

Fabrcia de Almeida Cortez Pereira

**BURACOS NEGROS SUPERMASSIVOS EM
FUSÃO CIRCUNDADOS POR DISCOS DE
GÁS: TAXAS DE ACREÇÃO E TAXAS DE
EVENTOS DE ONDAS GRAVITACIONAIS**

Brasil
2019

Fabrcia de Almeida Cortez Pereira

**BURACOS NEGROS SUPERMASSIVOS EM FUSÃO
CIRCUNDADOS POR DISCOS DE GÁS: TAXAS DE
ACREÇÃO E TAXAS DE EVENTOS DE ONDAS
GRAVITACIONAIS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física e Astronomia, como complementação dos créditos necessários para a obtenção do título de Doutora em Física e Astronomia.

Universidade do Vale do Paraíba - UNIVAP
Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento - IP&D
Programa de Pós-Graduação em Física e Astronomia

Orientador: Prof. Dr. Irapuan Rodrigues de Oliveira Filho

Brasil
2019

A meus pais e a minha avó, in Memoriam.

Agradecimentos

Agradeço ao Dr. Irapuan Rodrigues, pela orientação, mas acima de tudo pela amizade, compreensão, conselhos e todo ensinamento ao longo desses quatro anos.

Ao Dr. Márcio Alves, que contribuiu diretamente com este trabalho, sempre dando dicas e conselhos muito preciosos, tornando esta caminhada mais leve.

Ao Dr. Giuseppe Lodato, pela colaboração, ensinamento e por ter me permitido fazer parte da sua equipe durante o estágio de doutorado-sanduíche em Milão, na Itália. Certamente, este período foi uma das experiências mais enriquecedoras na minha vida.

Ao Dr. Daniel Price, pela colaboração e dicas valiosas na concretização deste trabalho e durante o desenvolvimento do artigo.

A todos os professores da Univap que me receberam tão bem e que contribuíram para meu conhecimento em Astrofísica.

Ao meu marido, Germano Jr., pela compreensão, companheirismo, dedicação e imensa paciência, não apenas durante este período do doutorado, mas desde sempre. Sem dúvida, todo o apoio que recebi foi essencial para que eu tenha concretizado mais essa etapa da minha vida. Todas as palavras e agradecimentos que eu tecer jamais chegarão perto da minha gratidão e do meu amor.

Aos meus amigos da Univap, que tive um imenso prazer de conhecê-los. Os conselhos, risos e apoio tornaram meus dias muito mais felizes e suaves.

Aos meus pais, Francisco e Diomeze, e a minha avó, Rosa Maria, *in Memoriam*, que partiram tão precocemente e deixaram tanta saudade, mas ao mesmo tempo deixaram ensinamentos extremamente valiosos. Sou imensamente grata a estes ensinamentos que me tornaram a pessoa que sou hoje.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

Resumo

Este trabalho investiga as taxas de acreção e a emissão das ondas gravitacionais produzidas quando um buraco negro supermassivo (BNSM) secundário espirala em direção a um primário, imersos em um disco gasoso circunprimário. Para este estudo, foram utilizadas simulações SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics*), executadas com o código 3D PHANTOM. Estendemos investigações anteriores de discos de acreção situados no mesmo plano de um sistema binário para o caso de sistemas discos-binárias desalinhados. Nossos modelos numéricos concentram-se em um disco geometricamente fino com ângulos de inclinação variando de 1 a 180 graus e uma binária supermassiva com razão de massa da ordem de $q = 10^{-3}$. Encontramos que discos gasosos com pequenas inclinações (< 10 graus) produziram um aumento em luminosidade excedendo o limite de Eddington. Por outro lado, discos com inclinações entre 20 e 30 graus mostraram picos menos pronunciados nas taxas de acreção de massa, enquanto discos com 180 graus não mostraram nenhum pico nas taxas de acreção, como previsto analiticamente por trabalhos anteriores. Com os resultados das estimativas das taxas de acreção, mostramos a possibilidade de contrapartidas eletromagnéticas precedendo o sinal das ondas gravitacionais emitido nos estágios finais do decaimento orbital da binária de buracos negros supermassivos. A assinatura eletromagnética pode ocorrer em menos de 8 dias antes da fusão final da binária. Motivados pelos resultados numéricos, estimamos as taxas de eventos observáveis por ano pelos detectores espaciais LISA e gLISA, assumindo um cenário astrofísico similar ao que foi simulado, com sistemas disco-binária em diferentes ângulos de inclinação. Encontramos taxas muito similares para ambos detectores. A taxa de detecção para sistemas desalinhados com pequenos ângulos (4, 5, 6 e 10 graus) podem chegar a $\sim 2 - 5$ eventos por ano com a possibilidade de uma assinatura eletromagnética nos últimos estágios da fusão. O desalinhamento entre o disco e a binária em 20 graus pode produzir $\sim 8 - 10$ eventos por ano, podendo haver um possível sinal eletromagnético (da ordem do limite de Eddington) de acordo com as simulações numéricas hidrodinâmicas realizadas previamente. Sistemas disco-binária altamente inclinados entre 45 a 135 graus podem produzir taxas de eventos de $\sim 23 - 29$ eventos por ano, no entanto, discos de acreção com estas inclinações podem quebrar ou romper antes da binária fundir e, portanto, não emitirão nenhum precursor eletromagnético. As estimativas obtidas neste trabalho prevêem um número otimista de eventos esperado para os detectores espaciais LISA/gLISA com sistemas inclinados em altos ângulos e a possibilidade de um cenário promissor para a primeira evidência de um link entre uma fusão de BNSMs e uma assinatura eletromagnética precursora para sistemas em pequenas inclinações. As missões LISA e gLISA podem contribuir significativamente para a astrofísica, discernindo os diferentes cenários evolucionários que levam para a formação dos BNSMs.

Palavras-chaves: Buracos Negros Supermassivos, Discos de Acreção, Simulações Numéricas, Ondas Gravitacionais

Abstract

This work investigates the accretion rates and the gravitational wave emission produced when a secondary supermassive black hole spirals toward a primary one, both embedded in a circumprimary gaseous disc. We use for this study SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) simulations performed with 3D PHANTOM code. We extend previous investigations of co-planar accretion discs to the case where the disc and binary orbital planes are misaligned. We consider a geometrically thin disc with inclination angles varying from 1 to 180 degrees and a binary with mass ratio $q=10^{-3}$. We find that discs with small inclination angles (< 10 degrees) produce an increase in luminosity exceeding the Eddington limit. By contrast, discs with inclinations between 20 and 30 degrees show a less pronounced rise in the accretion rate, whilst discs inclined by 180 degrees show no peak in the mass accretion rate, as predicted analytically by previous work. The results of estimate of the accretion rates showed the possibility of electromagnetic counterparts prior to the signal of gravitational waves emitted in the last stages of orbital decay of the supermassive black hole binary. The electromagnetic signature may occur about 8 days before the binary merger. Motivated by numerical results, we estimate the event rates per year expected by LISA and gLISA detectors, assuming an astrophysical scenario with disc-binary systems at different inclination angles. We find the event rates very similar for both detectors. The detection rate for misaligned disc and SMBH binary orbital planes at small angles (4, 5, 6 and 10 degrees) yield about $\sim 2 - 5 \text{ yr}^{-1}$ with the possibility of an electromagnetic signature in the last stages of merger. Misalignment between binaries and gaseous discs at 20 degrees produce roughly $\sim 8 - 10 \text{ yr}^{-1}$, with a possible detection of an electromagnetic signal according to previous hydrodynamics numerical simulations. While highly misaligned disc-binary systems between 45 to 135 degrees can provide rates of the order of $\sim 23 - 29 \text{ yr}^{-1}$, however discs with those inclinations may break or tear before the binary merger and may emit no electromagnetic precursor. The estimates obtained in this work predict the optimistic number of expected events at high inclinations for space-based detectors like LISA/gLISA and the possibility of a promising scenario to the first evidence of a linkage between a SMBH merger and an electromagnetic signal for systems at small inclinations. These missions may be able to contribute significantly to astrophysics, discerning the different evolutionary scenarios that lead to the formation of SMBHs.

