \widehat{e}_2 \\ \vdots \\ \widehat{e}_{2N} \end{pmatrix} = C. \begin{pmatrix} \widehat{e}_1 \\ \widehat{e}_2 \\ \vdots \\ \widehat{e}_{2N} \end{pmatrix} \tag{C.14}$$

E assim, o produto exterior dos k vetores de desvio pode ser escrito como:

$$\widehat{\mathbf{w}}_1 \wedge \widehat{\mathbf{w}}_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathbf{w}}_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq 2N} \begin{vmatrix} w_{1i_1} & w_{1i_2} & \cdots & w_{1i_k} \\ w_{2i_1} & w_{2i_2} & \cdots & w_{2i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{ki_1} & w_{ki_2} & \cdots & w_{ki_k} \end{vmatrix} \widehat{e}_{i_1} \wedge \widehat{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \widehat{e}_{i_k} \tag{C.15}$$

onde a somatória é feita para todas as combinações do índice k.

Se dois vetores de desvio (pelo menos) se tornam linearmente dependentes, os determinantes de (C.15) se tornam zero, o que anula o produto exterior. Neste caso, a norma do produto exterior

$$||\widehat{\mathbf{w}}_1 \wedge \widehat{\mathbf{w}}_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathbf{w}}_k|| = \left\{ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq 2N} \begin{vmatrix} w_{1i_1} & w_{1i_2} & \cdots & w_{1i_k} \\ w_{2i_1} & w_{2i_2} & \cdots & w_{2i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{ki_1} & w_{ki_2} & \cdots & w_{ki_k} \end{vmatrix}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{C.16}$$

também se anula.

Definimos o Índice de Alinhamento Generalizado (GALI) de ordem k por:

$$GALI_k(t) = ||\widehat{\mathbf{w}}_1 \wedge \widehat{\mathbf{w}}_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathbf{w}}_k||$$

Para calcular $GALI_k$, portanto, devemos acompanhar a evolução de uma órbita com condições iniciais $\mathbf{x}(0)$, usando a equação (C.12), bem como a evolução de k vetores de desvio unitários, inicialmente linearmente independentes, através das equações variacionais (C.13). Para cada *time step*, normalizamos esses vetores de desvio e calculamos $GALI_k$ conforme a equação (C.16).

Nota-se que se $GALI_k$ tende a zero, o volume do paralelepípedo originado pelos k vetores de desvio tende a zero, com pelo menos dois destes vetores se tornando linearmente dependentes. Por outro lado, se $GALI_k(t)$ não tende a zero, o volume também é diferente de zero, o tempo todo.

C.2.2 O COMPORTAMENTO DE GALI PARA MOVIMENTOS CAÓTICOS

Para investigar a dinâmica de uma órbita caótica de um Sistema Hamiltoniano com N Graus de Liberdade, vamos primeiro apontar alguns resultados sobre os Expoentes Característicos de Lyapunov (LCEs) desses sistemas. Tais resultados podem ser conferidos e aprofundados em Skokos (2010b), Oseledec (1968) e Benettin, Galgani e Giorgilli (1980).

Oseledec (1968) demonstrou que a taxa de divergência exponencial $L(\mathbf{x}(0), \mathbf{w})$ de uma órbita de referência, com condições iniciais onde $\mathbf{w}$ é um vetor de desvio, dada por

$$L(\mathbf{x}(0), \mathbf{w}) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{||\mathbf{w}(t)||}{||\mathbf{w}(0)||}$$

existe e é finita. Além do mais, existe uma base $2N$-dimensional $\{\widehat{\mathbf{u}_1}, \widehat{\mathbf{u}_2}, \cdots, \widehat{\mathbf{u}_{2N}}\}$ do espaço tangente do sistema de modo que $L(\mathbf{x}(0), \mathbf{w})$ assume um dos $2N$ valores (possivelmente não distintos):

$$L_i(\mathbf{x}(0)) = L(\mathbf{x}(0), \widehat{\mathbf{u}}_i)$$

para $i \in \{1, 2, \cdots, 2N\}$. Também pode ser demonstrado que tais valores obedecem a seguinte ordenação:

$$L_1 \geq L_2 \geq \cdots \geq L_{2N}$$

Benettin, Galgani e Giorgilli (1980) verificaram que os LCEs aparecem agrupados em pares de sinais opostos, ou seja, $L_i = -L_{2N-i+1}$, para $i \in \{1, 2, \cdots, 2N\}$, enquanto que, para Sistemas Hamiltonianos Autônomos, tem-se $L_N = L_{N+1} = 0$.

Tomando um vetor de desvio inicial da forma

$$\mathbf{w}(0) = \sum_{i=1}^{2N} c_i \widehat{\mathbf{u}}_i$$

sua evolução temporal pode ser aproximada por

$$\mathbf{w}(t) = \sum_{i=1}^{2N} c_i e^{d_i t} \widehat{\mathbf{u}}_i$$

onde c_i e d_i são números reais que dependem da localização específica do espaço de fase onde a órbita de referência passa. Assim, as quantidades d_i, para $i \in \{1, 2, \cdots, 2N\}$, podem ser consideradas como os "Expoentes de Lyapunov Locais"possuindo como limites, para $t \longrightarrow \infty$, os LCEs, L_i's, para $i \in \{1, 2, \cdots, 2N\}$.

Com essas suposições, após um certo *time step*, tem-se $d_i \approx L_i$, para $i \in \{1, 2, \cdots, 2N\}$, e expressamos a evolução dos vetores de desvio da forma:

$$\mathbf{w}_i(t) = \sum_{j=1}^{2N} c_j^i e^{L_j t} \widehat{\mathbf{u}}_j$$

Desse modo, se $L_1 > L_2$, pode-se estimar, para t suficientemente grande, a seguinte norma Eucidiana:

$$||\mathbf{w}_i(t)|| \approx |c_1^i| e^{L_1 t} \tag{C.17}$$

Como consequência, a matriz C da equação (C.14) dos coeficientes dos k vetores de desvio normalizados, usando $\{\widehat{\mathbf{u}_1}, \widehat{\mathbf{u}_2}, \cdots, \widehat{\mathbf{u}_{2N}}\}$ como base, se torna:

$$C(t) = [c_{ij}] = \begin{pmatrix} s_1 & \frac{c_2^1}{|c_1^1|} e^{-(L_1-L_2)t} & \frac{c_3^1}{|c_1^1|} e^{-(L_1-L_3)t} & \cdots & \frac{c_{2N}^1}{|c_1^1|} e^{-(L_1-L_{2N})t} \\ s_2 & \frac{c_2^2}{|c_1^2|} e^{-(L_1-L_2)t} & \frac{c_3^2}{|c_1^2|} e^{-(L_1-L_3)t} & \cdots & \frac{c_{2N}^2}{|c_1^2|} e^{-(L_1-L_{2N})t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_k & \frac{c_2^k}{|c_1^k|} e^{-(L_1-L_2)t} & \frac{c_3^k}{|c_1^k|} e^{-(L_1-L_3)t} & \cdots & \frac{c_{2N}^k}{|c_1^k|} e^{-(L_1-L_{2N})t} \end{pmatrix}$$

onde $s_i = sign(c_1^i)$ e $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$.

Portanto,

$$\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{w}}_1 \\ \widehat{\mathbf{w}}_2 \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{w}}_{2N} \end{pmatrix} = C(t). \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{u}}_1 \\ \widehat{\mathbf{u}}_2 \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{u}}_{2N} \end{pmatrix}$$

O produto exterior dos k vetores de desvio normalizados é calculado como:

$$\widehat{\mathbf{w}}_1 \wedge \widehat{\mathbf{w}}_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathbf{w}}_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le 2N} \begin{vmatrix} c_{1i_1} & c_{1i_2} & \cdots & c_{1i_k} \\ c_{2i_1} & c_{2i_2} & \cdots & c_{2i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{ki_1} & c_{ki_2} & \cdots & c_{ki_k} \end{vmatrix} \widehat{\mathbf{u}}_{i_1} \wedge \widehat{\mathbf{u}}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathbf{u}}_{i_k} \tag{C.18}$$

Note que o número

$$S_k = \left\{ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq 2N} \begin{vmatrix} c_{1i_1} & c_{1i_2} & \cdots & c_{1i_k} \\ c_{2i_1} & c_{2i_2} & \cdots & c_{2i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{ki_1} & c_{ki_2} & \cdots & c_{ki_k} \end{vmatrix}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{C.19}$$

é diferente da norma $||\widehat{\mathbf{w}}_1 \wedge \widehat{\mathbf{w}}_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathbf{w}}_k||$ dada na equação (C.16), por conta da base distinta.

Considerando a mudança de bases

$$\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{u}}_1 \\ \widehat{\mathbf{u}}_2 \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{u}}_{2N} \end{pmatrix} = T_C. \begin{pmatrix} \widehat{e}_1 \\ \widehat{e}_2 \\ \vdots \\ \widehat{e}_{2N} \end{pmatrix}$$

onde T_C denota a matriz de transformação e efetuando os cálculos, nota-se que para $2N$ vetores de desvio, temos

$$||\widehat{\mathbf{w}}_1 \wedge \widehat{\mathbf{w}}_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathbf{w}}_{2N}|| = S_{2N}.det(T_C) \tag{C.20}$$

Se, por outro lado, considerarmos o produto exterior de k vetores de desvio onde $k < 2N$, a norma $||\widehat{\mathbf{w}}_1 \wedge \widehat{\mathbf{w}}_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathbf{w}}_k||$ não possuirá uma expressão similar a equação (C.20). Observe que, no caso de órbitas caóticas, os vetores de desvio tendem a se tornarem linearmente dependentes e isto independe da base.

A aproximação utilizada para a evolução de $GALI_k$, neste caso, é dada por:

$$GALI_k = ||\widehat{\mathbf{w}}_1 \wedge \widehat{\mathbf{w}}_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathbf{w}}_k|| \propto e^{-[(L_1-L_2)+(L_1-L_3)+\cdots+(L_1-L_k)]t}$$

Vamos entender o motivo:

Os determinantes exibidos em S_k na equação (C.19) podem ser divididos em duas categorias: os que contém a primeira coluna da matriz $C(t)$ e os que não contém.