Key-words: Supermassive Black Holes, Accretion Discs, Numerical Simulations, Gravitational Waves

Lista de figuras

- Figura 1 – Simulações mostram a fusão entre galáxias com BNSMs. As duas galáxias são semelhantes à Via Láctea e os BNSMs centrais possuem $2,6 \times 10^6 M_{\odot}$. Os quatro painéis à esquerda ilustram a evolução em larga escala em diferentes tempos. Durante a interação, as forças de maré rompem os discos galácticos e os núcleos gasosos finalmente colapsam cerca de $5,12 \times 10^9$ anos, formando um único disco nuclear com $3 \times 10^9 M_{\odot}$ e um tamanho de ~ 75 pc. O painel acima à direita está ampliado mostrando o estágio em um $t \sim 100 \times 10^6$ anos antes dos dois núcleos terem completamente coalescido e o painel do meio mostra 2×10^6 anos depois da fusão. Enquanto os painéis abaixo mostram a borda da galáxia remanescente (esquerda) e visto de cima o sistema binário formado pelos BNSMs (direita). 24
- Figura 2 – Escala de tempo como uma função do raio da evolução da separação de BNSMs em um processo de fusão de duas galáxias. O mecanismo de fricção dinâmica mantém a binária ligada. Quando a separação do sistema é suficientemente próxima ($< 10^{-3}$ pc), a perda de energia orbital e momento angular via emissão de ondas gravitacionais (OGs) leva para a rápida fusão, como mostrada pela linha azul. 25
- Figura 3 – Forma de onda completa do sinal de OGs de um par de buracos negros coalescendo como uma função do tempo. As diferentes técnicas de aproximações analíticas e numéricas e os intervalos de validade são indicados. A linha ondulada preta ilustra o regime próximo à fusão (*plunge*). Enquanto a linha ondulada cinza mostra a fase fusão (*merger*), que é descrita pela Relatividade Numérica (NR, *Numerical relativity*). 28
- Figura 4 – GW150914: O painel superior mostra as imagens de cada fase do processo de coalescência dos dois buracos negros e a amplitude da onda gravitacional alcançada durante cada estágio. O painel inferior apresenta a separação do buraco negro em unidades do raio de Schwarzschild ($R_S = 2GM/c^2$) e a velocidade relativa efetiva dada pelo parâmetro pós-Newtoniano $v/c = (GM\pi f/c^3)^{1/3}$, onde M é a massa total do sistema e f é a frequência da onda gravitacional calculada com a relatividade geral. 30

Figura 5 – Curvas de sensibilidade S_h para as diferentes técnicas usadas na detecção de ondas gravitacionais em função da frequência f da radiação emitida pelos diversos tipos de massa dos buracos negros. Sendo BNE e BNMI, os buracos negros de massa estelar e de massa intermediária, respectivamente.	32
Figura 6 – Representação esquemática de um disco de gás fino.	35
Figura 7 – Representação esquemática da interação gravitacional entre uma partícula de gás de massa m_p e um objeto secundário com massa M_s	49
Figura 8 – Sistema xy centrado em M_p com o buraco negro secundário representado por M_s a uma distância a da origem, com posição angular $\theta = \theta(t)$. Enquanto, o sistema xy' está centrado no centro de massa do sistema binário.	56
Figura 9 – Diagrama das linhas de força no plano transversal. Polarização <i>plus</i> (à esquerda) e polarização <i>cross</i> (à direita).	67
Figura 10 – Um anel de partículas no plano transversal de uma onda gravitacional passando. À esquerda, o efeito causado pela passagem da onda gravitacional com polarização <i>plus</i> . À direita, o efeito causado por uma onda gravitacional com polarização <i>cross</i> . A polarização <i>cross</i> difere de uma rotação de 45 graus com relação à polarização <i>plus</i>	68
Figura 11 – Diferentes abordagens para a estimativa da densidade de uma distribuição de massas pontuais.	79
Figura 12 – Taxas de acreção das componentes primária e secundária em uma simulação em alta resolução. Foram utilizadas 2×10^6 partículas. Os picos marcam episódios de intensa e repentina acreção. O eixo horizontal superior mostra o tempo dado em dias para $M_p = 10^8 M_\odot$ e o eixo horizontal inferior apresenta o tempo em unidades do código. As taxas de acreção \dot{M} são normalizadas com a massa do disco.	97
Figura 13 – Snapshot da densidade de coluna com as condições iniciais de uma simulação com 5×10^5 partículas e disco inclinado a 5 graus em um $t = 0$. Os BNSMs são indicados pelos círculos pretos e seus respectivos tamanhos são proporcionais aos raios de acreção primário e secundário.	100
Figura 14 – Taxas de acreção dos buracos negros primário e secundário, normalizadas pela massa do disco inicial M_{disco} como função do tempo de fusão. Os ângulos de inclinação do disco circunprimário com relação ao plano da binária foram $\theta = 1^\circ$ (esquerda) e $\theta = 5^\circ$ (direita). Ambas as simulações usaram um número total de 5×10^5 partículas.	101

Figura 15	– Taxas de acreção dos buracos negros secundários com discos desalinhados à 1 (linha preta) e a 5 (linha vermelha) graus.	101
Figura 16	– Massa acretada pelos buracos negros secundários com discos desalinhados a 1 grau (linha preta) e 5 graus (linha vermelha).	102
Figura 17	– Taxas de acreção para os buracos negros primário desalinhados com o disco circumprimário. Todos os ângulos usados nas simulações com 5×10^5 partículas foram mostrados neste gráfico. A linha horizontal preta representa o limite de Eddington. Os picos duplos mostrados nos estágios finais da evolução são ocasionados devido ao mecanismo " <i>snowplough</i> desalinhado".	104
Figura 18	– Taxas de acreção para os buracos negros secundários desalinhados com o disco circumprimário. Todos os ângulos usados nas simulações com 5×10^5 partículas foram mostrados neste gráfico. A linha horizontal preta representa o limite de Eddington. Os picos duplos mostrados nos tempos iniciais para ângulos de 1 e 5 graus são ocasionados devido ao fenômeno <i>squeezing</i>	105
Figura 19	– Residual entre as taxas de acreção do BNSM primário com e sem o secundário.	106
Figura 20	– <i>Snapshots</i> da densidade de coluna (em escala logarítmica) usando simulações com $N_{part} = 5 \times 10^5$. Cada linha indica a evolução de um sistema disco-binária desalindado à 1, 5, 10, 20 e 30 graus, respectivamente. O segundo e o quarto painéis (em cada fileira) correspondem aos dois tempos em que ocorrem os maiores picos nas taxas de acreção do buraco negro primário. Os BNSMs são representados por círculos com tamanhos correspondendo aos raios de acreção das componentes primária ($R_{acc,p} = 2$) e secundária ($R_{acc,s} = 0, 2$). O tempo de evolução do sistema (em unidades do código) é mostrado no canto superior direito. A unidade do código adotada para o comprimento é o raio gravitacional $R_g = GM_p/c^2$, onde $M_p = 10^8 M_\odot$ é a massa do buraco negro primário.	107
Figura 21	– Taxas de acreção de massa dos buracos negros primário (linha preta) e secundário (linha vermelha) com um disco circumprimário inclinado à 180 graus. A linha horizontal preta representa o limite de Eddington.	108
Figura 22	– <i>Snapshots</i> da densidade de coluna (em escala logarítmica) usando simulações com $N_{part} = 5 \times 10^5$. A figura indica a evolução de um disco circumprimário inclinado à 180 graus. A unidade do código assumida para o comprimento é o raio gravitacional do buraco negro primário $R_g = GM_p/c^2$	108