No primeiro caso, temos:

$$D_{1,j_1,j_2,\cdots,j_{k-1}} = \begin{vmatrix} s_1 & \frac{c^1_{j_1}}{|c^1_1|}e^{-(L_1-L_{j_1})t} & \cdots & \frac{c^1_{j_{k-1}}}{|c^1_1|}e^{-(L_1-L_{j_{k-1}})t} \\ s_2 & \frac{c^2_{j_1}}{|c^2_1|}e^{-(L_1-L_{j_1})t} & \cdots & \frac{c^2_{j_{k-1}}}{|c^2_1|}e^{-(L_1-L_{j_{k-1}})t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_k & \frac{c^k_{j_1}}{|c^k_1|}e^{-(L_1-L_{j_1})t} & \cdots & \frac{c^k_{j_{k-1}}}{|c^k_1|}e^{-(L_1-L_{j_{k-1}})t} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} s_1 & \frac{c^1_{j_1}}{|c^1_1|} & \cdots & \frac{c^1_{j_{k-1}}}{|c^1_1|} \\ s_2 & \frac{c^2_{j_1}}{|c^2_1|} & \cdots & \frac{c^2_{j_{k-1}}}{|c^2_1|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_k & \frac{c^k_{j_1}}{|c^k_1|} & \cdots & \frac{c^k_{j_{k-1}}}{|c^k_1|} \end{vmatrix} .e^{-[(L_1-L_{j_1})+(L_1-L_{j_2})+\cdots+(L_1-L_{j_{k-1}})]t}$$

onde $1 < j_1 < j_2 < \cdots < j_{k-1} \leq 2N$. Desse modo, a evolução temporal de $D_{1,j_1,j_2,\cdots,j_{k-1}}$ é dada por:

$$D_{1,j_1,j_2,\cdots,j_{k-1}} \propto e^{-[(L_1-L_{j_1})+(L_1-L_{j_2})+\cdots+(L_1-L_{j_{k-1}})]t} \tag{C.21}$$

Analogamente, no segundo caso, temos:

$$D_{j_1,j_2,\cdots,j_k} = \begin{vmatrix} \frac{c^1_{j_1}}{|c^1_1|}e^{-(L_1-L_{j_1})t} & \frac{c^1_{j_2}}{|c^1_1|}e^{-(L_1-L_{j_2})t} & \cdots & \frac{c^1_{j_k}}{|c^1_1|}e^{-(L_1-L_{j_k})t} \\ \frac{c^2_{j_1}}{|c^1_1|}e^{-(L_1-L_{j_1})t} & \frac{c^2_{j_2}}{|c^2_1|}e^{-(L_1-L_{j_2})t} & \cdots & \frac{c^2_{j_k}}{|c^2_1|}e^{-(L_1-L_{j_k})t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{c^k_{j_1}}{|c^1_1|}e^{-(L_1-L_{j_1})t} & \frac{c^k_{j_2}}{|c^k_1|}e^{-(L_1-L_{j_2})t} & \cdots & \frac{c^k_{j_k}}{|c^k_1|}e^{-(L_1-L_{j_k})t} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{c^1_{j_1}}{|c^1_1|} & \frac{c^1_{j_2}}{|c^1_1|} & \cdots & \frac{c^1_{j_k}}{|c^1_1|} \\ \frac{c^2_{j_1}}{|c^1_1|} & \frac{c^2_{j_2}}{|c^2_1|} & \cdots & \frac{c^2_{j_k}}{|c^2_1|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{c^k_{j_1}}{|c^1_1|} & \frac{c^k_{j_2}}{|c^k_1|} & \cdots & \frac{c^k_{j_k}}{|c^k_1|} \end{vmatrix} .e^{-[(L_1-L_{j_1})+(L_1-L_{j_2})+\cdots+(L_1-L_{j_k})]t}$$

com $1 < j_1 < j_2 < \cdots < j_{k-1} < j_k \leq 2N$. Desse modo, a evolução temporal de $D_{j_1,j_2,\cdots,j_k}$ é dada por:

$$D_{j_1,j_2,\cdots,j_k} \propto e^{-[(L_1-L_{j_1})+(L_1-L_{j_2})+\cdots+(L_1-L_{j_k})]t} \tag{C.22}$$

Note que, em ambos os casos, com o passar do tempo, o determinante tende a zero exponencialmente.

De todos os determinantes que aparecem na definição de S_k, na equação (C.19), o que decai para zero mais lentamente é o que contém as primeiras k colunas da matriz $C(t)$:

$$D_{1,2,\cdots,k} = \begin{vmatrix} s_1 & \frac{c_2^1}{|c_1^1|}e^{-(L_1-L_2)t} & \cdots & \frac{c_k^1}{|c_1^1|}e^{-(L_1-L_k)t} \\ s_2 & \frac{c_2^2}{|c_1^2|}e^{-(L_1-L_2)t} & \cdots & \frac{c_k^2}{|c_1^2|}e^{-(L_1-L_k)t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_k & \frac{c_2^k}{|c_1^k|}e^{-(L_1-L_2)t} & \cdots & \frac{c_k^k}{|c_1^k|}e^{-(L_1-L_k)t} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} s_1 & \frac{c_2^1}{|c_1^1|} & \cdots & \frac{c_k^1}{|c_1^1|} \\ s_2 & \frac{c_2^2}{|c_1^2|} & \cdots & \frac{c_k^2}{|c_1^2|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_k & \frac{c_2^k}{|c_1^k|} & \cdots & \frac{c_k^k}{|c_1^k|} \end{vmatrix} .e^{-[(L_1-L_2)+(L_1-L_3)+\cdots+(L_1-L_k)]t}$$

De onde segue que a evolução temporal de $D_{1,2,3,\cdots,k}$ é dada por:

$$D_{1,2,\cdots,k} \propto e^{-[(L_1-L_2)+(L_1-L_3)+\cdots+(L_1-L_k)]t} \tag{C.23}$$

Os determinantes vistos em (C.21) e (C.22) decaem mais rapidamente que $D_{1,2,\cdots,k}$ pois as quantidades em seus expoentes são menores ou iguais as quantidades do expoente da equação (C.23).

Por conseguinte, dizemos que a taxa de decréscimo de S_k pode ser escrita como

$$S_k(t) \propto e^{-[(L_1-L_2)+(L_1-L_3)+\cdots+(L_1-L_k)]t}$$

Uma vez que $||\widehat{\mathbf{w}}_1 \wedge \widehat{\mathbf{w}}_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathbf{w}}_k||$ da equação (C.16), evolui de forma semelhante a S_k da equação (C.19), afirmamos que $GALI_k = ||\widehat{\mathbf{w}}_1 \wedge \widehat{\mathbf{w}}_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathbf{w}}_k||$ tende a zero da mesma forma que S_k:

$$GALI_k(t) \propto e^{-[(L_1-L_2)+(L_1-L_3)+\cdots+(L_1-L_k)]t} \tag{C.24}$$

Lembremos que foi tomado como suposição, para a aproximação feita na equação (C.17), que $L_1 > L_2$. Mas se os m primeiros L_i's, com $1 < m < k$, forem iguais (ou muito próximos), a equação (C.24) se torna:

$$GALI_k(t) \propto e^{-[(L_1-L_{m+1})+(L_1-L_{m+2})+\cdots+(L_1-L_k)]t}$$

que descreve um decaimento exponencial. Entretanto, para $k \leq m < N$, $GALI_k$ não tende a zero a medida que existe pelo menos um determinante na matriz $C(t)$ que não se torna nulo. Neste caso, deve-se aumentar o número de vetores de desvio, até um decaimento exponencial de GALI ser computado.

A situação em que $L_i = 0, \forall i$, gera órbitas regulares e será tratada a seguir.

C.2.3 O COMPORTAMENTO DE GALI PARA MOVIMENTOS REGULARES

Órbitas regulares de um Sistema Hamiltoniano de N Graus de Liberdade recaem tipicamente sobre um toro N-dimensional localizado em torno de órbitas periódicas estáveis. Tal toro pode ser descrito por N integrais locais formais de movimento em involução; então tal sistema é localmente integrável. Isto indica que podemos montar uma transformação local pelas variáveis de ação e ângulo, considerando $J_1, J_2, \cdots, J_N$ os valores das N integrais formais. Então, as Equações de Movimento de Hamilton ficam

$$\begin{cases} J_i = 0 \\ \theta_i = \omega_i(J_1, J_2, \cdots, J_N) \end{cases} \tag{C.25}$$

para $i \in \{1, 2, \cdots, N\}$.

Integrando, obtemos:

$$\begin{cases} J_i(t) = J_{i_0} \\ \theta_i(t) = \theta_{i_0}\omega_i(J_{1_0}, J_{2_0}, \cdots, J_{N_0})t \end{cases}$$

para $i \in \{1, 2, \cdots, N\}$ e J_{i_0} e θ_{i_0} as condições iniciais.

Denotando por ξ_i e η_i pequenos desvios em J_{i_0} e θ_{i_0}, respectivamente, as equações variacionais do sistema (C.25), que descrevem a evolução de um vetor de desvio são:

$$\begin{cases} \dot{\xi_i} = 0 \\ \dot{\eta_i} = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \omega_{ij}.\xi_j \end{cases} \tag{C.26}$$

onde

$$\omega_{ij} = \frac{\partial \omega_i}{\partial J_j}|_{\mathbf{J}_0} \tag{C.27}$$

para $i, j \in \{1, 2, \cdots, N\}$ e $\mathbf{J}_0 = (J_{1_0}, J_{2_0}, \cdots, J_{N_0}) = constante$, representa o vetor N-dimensional das ações iniciais. A solução dessas equações é:

$$\begin{cases} \xi_i(t) = \xi_i(0) \\ \eta_i(t) = \eta_i(0) + \left[\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \omega_{ij}.\eta_j(0)\right] t \end{cases} \tag{C.28}$$

Das equações (C.28), notamos que um vetor de desvio inicial da forma $\mathbf{w}(0) = (\xi_1(0), \cdots, \xi_N(0), \eta_1(0), \cdots, \eta_N(0))$ evolui no tempo de tal modo que suas coordenadas de ação permanecem constantes e suas coordenadas de ângulo aumentam linearmente com o passar do tempo. Este comportamento implica um aumento quase linear da norma do vetor de desvio (Skokos; Bountis; Antonopoulos, 2007). Para ver isso, suporemos, inicialmente, que $\mathbf{w}(0)$ é tal que

$$\sum_{i=1}^{N} \xi_i(0)^2 + \sum_{i=1}^{N} \eta_i(0)^2 = 1$$

onde a evolução temporal da sua norma é dada por:

$$||\mathbf{w}(t)|| = \left\{ 1 + \left[\sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} \omega_{ij}.\xi_j(0) \right)^2 \right] t^2 + \left[2 \sum_{i=1}^{N} \left(\eta_i(0) \sum_{j=1}^{N} \omega_{ij}.\xi_j(0) \right) \right] t \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{C.29}$$

enquanto o vetor de desvio normalizado se torna:

$$\widehat{\mathbf{w}}(t) = \frac{1}{||\mathbf{w}(t)||} \left(\xi_1(0), \cdots, \xi_N(0), \eta_1(0) + \left[\sum_{j=1}^{N} \omega_{1j}.\xi_j(0) \right] t, \cdots, \eta_N(0) + \left[\sum_{j=1}^{N} \omega_{Nj}.\xi_j(0) \right] t \right) \tag{C.30}$$

Uma vez que a norma (C.29) de um vetor de desvio, para t suficientemente grande, aumenta praticamente linearmente, o vetor de desvio normalizado (C.30) tende a cair no espaço tangente ao toro. Um estudo comprovando este fato numericamente (para Sistemas Hamiltonianos de 2 Graus de Liberdade) pode ser conferido em (Skokos et al., 2003).