Figura 23	–Taxas de acreção para o primário e secundário como função do tempo (em unidades do código) para um disco espesso com $H/R = 0,05$, inclinado a 1 grau.	109
Figura 24	–Taxas de acreção para o primário e secundário como função do tempo (em unidades do código) para um disco espesso com $H/R = 0,05$, inclinado a 5 graus.	109
Figura 25	–Órbitas <i>horseshoe</i> , com as setas indicando as velocidades das partículas no sistema de referência co-rotacionando com o buraco negro secundário.	110
Figura 26	–Taxa de evento total esperada por ano para a banda de frequência LISA.	115
Figura 27	–Taxa de evento total por ano para a banda de frequência do detector gLISA.	116
Figura 28	–Sensibilidade como uma função da frequência para os detectores LISA e gLISA, com as faixas de massa promissoras para cada intervalo de frequência <i>ringdown</i>	116
Figura 29	–Snapshots da densidade de coluna em escala logarítmica. O disco apresenta um ângulo de 45 graus com relação ao spin ($a = 0,5$) do BNSM. O tempo em unidades do código é mostrado no canto superior direito. Na imagem à esquerda, vemos em um tempo $t = 15GM_{bn}/c$ a formação do warp no disco e na imagem à direita em $t = 65GM_{bn}/c^3$ observamos os vários anéis se formando devido à alta inclinação.	123
Figura 30	–Calibração da viscosidade do disco no código PHANTOM, comparando o valor de entrada do parâmetro α de Shakura-Sunyaev da equação (4.98) (eixo x) com a taxa de difusão medida da densidade de superfície ajustando ao código 1D (eixo y). Os triângulos indicam simulações com a viscosidade do disco calculada usando a viscosidade artificial, enquanto os quadrados representam as simulações usando a viscosidade física. As simulações representadas pelos triângulos verde, ciano e vermelho usam 20 milhões de partículas.	131
Figura 31	–A taxa de difusão warp como uma função da viscosidade do disco, mostrando resultados do PHANTOM comparados à teoria não-linear de Ogilvie (1999). A previsão linear $\alpha_2 = 1/(2\alpha)$ é mostrada pela linha sólida.	132

Lista de tabelas

Tabela 1	– Parâmetros iniciais descritos em unidades do código, unidades físicas e unidades astronômicas.	99
Tabela 2	– Taxas de acreção do buraco negro primário nos tempos do primeiro pico (t_1) e do segundo pico (t_2) em unidades do código.	102
Tabela 3	– Comparação entre as taxas de acreção do buraco negro primário durante o primeiro pico (t_1) e o segundo pico (t_2) em unidades da M_\odot/yr e da taxa de Eddington.	103
Tabela 4	– Taxas de evento esperadas para os detectores espaciais. A primeira coluna mostra o parâmetro spin, a segunda coluna mostra a inclinação entre os planos orbitais do disco e da binária, a terceira mostra a probabilidade de discos inclinados, as quarta e quinta colunas mostram o número de eventos esperado por ano para o LISA e gLISA, respectivamente, e a sexta coluna mostra a possibilidade de um precursor eletromagnético. Para ambos os detectores, usamos $\epsilon = 0,01$ e $\text{SNR}=10$	117

Lista de abreviaturas e siglas

BNSM	Buraco Negro Supermassivo
LIGO	<i>Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory</i>
GW	<i>Gravitational Wave</i>
LISA	<i>Laser Interferometer Space Antenna</i>
gLISA	<i>geostationary Laser Interferometer Space Antenna</i>
ISCO	<i>Innermost Stable Circular Orbit</i>
SPH	<i>Smoothed Particle Hydrodynamics</i>
AGN	<i>Active Galactic Nuclei</i>
PN	Pós-Newtoniana
EOB	<i>Effective-One-Body</i>
PTA	<i>Pulsar Timing Array</i>
OLR	<i>Outer Lindblad Resonance</i>
ILR	<i>Inner Lindblad Resonance</i>
SNR	<i>Signal-to-Noise Ratio</i>

Lista de símbolos

R_S	Raio de Schwarzschild
R_{ISCO}	Raio ISCO (Órbita Circular Estável Mais Interna)
R_{infl}	Raio de Influência
r_c	Raio do Núcleo Estelar
a_{fric}	Separação Dominada pela Fricção Dinâmica
a_0	Separação Inicial da Binária
$R_{acc,p}$	Raio de Acreção do BNSM Primário
$R_{acc,s}$	Raio de Acreção do BNSM Secundário
R_{ext}	Raio Externo do Disco
M_{bn}	Massa do Buraco Negro
M_{\odot}	Massa Solar
M_{bojo}	Massa do Bojo da Galáxia
M_p	Massa do BNSM Primário
M_s	Massa do BNSM Secundário
M_d	Massa do Disco
m_{\star}	Massa Estelar
\mathbf{v}_{bn}	Velocidade do Buraco Negro
\mathbf{v}_{\star}	Velocidade Estelar
t_{fric}	Tempo de Fricção Dinâmica
t_{dec}	Tempo de Decaimento
t_{enc}	Tempo de Encolhimento
t_{ν}	Tempo Viscoso
α_{SS}	Parâmetro de Viscosidade Shakura-Sunyaev
b	Parâmetro de impacto

f_r	Frequência Ringdown da Onda Gravitacional
ρ	Densidade
E	Energia
Q	Fator de Qualidade
M	Massa Total da Binária
f_{ISCO}	Frequência Emitida na ISCO
μ	Massa Reduzida da Binária
f_f	Frequência Emitida da Fase Fusão da Binária
f_{BN}	Frequência Emitida pelo Buraco Negro

Sumário

Introdução	17
1 Buracos Negros	22
1.1 Aspectos Gerais sobre os Buracos Negros	22
1.2 Coalescência de Buracos Negros em Sistemas Binários	23
1.2.1 Fricção Dinâmica	24
1.2.2 Interação do Sistema Binário com Ambientes Estelares e Gasosos	26
1.2.3 Emissão de Ondas Gravitacionais	27
1.2.4 Sistemas Disco-Binária Desalinhados	31
2 Discos de Acreção	34
2.1 Teoria Clássica de Discos de Acreção	34
2.1.1 Aproximação de Discos Finos	34
2.1.2 Estrutura e Evolução de Discos de Acreção	35
2.1.2.1 Equilíbrio Radial	37
2.1.2.2 Estrutura Vertical	38
2.1.2.3 Conservação de momento angular	39
2.1.2.4 Soluções de Estado Estável	40
2.1.3 Discos de Acreção Energéticos	41
2.1.4 Viscosidade	42
2.1.5 Modelo Padrão de Shakura-Sunyaev	45
2.2 Discos de Acreção Circundando Sistemas Binários	47
2.2.1 Torques de Maré	48
2.2.1.1 Aproximação Impulsiva	48
2.2.1.2 Resonâncias Lindblad e de Corrotação	50
2.2.2 Migração do Buraco Negro Secundário no Disco	51
2.2.2.1 Evolução do Acoplamento Entre o Disco e a Binária	52
2.2.3 Decaimento Gravitacional de um Sistema Binário	54
2.2.3.1 Migração via Emissão de Ondas Gravitacionais	54
2.2.3.2 Raio de Desacoplamento	57
3 Ondas Gravitacionais	59
3.1 Descrição das Ondas Gravitacionais	59
3.1.1 Equação de Onda	59
3.1.2 Equações de Einstein Linearizadas no Vácuo	61
3.2 Propriedades Físicas das Ondas Gravitacionais	65
3.2.1 Energia Transportada por uma Onda Gravitacional	68