Usando como base do espaço tangente $2N$-dimensional os $2N$ vetores unitários $\{\widehat{\mathbf{v}}_1, \widehat{\mathbf{v}}_2, \cdots, \widehat{\mathbf{v}}_{2N}\}$, tal que os N primeiros $\widehat{\mathbf{v}}_1, \widehat{\mathbf{v}}_2, \cdots, \widehat{\mathbf{v}}_N$ correspondem as variáveis de ação e os demais $\widehat{\mathbf{v}}_{N+1}, \widehat{\mathbf{v}}_{N+1}, \cdots, \widehat{\mathbf{v}}_{2N}$ correspondem as variáveis de ângulo, qualquer vetor de desvio unitário $\widehat{\mathbf{w}}_i$, para $i = 1, 2, \cdots$, pode ser escrito como:

$$\widehat{\mathbf{w}}(t) = \frac{1}{||\mathbf{w}(t)||} \left[\sum_{j=1}^{N} \xi_j^i(0) \widehat{\mathbf{v}}_j + \sum_{j=1}^{N} \left(\eta_j^i(0) + \sum_{k=1}^{N} \omega_{kj}.\xi_j^i(0)t \right) \widehat{\mathbf{v}}_{N+j} \right]$$

Ressalta-se que as quantidades ω_{ij}, para $i, j \in 1, 2, \cdots, N$, em (C.27), dependem da órbita de referência e não de vetor de desvio. Observa-se, também, que a base $\{\widehat{\mathbf{v}}_1, \widehat{\mathbf{v}}_2, \cdots, \widehat{\mathbf{v}}_{2N}\}$ depende especificamente do toro em que o movimento ocorre e está relacionada com a base canônica $\{\widehat{e}_1, \widehat{e}_2, \cdots, \widehat{2}_{2N}\}$ por uma transformação não singular que possui a forma

$$\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{v}}_1 \\ \widehat{\mathbf{v}}_2 \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{v}}_{2N} \end{pmatrix} = T_0. \begin{pmatrix} \widehat{e}_1 \\ \widehat{e}_2 \\ \vdots \\ \widehat{e}_{2N} \end{pmatrix}$$

com T_0 denotando a matriz transformação. A base $\{\widehat{e}_1, \widehat{e}_2, \cdots, \widehat{e}_{2N}\}$ é usada para descrever a evolução de um vetor de desvio com as coordenadas q_i e p_i, $i \in \{1, \cdots, N\}$, de um Sistema Hamiltoniano, já a base $\{\widehat{\mathbf{v}}_1, \widehat{\mathbf{v}}_2, \cdots, \widehat{\mathbf{v}}_{2N}\}$ descreve a mesma evolução, considerando as variáveis de ação e ângulo, cujo as equações de movimento foram descritas em (C.25).

Uma observação: Segundo Skokos, Bountis e Antonopoulos (2007), se um vetor de desvio está, inicialmente, no espaço tangente do toro, então, com a evolução temporal, este vetor permanecerá constante. Com efeito, este vetor tendo as condições iniciais $\xi_i(0) = 0$ para $i \in \{1, \cdots, N\}$ com $\sum_{i=1}^{N} \eta_i(0)^2 = 1$, concluí-se, da equação (C.28), que $\xi_i(t) = 0$ e $\eta_i(t) = \eta_i(0)$, isto é, o vetor de desvio permanece inalterado com norma 1. Em particular, tal vetor possui a forma

$$\widehat{\mathbf{w}}(t) = (0, 0, \cdots, 0, \eta_1(0), \eta_2(0), \cdots, \eta_N(0))$$

Estudaremos o caso de k vetores de desvio unitários linearmente independentes $\{\widehat{\mathbf{w}}_1, \widehat{\mathbf{w}}_2, \cdots, \widehat{\mathbf{w}}_k\}$ para $2 \leq k \leq 2N$.

Usando a base $\{\widehat{\mathbf{v}}_1, \widehat{\mathbf{v}}_2, \cdots, \widehat{\mathbf{v}}_{2N}\}$, segue

$$\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{w}}_1 \\ \widehat{\mathbf{w}}_2 \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{w}}_k \end{pmatrix} = D. \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{v}}_1 \\ \widehat{\mathbf{v}}_2 \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{v}}_{2N} \end{pmatrix} \tag{C.31}$$

onde, se nenhum vetor de desvio está inicialmente no espaço tangente do toro, D é:

$$D = [d_{ij}] = \frac{1}{\prod\limits_{m=1}^{k} ||\mathbf{w}_m(t)||}.G \tag{C.32}$$

onde

$$G = \begin{pmatrix} \xi_1^1(0) & \cdots & \xi_N^1 & \eta_1^1(0) + \sum\limits_{m=1}^{N} \omega_{1m}\xi_m^1(0)t & \cdots & \eta_N^1(0) + \sum\limits_{m=1}^{N} \omega_{Nm}\xi_m^1(0)t \\ \xi_1^2(0) & \cdots & \xi_N^2 & \eta_1^2(0) + \sum\limits_{m=1}^{N} \omega_{1m}\xi_m^2(0)t & \cdots & \eta_N^2(0) + \sum\limits_{m=1}^{N} \omega_{Nm}\xi_m^2(0)t \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^k(0) & \cdots & \xi_N^k & \eta_1^k(0) + \sum\limits_{m=1}^{N} \omega_{1m}\xi_m^k(0)t & \cdots & \eta_N^k(0) + \sum\limits_{m=1}^{N} \omega_{Nm}\xi_m^k(0)t \end{pmatrix}$$

com $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$ e $j \in \{1, 2, \cdots, 2N\}$.