3.3	Produção de Ondas Gravitacionais	70
3.3.1	Luminosidade das Ondas Gravitacionais	72
3.3.2	Momento Angular Carregado pelas Ondas Gravitacionais	73
3.4	Sistema Binário Orbitando	74
3.4.1	Tempo de Coalescência	75
4	Código e Modelagem Numérica	77
4.1	Código PHANTOM	77
4.1.1	Código baseado no método SPH	77
4.1.1.1	Teoria de Interpolação de Kernel	77
4.1.2	Estimador da Densidade em SPH	78
4.1.3	A Variação do Parâmetro h	80
4.1.4	Derivadas na Teoria de Interpolação	81
4.1.4.1	Derivada Primeira	81
4.1.4.2	Derivada Segunda	83
4.2	Equações SPH	83
4.2.1	Equações de Movimento	83
4.2.2	Propriedades de Conservação	86
4.2.3	Termodinâmica	87
4.3	Viscosidade em SPH	88
4.3.1	Termos da Viscosidade Artificial e Dissipação <i>Switches</i>	88
4.3.2	Viscosidade Física do Disco Assumindo a Viscosidade Artificial	91
4.4	Subrotina do Decaimento Gravitacional no Código PHANTOM	93
5	Simulações Numéricas e Estimativa das Taxas de Eventos	96
5.1	Modelagem Numérica	96
5.1.1	Condições Iniciais	98
5.1.2	Disco Circumprimário Inclinado em Ângulos de 1 e 5 graus	100
5.1.3	Disco Circumprimário Inclinado em Ângulos de 10, 20 e 30 graus	103
5.1.4	Disco Circumprimário em Contra-Rotação	106
5.1.5	Discos de Acreção Espessos	106
5.1.6	Contrapartidas Eletromagnéticas da Fusão de Binárias de BNSMs	108
5.2	Taxas de Evento Esperadas	111
5.2.1	Cenário Astrofísico	111
5.2.1.1	Formação das Binárias de BNSMs	111
5.2.1.2	Formação dos Discos de Acreção Inclinação	112
5.2.2	Estimando as Taxas de Eventos	113
5.2.3	Número de Eventos e Probabilidade de Discos Inclinação	115

Considerações Finais	119
Referências	124
Apêndice	130

Introdução

O modelo de formação hierárquico sugere que as galáxias podem ter sido formadas por fusões subsequentes de galáxias menores e que, hoje, cada galáxia abriga pelo menos um buraco negro supermassivo (BNSM) em seu núcleo (REINES et al., 2014). Durante uma fusão de galáxias, as estrelas que as compõem experimentam as forças de maré que tornam-se mais intensas à medida que as duas galáxias se aproximam. A interação entre os buracos negros centrais e o meio estelar oferece diversos mecanismos físicos que levam ao processo de coalescência do par de objetos compactos.

Os principais mecanismos acreditados para a evolução de um par de BNSMs são: fricção dinâmica, interação entre a binária e as estrelas e o gás, e a emissão de ondas gravitacionais. O papel da fricção dinâmica nos BNSMs nos centros galácticos é de aproximá-los até que eles formem um sistema binário ligado. Depois que a binária é formada, a própria fricção dinâmica começa a atuar no decaimento da órbita, levando à perda de energia e de momento angular por meio das interações gravitacionais com a matéria circundante (MAYER et al., 2007).

No entanto, a evolução da binária até a fusão pode ser interrompida pela falta de estrelas em órbitas que cruzam os buracos negros. Esse tipo de fenômeno é conhecido como *loss-cone depletion*. Não havendo qualquer outro mecanismo físico eficaz, o fenômeno *loss-cone depletion* causa um aumento no tempo de decaimento da binária, fazendo com que o sistema não evolua a separações menores que 1 pc. A dificuldade dos sistemas em alcançar separações da ordem de sub-parsec devido à redução de estrelas com órbitas cruzando os buracos negros é chamado “problema do parsec final” (LODATO et al., 2009).

Algumas evidências observacionais têm mostrado um déficit de massa no núcleo de galáxias elípticas. Uma possível explicação para esse fenômeno é que a massa tenha sido expelida por meio da interação da binária evoluindo em ambientes gasosos. Um sistema binário imerso em gás pode ter sua formação e evolução aceleradas até mesmo superando a barreira do parsec final. Fusões de galáxias ricas em gás por meio dos torques gravitacionais, dirigem uma imensa quantidade de gás ao núcleo da galáxia remanescente, onde hospeda a binária de BNSMs. Quando esse gás esfria, ele se estabelece em um disco fino circundando o par de buracos negros ligados. A princípio, o disco de acreção tem uma orientação arbitrária com relação ao plano orbital do sistema binário (HAYASAKI; SAITO; MINESHIGE, 2013).

O disco de acreção exerce torques de maré nos dois BNSMs, forçando o decaimento do semi-eixo maior da sua órbita e a perda de energia e momento angular do sistema para o gás externo. Se o gás é eficiente para manter ligado o par de buracos negros em separações da ordem de sub-parsec, quando o torque gravitacional for maior que o torque

de maré exercido pelo disco de gás, a binária mantém-se ligada devido à emissão de ondas gravitacionais até a fusão final. A separação crítica, que delimita a fronteira entre esses dois regimes, é conhecida como raio de desacoplamento.

Quando a emissão das ondas gravitacionais torna-se um mecanismo dominante para o decaimento orbital da binária, a evolução do sistema passa pelo processo de coalescência, que compreende três fases: espiralação (*inspiral*), fusão e *ringdown*. A primeira fase do processo de coalescência é estudada por meio da aproximação pós-Newtoniana, que permite uma descrição da evolução dinâmica do sistema. Em geral, a maior parte do tempo da evolução dos buracos negros se concentra neste estágio. No entanto, à medida que o sistema vai perdendo energia via emissão de ondas gravitacionais, esses buracos negros vão se aproximando, entrando em um regime chamado *plunge*, em que o toque dos dois horizontes de eventos produz uma instabilidade dinâmica até começar a fusão. As ondas gravitacionais emitidas nesta fase carregam informações sobre todo o processo altamente dinâmico. A fase *ringdown* é o produto final da fusão do sistema, que é um buraco negro altamente perturbado produzindo oscilações dominadas pelos modos quase-normais de vibração (OHME, 2012).

Muitos esforços teóricos, experimentais e computacionais têm sido feitos para estudar cada mecanismo físico envolvido na evolução dos buracos negros. Essas fontes astrofísicas estão relacionadas tanto com as assinaturas observacionais deixadas nas galáxias e nos discos de acreção, quanto com a radiação gravitacional, que se tornou uma nova “janela” de observação para a Astronomia.

Alguns trabalhos têm investigado possíveis contrapartidas eletromagnéticas dos BNSMs binários a fim de confirmar as eventuais fusões e a física da acreção. Armitage e Natarajan (2002) foram os primeiros a estudar os BNSMs binários usando um modelo 1D. Em seus resultados, foram encontrados flares super-Eddington na luminosidade da binária causada pela rápida acreção no disco interno. Uma década após, Baruteau, Ramirez-Ruiz e Masset (2012a) usaram simulações 2D e sugeriram que o gás no disco interno poderia fluir através de um *gap* da componente secundária da binária por meio de órbitas do tipo *horseshoe* voltando para o disco externo, eliminando a possibilidade do aumento na luminosidade de acreção. Por sua vez, Cerioli, Lodato e Price (2016) usaram simulações 3D para mostrar as taxas de acreção durante a fusão de BNSMs imersos em discos de gás, dirigidos pelas ondas gravitacionais. Os autores apresentaram evidências do fenômeno *squeezing*, causado pela compressão do gás no disco interno, quando a componente secundária espirala em direção à componente primária, causando um aumento nas taxas de acreção que excedem a taxa de Eddington. Todas as abordagens feitas por Armitage e Natarajan (2002), Baruteau, Ramirez-Ruiz e Masset (2012b), Cerioli, Lodato e Price (2016) assumem que os planos orbitais do disco e da binária são alinhados.

O aumento nas taxas de acreção próximo à fusão da binária leva a um aumento na luminosidade, tornando-se um possível precursor eletromagnético prévio ao *burst* da

radiação gravitacional emitido pelo processo de coalescência. A modelagem teórica das possíveis assinaturas eletromagnéticas tem sido justificada para ajudar a encontrar uma conexão entre sinais da radiação eletromagnética e a detecção das ondas gravitacionais.

Um dos trabalhos mais importantes de uma observação indireta da existência das ondas gravitacionais foi feito por [Hulse e Taylor \(1975\)](#), no qual apresentaram a descoberta de um pulsar em um sistema binário, cujo monitoramento desse sistema indicou o decaimento do período orbital, como previsto pela Relatividade Geral. Embora experimentos para a detecção da radiação gravitacional tenham surgido na década de 1960, com um trabalho pioneiro desenvolvido por Joseph Weber, nenhuma detecção direta tinha acontecido até então. A detecção inédita das ondas gravitacionais aconteceu em setembro de 2015 pelos detectores LIGO (*Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory*) e foi anunciada em fevereiro de 2016, cem anos após a sua previsão teórica.

As primeiras detecções diretas (conhecidas como os eventos GW150914 e GW151226) foram provenientes de buracos negros de massas estelares durante o processo de coalescência e foram observadas pelos dois observatórios LIGO, localizados nos EUA ([ABBOTT et al., 2016a](#); [ABBOTT et al., 2016b](#)). Uma das detecções diretas das ondas gravitacionais foi um marco para as contrapartidas eletromagnéticas. Essa detecção aconteceu em agosto de 2017 e foi observada tanto pelos detectores LIGO quanto pelo observatório VIRGO, que fica localizado na Itália. Além disso, foi a primeira observação desses detectores de um sistema binário de estrelas de nêutrons e fornece a primeira evidência direta de uma ligação entre estas fusões e *bursts* de raios- γ curtos ([ABBOTT et al., 2017](#)).

Com as detecções diretas da radiação gravitacional proveniente dos buracos negros de massas estelares e eventuais assinaturas eletromagnéticas, outras faixas de massa dos buracos negros têm sido bastante estudadas, como é o caso dos BNSMs. No entanto, não existe na atualidade detectores de ondas gravitacionais capazes de observar buracos negros com massas tão altas ($> 10^6 M_{\odot}$). Para esses tipos de observações serão necessários detectores lançados no espaço, com uma alta sensibilidade, podendo alcançar frequências muito baixas (da ordem de $\approx 10^{-3}$ Hz). Embora já existam vários projetos de detectores espaciais, ainda teremos que esperar um longo tempo pelo seu lançamento. Um dos projetos mais promissores que temos atualmente é o LISA (*Laser Interferometer Space Antenna*) ([AMARO-SEOANE et al., 2012](#)). No entanto, projetos com conceitos alternativos também estão sendo incorporados aos futuros interferômetros espaciais, como é o caso do gLISA (*geostationary Laser Interferometer Space Antenna*) ([TINTO et al., 2013](#); [TINTO et al., 2015](#); [TINTO; ARAÚJO, 2016](#)). Este projeto é um conceito de missão geostacionária complementar à missão LISA, pois pretende atuar em uma banda de frequência intermediária entre LISA e LIGO.

Nesse contexto, este trabalho busca contribuir de forma significativa tanto na identificação das possíveis contrapartidas eletromagnéticas, quanto para as futuras detecções das ondas gravitacionais de BNSMs em sistemas binários. Desse modo, os objetivos deste

trabalho são: i) estimar as taxas de acreção de binárias de BNSMs circundadas por discos de gás inclinados, explorando diferentes ângulos de inclinação; ii) estimar a taxa de eventos esperada para os detectores espaciais (LISA e gLISA), em um cenário onde os BNSMs emitam ondas gravitacionais durante sua coalescência, imersos em discos de acreção viscosos com diferentes inclinações.

Para atingir esses objetivos, dividimos nosso trabalho em duas partes:

- A primeira parte consistiu na realização da modelagem numérica, usando o código 3D PHANTOM, para estimar as taxas de acreção de um disco de gás inclinado com relação ao plano orbital da binária. Adotamos diferentes ângulos de inclinação (1, 5, 10, 20, 30 e 180 graus) para um disco de acreção circunprimário. A escolha sobre discos inclinados surgiu a partir dos trabalhos anteriores de [Armitage e Natarajan \(2002\)](#), [Baruteau, Ramirez-Ruiz e Masset \(2012a\)](#) e [Cerioli, Lodato e Price \(2016\)](#), que modelaram apenas sistemas disco-binária coplanares. Os resultados encontrados mostraram que discos com pequenos ângulos de inclinação (≤ 10 graus) ainda produzem um aumento em luminosidade excedendo a taxa de Eddington, em menos de 8 dias antes da fusão dos BNSMs. Por outro lado, discos com inclinações de 20 e 30 graus mostraram picos menos pronunciados nas taxas de acreção e ângulos de 180 graus não apresentaram nenhum pico. Enquanto o trabalho analítico de [Lubow, Martin e Nixon \(2015\)](#) previu que a ineficiência dos torques de maré cai rapidamente com o aumento do ângulo de inclinação, nós mostramos que o efeito chamado “snowplough desalinado” permanece importante mesmo para ângulos maiores que a razão de aspecto do disco H/R (sendo H a espessura e R o raio do disco). Este resultado serviu de base para dois artigos, o primeiro ([PEREIRA et al., 2019a](#)) publicado na MNRAS (*Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*) e o segundo artigo ([PEREIRA et al., 2019b](#)) publicado na *Astronomische Nachrichten*.
- A segunda parte desta tese tem o intuito de estimar a taxa de coalescência esperada pelos detectores LISA/gLISA com a possibilidade de uma assinatura eletromagnética antecendo um *burst* de ondas gravitacionais. Nesta etapa do trabalho, assumimos que os BNSMs são formados de sementes primordiais e que crescem devido à acreção de matéria e múltiplos eventos de fusão, seguindo simulações cosmológicas realizadas por [Filloux et al. \(2010\)](#). No entanto, consideramos que estes BNSMs são circundados por discos de acreção e que esses sistemas (disco-binária) são desalinados devido ao efeito Lense-Thirring ([LENSE; THIRRING, 1918](#); [BARDEEN; PETERSON, 1975](#)). Assumimos que a origem dos discos inclinados aconteceu a partir da acreção de gás aleatoriamente orientada, proveniente de nuvens de gás. Para o cálculo das taxas de eventos, inicialmente, fizemos uma estimativa da probabilidade de formação de discos de acreção com diferentes ângulos de inclinação,