A norma de $\mathbf{w}(t)$, para t grande, cresce linearmente como:

$$M_i(t) = ||\mathbf{w}_i(t)|| \propto t \tag{C.33}$$

Definindo $\xi^{0,k} = \begin{pmatrix} \xi_i^1(0) \\ \xi_i^2(0) \\ \vdots \\ \xi_i^k(0) \end{pmatrix}$ e $\eta_i^k = \begin{pmatrix} \eta_i^1(0) \\ \eta_i^2(0) \\ \vdots \\ \eta_i^k(0) \end{pmatrix}$ a matriz D de (C.32) assume a seguinte forma simplificada:

$$D(t) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{k} M_i(t)} . \begin{pmatrix} \xi_1^{0,k} & \cdots & \xi_N^{0,k} & \eta_1^k + \sum_{i=1}^{N} \omega_{1i} \eta_i^{0,k} t & \cdots & \eta_N^k + \sum_{i=1}^{N} \omega_{Ni} \eta_i^{0,k} t \end{pmatrix}$$

Ajustando uma notação adequada, temos:

$$D(t) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{k} M_i(t)} . D^{0,k}(t) \tag{C.34}$$

Suponha agora que tenhamos m vetores de desvio linearmente independentes, com $m \leq k$ e $m \leq N$, inicialmente localizados no espaço tangente do toro e sendo os m primeiros vetores de desvio da equação (C.31). Isto implica, nas notações definidas anteriormente, que:

$$\xi^{m,k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \xi_i^{m+1}(0) \\ \xi_i^{m+2}(0) \\ \vdots \\ \xi_i^k(0) \end{pmatrix}$$

Assim, a matriz D é:

$$D(t) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{k-m} M_{m+i}(t)} . \begin{pmatrix} \xi_1^{m,k} & \cdots & \xi_N^{m,k} & \eta_1^k + \sum_{i=1}^{N} \omega_{1i} \eta_i^{m,k} t & \cdots & \eta_N^k + \sum_{i=1}^{N} \omega_{Ni} \eta_i^{m,k} t \end{pmatrix}$$

Ajustando uma notação adequada, temos:

$$D(t) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{k-m} M_{m+i}(t)} . D^{m,k}(t) \tag{C.35}$$

onde, para $k = m$, define-se $\prod_{i=1}^{0} M_{m+i}(t) = 1$.

Sabemos que o produto exterior $\widehat{\mathbf{w}}_1(t) \wedge \widehat{\mathbf{w}}_2(t) \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathbf{w}}_k(t)$ é dado por:

$$\widehat{\mathbf{w}}_1 \wedge \widehat{\mathbf{w}}_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathbf{w}}_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq 2N} \begin{vmatrix} d_{1i_1} & d_{1i_2} & \cdots & d_{1i_k} \\ d_{2i_1} & d_{2i_2} & \cdots & d_{2i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{ki_1} & d_{ki_2} & \cdots & d_{ki_k} \end{vmatrix} \widehat{\mathbf{v}}_{i_1} \wedge \widehat{\mathbf{v}}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathbf{v}}_{i_k}$$

E, tal como feito com as equações (C.18) e (C.19) (para o caso caótico), introduziremos a quantidade

$$S'_k = \left\{ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq 2N} \begin{vmatrix} d_{1i_1} & d_{1i_2} & \cdots & d_{1i_k} \\ d_{2i_1} & d_{2i_2} & \cdots & d_{2i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{ki_1} & d_{ki_2} & \cdots & d_{ki_k} \end{vmatrix}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Os k vetores de desvio podem eventualmente cair no espaço tangente ao toro onde o movimento acontece (já vimos também que, se o vetor de desvio inicia neste espaço, permanece nele). No estado final, os vetores de desvio terão apenas coordenadas no espaço N-dimensional gerado por $\widehat{\mathbf{v}}_{N+1}, \widehat{\mathbf{v}}_{N+2}, \cdots, \widehat{\mathbf{v}}_{2N}$.

Note que, se iniciarmos com $2 \leq k \leq N$, não existe razão especial para os vetores se tornarem linearmente dependentes, portanto, o produto exterior $\widehat{\mathbf{w}}_1 \wedge \widehat{\mathbf{w}}_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathbf{w}}_k$ não se anula, produzindo S'_k e $GALI_k$ não nulos.

Porém, começando com $N < k \leq 2N$, alguns deles tornam-se linearmente dependentes. Neste caso, teremos $\widehat{\mathbf{w}}_1 \wedge \widehat{\mathbf{w}}_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathbf{w}}_k = 0$ e, como consequência, S'_k e $GALI_k$ nulos.

Vamos, então, estudar mais detalhadamente o comportamento de S'_k. Em geral, escolhemos os vetores de desvio aleatóriamente (com a condição de que sejam linearmente independentes); a situação mais comum é que nenhum deles seja tangente ao toro. Mas, como a escolha é aleatória, temos que tratar também o caso em que isso ocorre. Desse modo, vamos supor que m desses vetores de desvio, onde $0 < m \leq N$, estão no espaço tangente ao toro.

C.2.3.1 CASO 1: NENHUM VETOR DE DESVIO ESTÁ INICIALMENTE NO ESPAÇO TANGENTE AO TORO

Neste caso, a matriz D, cujos elementos aparecem na definição de S'_k, possui a forma dada na equação (C.34). Assim, todos os determinantes que aparecem na definição de S'_k possuem $\dfrac{1}{\prod_{i=1}^{k} M_i(t)}$ como fator comum, que, de acordo com a equação (C.33), descrece para zero do seguinte modo:

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{k} M_i(t)} \propto \frac{1}{t^k} \tag{C.36}$$

Para determinar a evolução temporal de S'_k, vamos procurar os determinantes que aumentam mais rapidamente de todas as possibilidades das $k \times k$ matrizes $D^{0,k}$, da equação (C.34), conforme t aumenta.

Comecemos com $2 \leq k \leq N$. Os determinantes buscados, neste caso, possuem a forma $\frac{N!}{k!(N-k)!}$, onde k colunas são escolhidas entre as últimas N colunas de $D^{0,k}$:

$$\Delta^{0,k}_{j_1,j_2,\cdots,j_k} = \left| \ \eta^k_{j_1} + \sum_{i=1}^{N} \omega_{j_1 i}\xi^{0,k}_i t \quad \eta^k_{j_2} + \sum_{i=1}^{N} \omega_{j_2 i}\xi^{0,k}_i t \quad \cdots \quad \eta^k_{j_k} + \sum_{i=1}^{N} \omega_{j_k i}\xi^{0,k}_i t \ \right| \tag{C.37}$$

onde $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq N$. De acordo Skokos, Bountis e Antonopoulos (2007), a evolução temporal de (C.37) é determinada, principalmente, pelo comportamento de determinantes na forma

$$\left| \ \omega_{j_1 m_1}\xi^{0,k}_{m_1} t \quad \omega_{j_2 m_2}\xi^{0,k}_{m_2} t \quad \cdots \quad \omega_{j_k m_k}\xi^{0,k}_{m_k} t \ \right| = t^k \prod_{i=1}^{k} \omega_{j_i m_i} \cdot \left| \ \xi^{0,k}_{m_1} \quad \xi^{0,k}_{m_2} \quad \cdots \quad \xi^{0,k}_{m_k} \ \right| \propto t^k \tag{C.38}$$

onde $m_i \in \{1, 2, \cdots, N\}$, $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$ e $m_i \neq m_j$ para $i \neq j$.

Todos os demais determinantes que aparecem na definição de S'_k, que não possuem a forma de $\Delta^{0,k}_{j_1,j_2,\cdots,j_k}$, acabam por não ter influência no comportamento de $GALI_k$ (Vide Skokos, Bountis e Antonopoulos (2007) para conferir que a evolução temporal, neste caso, é proporcional a t^l com $l < k$).

Sendo assim, podemos afirmar que todos os determinantes que influenciam no comportamento de $GALI_k$, crescem com o tempo com t^k e combinando este fato com a equação (C.36), temos que

$$GALI_k(t) \approx constante \tag{C.39}$$

para $2 \leq k \leq N$.

Olhemos, agora, para quando $N < k \leq 2N$. Neste caso, os determinantes que aumentam mais rapidamente possuem também as últimas N colunas da matriz $D^{0,k}$:

$$\Delta^{0,k}_{j_1,j_2,\cdots,j_{k-N},1,2,\cdots,N} = \left| \ \xi^{0,k}_{j_1} \quad \cdots \quad \xi^{0,k}_{j_{k-N}} \quad \eta^k_1 \sum_{i=1}^{N} \omega_{1i}\xi^{0,k}_i t \quad \cdots \quad \eta^k_N \sum_{i=1}^{N} \omega_{Ni}\xi^{0,k}_i t \ \right| \tag{C.40}$$

com $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_{k-N} \leq N$. As primeiras $k - N$ colunas de (C.40) são escolhidas entre as primeiras N colunas de $D^{0,k}$. Existem $\frac{N!}{(k-N)!(2N-k)!}$ determinantes da forma dada em (C.40) e podem ser escritos como uma soma de $k \times k$ determinantes, cada um contendo na posição das últimas N colunas η_i^k, para $i \in \{1, 2, \cdots, N\}$, ou colunas da forma $\omega_{ji}\xi_i^{0,k}$, com $i, j \in \{1, 2, \cdots, N\}$. Excluiremos as possibilidades onde $\xi_i^{0,k}$, $i \in \{1, 2, \cdots, N\}$, aparece mais de uma vez, pois implicam em determinantes nulos. Das possibilidades restantes de determinantes, as que aumentam mais rapidamente são aquelas que possuem maior número de colunas proporcionais a t.