encontrando que a chance de discos formarem com até 6 graus é da ordem de 10%, enquanto inclinações em 10 e 20 graus podem variar de 17% a 34%, respectivamente. Com essas estimativas prévias, os resultados para a taxa de fusão esperada em sistemas desalinhados em 4, 5, 6 e 10 graus foram de 2 – 5 eventos por ano, enquanto sistemas inclinados a 20 graus podem produzir até 10 eventos por ano e sistemas altamente inclinados > 45 graus podem ser esperados até 28 eventos por ano. Dessa forma, esse cenário pode fornecer a primeira evidência de uma conexão entre uma fusão de binária de BNSMs e uma possível contrapartida eletromagnética para sistemas inclinados a pequenos ângulos. Os resultados desta parte do trabalho servirão de base para um artigo que será submetido em breve.

Os seguintes capítulos apresentam o desenvolvimento desta tese e foram divididos da seguinte maneira: no Capítulo 1 apresentaremos os aspectos teóricos e observacionais da astrofísica de BNSMs isolados e em sistemas binários; no Capítulo 2 mostraremos os principais aspectos da física de acreção, descrevendo as propriedades dos discos de acreção e da interação disco-binária; no Capítulo 3 descreveremos as principais propriedades físicas das ondas gravitacionais e aplicaremos estas propriedades a sistemas binários em órbita; no Capítulo 4 apresentaremos o código 3D PHANTOM adotado neste trabalho e descreveremos a teoria do método SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics*); no Capítulo 5 apresentaremos os resultados numéricos obtidos com o uso do código SPH PHANTOM, trabalho realizado durante o estágio de doutorado-sanduiche na Universidade de Milão, sob a supervisão do Prof. Dr. Giuseppe Lodato, bem como as estimativas das taxas de eventos para os detectores LISA/gLISA; por fim, no último Capítulo apresentaremos nossas considerações finais e as perspectivas futuras.

1 Buracos Negros

Neste capítulo são apresentados os aspectos teóricos e observacionais da astrofísica de buracos negros supermassivos (BNSMs) isolados e em sistemas binários. Destacaremos os principais mecanismos físicos que levam ao processo de coalescência de um par de buracos negros e a influência dos parâmetros massa e spin na evolução e estrutura dos discos de acreção.

1.1 Aspectos Gerais sobre os Buracos Negros

De acordo com a Relatividade Geral, um buraco negro é definido como uma singularidade da métrica do espaço-tempo. Da evolução estelar, sabemos que buracos negros se formam quando a matéria colapsa, produzindo uma singularidade de curvatura e densidade infinitas. Do ponto de vista matemático, os buracos negros são objetos astrofísicos muito simples, já que são descritos por três parâmetros: massa, spin e carga¹. Quando é considerado apenas o parâmetro massa de um buraco negro com simetria esférica e sem rotação, a solução de Schwarzschild o descreve de forma satisfatória. Um buraco negro possui uma região limite chamada horizonte de eventos, na qual a velocidade de escape é igual à velocidade da luz. O horizonte de eventos de um buraco negro de Schwarzschild está localizado no raio:

$$R_S = \frac{2GM_{bn}}{c^2}, \quad (1.1)$$

sendo R_S o raio de Schwarzschild, M_{bn} a massa do buraco negro, G a constante de gravitação universal e c a velocidade da luz. Um buraco negro de Schwarzschild pode possuir partículas teste orbitando em torno dele, nesse caso a chamada órbita circular estável mais interna ISCO (*Innermost Stable Circular Orbit*) está localizada no raio:

$$R_{ISCO} = 3R_S = 6\frac{GM_{bn}}{c^2}. \quad (1.2)$$

No caso de buracos negros com rotação, a métrica de Kerr descreve a geometria do espaço-tempo próximo dessa massa axissimétrica. O horizonte de eventos de um buraco negro de Kerr está localizado na posição:

$$R_{kerr} = \frac{G}{c^2} [M_{bn} + \sqrt{M_{bn}^2 - (aM_{bn})^2}], \quad (1.3)$$

onde a é o momento angular adimensional e é sempre menor ou igual a um.

¹ Cabe ressaltar que, neste trabalho não trataremos de buracos negros com cargas, já que eles poderiam ser rapidamente neutralizados pelo gás ionizado circundante. Abordaremos apenas o parâmetro massa e falaremos brevemente sobre a evolução do spin e sua implicação em discos de acreção.

Para raios grandes, onde a condição $R \gg R_S$ é assumida, o potencial do buraco negro é aproximado de um potencial Newtoniano. A influência gravitacional do buraco negro nas estrelas que o circundam pode ser definida por meio do raio de influência:

$$R_{infl} = \frac{GM_{bn}}{\sigma^2} \simeq 10,8 \left(\frac{M_{bn}}{10^8 M_\odot} \right) \left(\frac{\sigma}{200 \text{kms}^{-1}} \right)^{-2} \text{ pc}, \quad (1.4)$$

esse raio é obtido por meio do potencial gravitacional do buraco negro com a energia cinética média das estrelas, movimentando-se com uma dispersão de velocidades σ .

Acredita-se que a acreção de matéria nos BNSMs é o mecanismo responsável pela geração dos objetos mais energéticos do Universo: os AGNs (*Active Galactic Nuclei*) e quasares. Existe uma forte correlação entre a formação e evolução de BNSMs e suas galáxias hospedeiras, que ligam a massa do objeto central com a dinâmica da galáxia (mais especificamente com a dispersão de velocidades das estrelas). Essa correlação é definida por (FERRARESE; MERRITT, 2000):

$$M_{bn} \propto \sigma^\alpha, \quad (1.5)$$

sendo $\alpha \approx 4$. Outra forte relação é entre a massa do buraco negro e a massa do bojo da galáxia (ou, luminosidade do bojo):