Uma vez que t é sempre multiplicado por $\xi_i^{0,k}$ e essas colunas ocupam as primeiras $k - N$ colunas de $\Delta^{0,k}_{j_1, j_2, \cdots, j_{k-N}, 1, 2, \cdots, N}$, t aparece na maioria das $N - (k - N) = 2N - k$ vezes. Caso contrário, o determinante iria conter mesma $\xi_i^{0,k}$ coluna pelo menos duas vezes e tal determinante seria zero. As $k - (2N - k) - (k - N) = k - N$ colunas restantes, são preenchidas por η_i^k que aparecem cada um uma única vez. Assim, a evolução temporal de $\Delta^{0,k}_{j_1, j_2, \cdots, j_{k-N}, 1, 2, \cdots, N}$ é determinada por determinantes da seguinte forma:

$$\left| \; \xi^{0,k}_{j_1} \;\; \cdots \;\; \xi^{0,k}_{j_{k-N}} \;\; \eta^{0,k}_{i_1} \;\; \cdots \;\; \eta^{0,k}_{i_{k-N}} \;\; \omega_{i_{k-N+1} m_1} \xi^{0,k}_{m_1} t \;\; \cdots \;\; \omega_{i_{N m_{2N-k}}} \xi^{0,k}_{i_{2N-k}} t \; \right| \propto t^{2N-k} \tag{C.41}$$

com $i_l, l \in \{1, 2, \cdots, N\}$, $i_l \neq i_j$, para $i \neq j$ e $m_n \in \{1, 2, \cdots, N\}$, $n \in \{1, 2, \cdots, 2N - k\}$, $m_n \neq m_j$, para $n \neq j$.

Então, determinantes da forma dada em (C.40) contribuem para a evolução temporal de S'_k introduzindo termos proporcionais a $\dfrac{t^{2N-k}}{t^k} = \dfrac{1}{t^{2(k-N)}}$. Todos os demais determinantes que aparecem na definição de S'_k, que não possuem a forma $\Delta^{0,k}_{j_1, j_2, \cdots, j_{k-N}, 1, 2, \cdots, N}$, introduzem termos que vão para zero mais rapidamente que $\dfrac{1}{t^{2(k-N)}}$, uma vez que possuem mais que $k - N$ colunas, independentes do tempo, da forma $\xi_i^{0,k}$, para $i \in \{1, 2, \cdots, N\}$. Assim S'_k e $GALI_k$ tendem a zero seguindo a relação:

$$GALI_k(t) \propto \frac{1}{t^{2(k-N)}} \tag{C.42}$$

para $N < k \leq 2N$.

C.2.3.2 CASO 2: EXISTEM VETORES DE DESVIO INICIALMENTE NO ESPAÇO TANGENTE AO TORO

Consideremos m vetores de desvio que inicialmente jazem no espaço tangente ao toro com $m \leq k$ e $m \leq N$. Neste caso, a matriz D, possui a forma vista em (C.35). Todos os determinantes que aparecem na definição de S'_k possuem $\dfrac{1}{\prod_{i=1}^{k-m} M_{m+i}(t)}$ como fator comum, que decresce para zero de acordo com a lei

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{k-m} M_{m+i}(t)} \propto \frac{1}{t^{k-m}} \tag{C.43}$$

Com raciocínio análogo ao feito no **Caso 1** (quando $m = 0$ vetores de desvio estão inicialmente no espaço tangente ao toro), tem-se que, quando $2 \leq k \leq N$, o maior crescimento dos determinantes $k \times k$ da matriz $D^{m,k}$, possuem a forma:

$$\begin{vmatrix} \eta_{i_1}^k & \eta_{i_2}^k & \cdots & \eta_{i_m}^k & \omega_{i_{m+1}n_1}\xi_{n_1}^{0,k}t & \omega_{i_{m+2}n_2}\xi_{n_2}^{0,k}t & \cdots & \omega_{i_k n_{k-m}}\xi_{n_{k-m}}^{0,k}t \end{vmatrix} \propto t^{k-m} \quad \text{(C.44)}$$

onde $i_l \in \{1, 2, \cdots, N\}$, $l \in \{1, 2, \cdots, N\}$ com $i_l \neq i_j$ para $l \neq j$, e $\eta_n \in \{1, 2, \cdots, N\}$, $n \in \{1, 2, \cdots, k-m\}$ com $\eta_n \neq \eta_j$ para $n \neq j$. Combinando as equações (C.43) e (C.44), concluí-se que

$$GALI_k(t) \approx constante \quad \text{(C.45)}$$

para $2 \leq k \leq N$.

Quando $N < k \leq 2N$, neste caso $(m > 0)$, temos dois resultados possíveis. O raciocínio é análogo ao **Caso 1** $(m = 0)$:

(i) Para $m < k - N$, S_k' e $GALI_k$ possuem proporcionalidade a $\dfrac{t^{2N-k}}{t^{k-m}} = \dfrac{1}{t^{2(k-N)-m}}$

(ii) Para $m \geq k - N$, pode-se mostrar que determinantes que crescem mais rapidamente são proporcionais a t^{N-m} (Skokos; Bountis; Antonopoulos, 2007). Neste caso, S_k' e $GALI_k$ possuem proporcionalidade a $\dfrac{t^{N-m}}{t^{k-m}} = \dfrac{1}{t^{k-N}}$

Resumindo, podemos dizer que para m vetores de desvio inicialmente no espaço tangente ao toro:

$$GALI_k(t) \propto \begin{cases} constante, \; se \; 2 \leq k \leq N \\ \\ \dfrac{1}{t^{2(k-N)-m}}, \; se \; N < k \leq 2N \; e \; 0 \leq m \leq k - N \\ \\ \dfrac{1}{t^{k-N}}, \; se \; N < k \leq 2N \; e \; m \geq k - N \end{cases} \quad \text{(C.46)}$$

onde $m \leq N$ e $m \leq k$.