$$M_{bn} \simeq 1,4 \times 10^{-3} M_{bojo}. \quad (1.6)$$

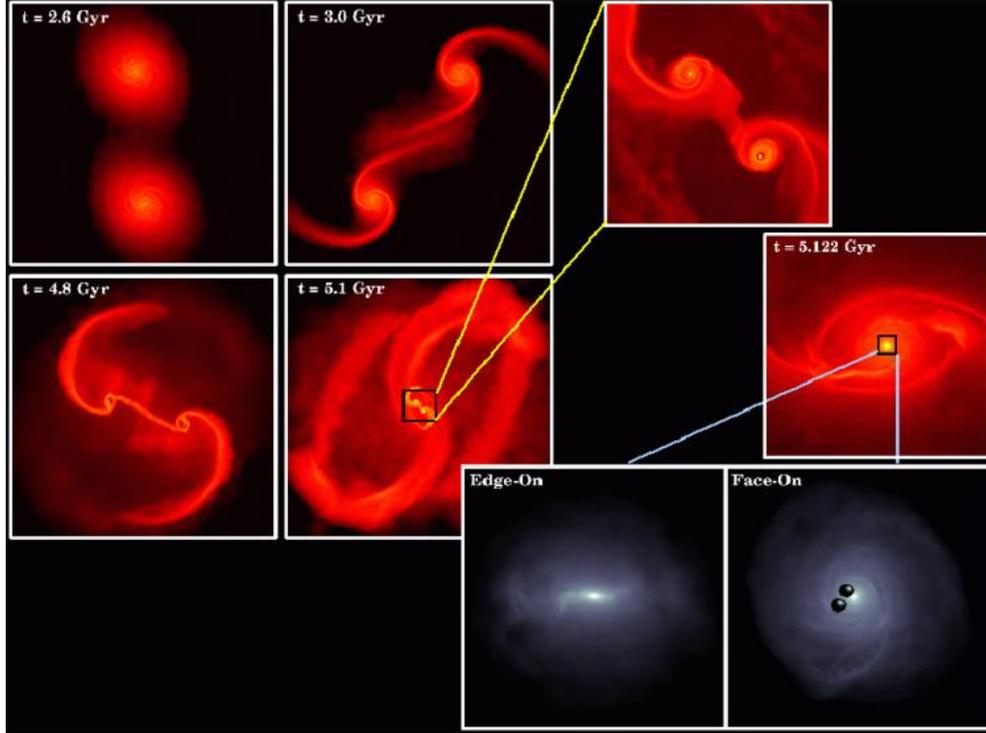
Muitos trabalhos sugerem essas correlações por meio de simulações numéricas. Pacheco (2010) e Filloux et al. (2010) mostraram que sucessivas coalescências após a fusão de galáxias levam à subsequente formação de um BNSM, ou ainda de um sistema binário de BNSMs (MAYER et al., 2007). No processo de fusão do par de galáxias, há uma grande quantidade de gás sujeito à instabilidade dinâmica, que pode ocasionar, entre outros fatores, um acréscimo na massa do buraco negro (SESANA, 2013).

1.2 Coalescência de Buracos Negros em Sistemas Binários

O modelo hierárquico de formação sugere que as galáxias podem ter sido formadas por fusões subsequentes de galáxias menores, e que hoje cada galáxia abriga pelo menos um BNSM em seu centro. De acordo com alguns resultados numéricos, um sistema binário formado por um par de BNSMs pode resultar da fusão galáctica (MAYER et al., 2007), como mostrado na Figura 1.

A interação entre o ambiente (estelar e gasoso) e os buracos negros sugere diversos mecanismos físicos que levam ao processo de coalescência da binária. Os principais mecanismos acreditados para a evolução de um par de BNSMs são: fricção dinâmica, interação entre a binária e as estrelas (e gás) e a emissão de ondas gravitacionais (ver Figura 2).

Figura 1 Simulações mostram a fusão entre galáxias com BNSMs. As duas galáxias são semelhantes à Via Láctea e os BNSMs centrais possuem $2,6 \times 10^6 M_\odot$. Os quatro painéis à esquerda ilustram a evolução em larga escala em diferentes tempos. Durante a interação, as forças de maré rompem os discos galácticos e os núcleos gasosos finalmente colapsam cerca de $5,12 \times 10^9$ anos, formando um único disco nuclear com $3 \times 10^9 M_\odot$ e um tamanho de ~ 75 pc. O painel acima à direita está ampliado mostrando o estágio em um $t \sim 100 \times 10^6$ anos antes dos dois núcleos terem completamente coalescido e o painel do meio mostra 2×10^6 anos depois da fusão. Enquanto os painéis abaixo mostram a borda da galáxia remanescente (esquerda) e visto de cima o sistema binário formado pelos BNSMs (direita).



FONTE: Mayer et al. (2007)

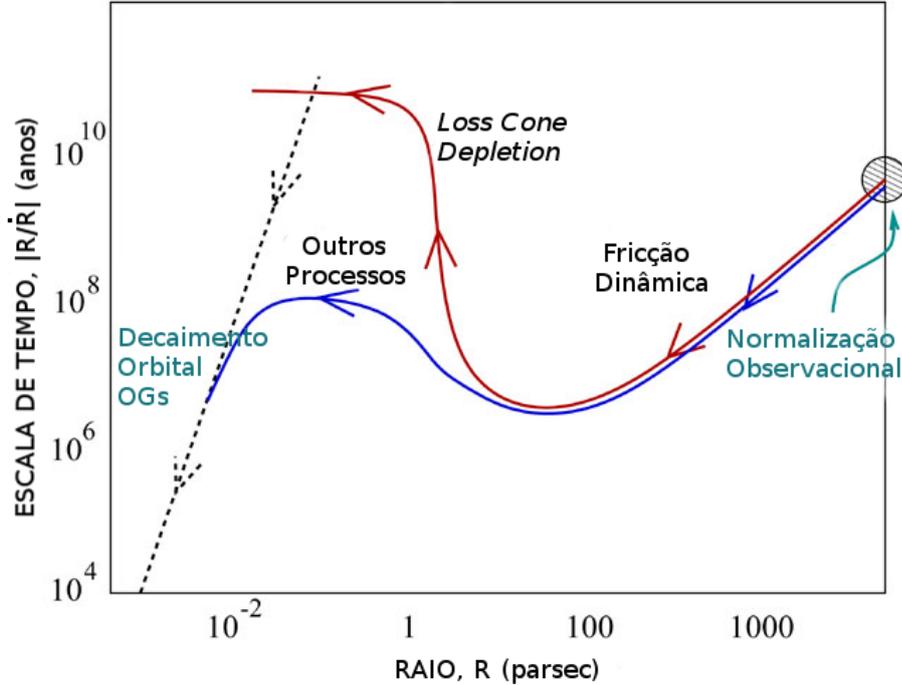
1.2.1 Fricção Dinâmica

Durante uma fusão de galáxias, as estrelas que as compõem experimentam as forças de maré que tornam-se mais intensas à medida que as duas galáxias se aproximam. O papel da fricção dinâmica nos BNSMs centrais será de aproximá-los até que eles formem um sistema binário ligado. Depois que a binária é formada, a própria fricção dinâmica começa atuar no decaimento da órbita, seguindo para a perda de momento angular e energia de movimento dos corpos, por meio das interações gravitacionais com a matéria circundante.

Considerando um buraco negro movendo-se com velocidade \mathbf{v}_{bn} em um campo de estrelas de massa m_* e velocidade \mathbf{v}_* , podemos escrever a taxa de variação da velocidade do buraco negro por meio da fórmula de Chandrasekhar (CHANDRASEKHAR, 1943):

$$\frac{d\mathbf{v}_{bn}}{dt} = -\frac{16\pi^2 G^2 M_{bn} m_* \ln \Lambda}{v_{bn}^3} \mathbf{v}_{bn} \int_0^{v_{bn}} f(v_*) v_*^2 dv_*, \quad (1.7)$$

Figura 2 Escala de tempo como uma função do raio da evolução da separação de BNSMs em um processo de fusão de duas galáxias. O mecanismo de fricção dinâmica mantém a binária ligada. Quando a separação do sistema é suficientemente próxima ($< 10^{-3}$ pc), a perda de energia orbital e momento angular via emissão de ondas gravitacionais (OGs) leva para a rápida fusão, como mostrada pela linha azul.



FONTE: Adaptado de Backer, Jaffe e Lommen (2004)

sendo $\ln\Lambda$ o logaritmo de Coulomb e representa o logaritmo da razão entre os parâmetros de impacto (b) máximo e mínimo, e $f(v_*)$ é uma função distribuição que descreve as estrelas. Essa expressão nos mostra que a aceleração está na mesma direção da velocidade, mas em sentido oposto, implicando na desaceleração da velocidade do buraco negro. Somente as estrelas movendo-se mais lentamente que a velocidade do buraco negro contribuem para a força por meio da $f(v_*)$. A fórmula de Chandrasekhar é igualmente válida para um sistema quente contendo um espectro de massas estelares diferentes e fornece uma descrição precisa do arrasto sentido por um objeto orbitando em um sistema estelar.

Considerando buracos negros com diferentes massas no centro de cada sistema gravitacional, durante a fusão galáctica, o buraco negro secundário irá em direção à galáxia mais massiva. Então, os dois buracos negros formarão uma binária ligada no núcleo relaxado do sistema estelar recém formado. O tempo de fricção dinâmica, t_{fric} , que descreve esse processo é dado por:

$$t_{fric} = \frac{\sigma^3}{4\pi G^3 M_{bn} m_* n_* \ln\Lambda}. \tag{1.8}$$

A interação dos buracos negros com as estrelas circundantes produz a fricção dinâmica necessária para dirigir o movimento espiral em uma escala de tempo da ordem de

(BEGELMAN; BLANDFORD; REES, 1980):

$$t_{fric} \simeq \frac{6 \times 10^6}{\log N} \left(\frac{\sigma}{300 \text{km s}^{-1}} \right) \left(\frac{r_c}{100 \text{pc}} \right)^2 \left(\frac{M_s}{10^8 M_\odot} \right)^{-1} \text{ anos}, \quad (1.9)$$

sendo r_c o raio do núcleo estelar que circunda o buraco negro, N o número de estrelas contidas no núcleo e M_s a massa do buraco negro secundário.

Quando a velocidade orbital dos buracos negros alcança a dispersão de velocidades do núcleo, o processo de fricção dinâmica torna-se ineficiente. Então, a correspondente separação entre o par de buracos negros é:

$$a_{fric} = \frac{G(M_p + M_s)}{\sigma} = 4,3 \left(\frac{M_p + M_s}{10^7 M_\odot} \right) \left(\frac{\sigma}{100 \text{km s}^{-1}} \right)^{-2} \text{ pc}, \quad (1.10)$$

sendo M_p a massa do buraco negro primário. O decréscimo da separação dos dois buracos negros acontece pela interação da binária com as estrelas próximas à órbita do sistema binário.

1.2.2 Interação do Sistema Binário com Ambientes Estelares e Gasosos

O fornecimento de estrelas disponíveis em encontros de três corpos com a binária é conhecido como “*loss-cone*”, que basicamente estabelece um mecanismo de competição entre o encontro de três corpos (binária mais estrela) com a fricção dinâmica. As estrelas do “*loss-cone*” são ejetadas durante essa interação pelo mecanismo de *slingshot* gravitacional, carregando uma quantidade de energia e momento angular da binária, ou seja, as estrelas quando passam na vizinhança do buraco negro são capturadas e, então, ejetadas em velocidades muito maior. No entanto, no caso de uma distribuição esférica de estrelas, a evolução da binária até a fusão pode ser interrompida pela falta de estrelas com órbitas que cruzam os buracos negros. A esse tipo de fenômeno chamamos de “*loss-cone depletion*”.

O tempo de relaxação está relacionado à eficiência do processo de coalescência. No caso de núcleos de galáxias mais densos, o reabastecimento do “*loss-cone*” colisional pode ser capaz de levar a binária à fusão em um tempo de Hubble. Por outro lado, em núcleos galácticos de baixa densidade, o tempo de relaxação é mais longo que o tempo de vida do sistema, fazendo que a binária alcance grandes separações e os efeitos da radiação gravitacional não se tornam eficientes. A escala de tempo de decaimento da binária t_{dec} como uma função da separação entre as componentes, é $t_{dec} = |R/\dot{R}|$ (ver Figura 2).

Sem qualquer outro mecanismo físico eficiente além dos mencionados acima, o fenômeno “*loss-cone depletion*” causa um aumento no t_{dec} , fazendo com que a binária não evolua à separações menores que 1 pc. Essa dificuldade dos sistemas alcançarem separações em sub-parsecs, devido à redução de estrelas em órbitas cruzando os buracos negros é chamado problema do parsec final (LODATO et al., 2009).

O déficit de massa no núcleo de galáxias elípticas tem sido justificado pela massa expelida, por meio da interação da binária em coalescência com ambientes gasosos. De tal modo que, o processo de *slingshot* gravitacional estabelece um papel fundamental para manter a binária ligada, embora exista interação do gás. Um sistema binário imerso em gás pode ter sua formação e evolução orbital aceleradas até mesmo superando a barreira do parsec final. Fusões de galáxias ricas em gás por meio dos torques gravitacionais, dirigem uma imensa quantidade de gás no núcleo da galáxia remanescente, que hospeda a binária de BNSMs. Quando esse gás esfria, ele se estabelece em um disco fino circundando o par de buracos negros ligados. A princípio, o disco de acreção tem uma orientação arbitrária com relação ao plano orbital do sistema binário, podendo levar ao surgimento de um disco *warp*. Isso ocorre já que a componente de quadrupolo do potencial gravitacional (neste caso, a binária) causa a precessão diferencial no disco.

O disco de acreção exerce torques de maré nos dois BNSMs forçando o decaimento da separação (semi-eixo maior) entre eles e a perda de energia e momento angular do sistema para o gás externo. Quando o sistema binário é composto por buracos negros com massas diferentes, a componente secundária da binária leva ao surgimento de um *gap* no disco em torno da componente primária, dividindo o gás em um disco interno e externo.

Baseada na teoria de migração planetária, pode-se definir o tempo de encolhimento, t_{enc} , devido à interação dinâmica com o gás:

$$t_{enc} = \frac{M_d + M_s}{M_d} t_\nu, \quad (1.11)$$

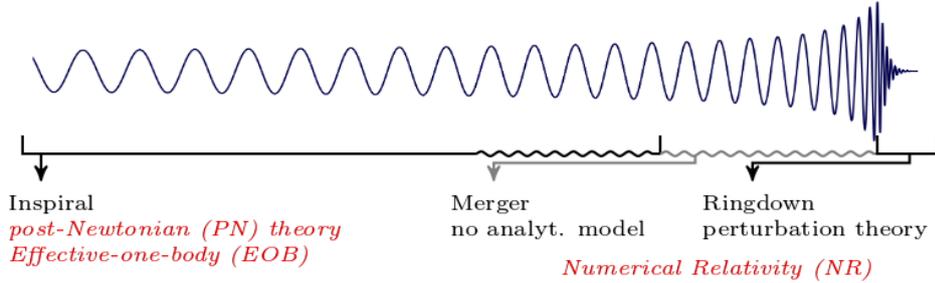
sendo M_d a massa do disco dentro da órbita da componente secundária e t_ν é o tempo viscoso. Se $M_s \ll M_d$ o encolhimento acontece em uma escala de tempo t_ν , caso contrário, o processo torna-se muito lento. Considerando que o gás é eficiente para manter o par de buracos negros ligado em separações da ordem de sub-parsecs, quando o torque gravitacional for maior que o torque de maré exercido pelo disco de gás, a binária mantém-se ligada devido à radiação gravitacional até a coalescência final. A separação crítica que delimita a fronteira entre esses dois regimes é conhecida como raio de desacoplamento (ver mais detalhes na Seção 2.2.3.2).

1.2.3 Emissão de Ondas Gravitacionais

Quando a emissão de ondas gravitacionais torna-se um efeito dominante para o decaimento orbital de uma binária é necessário investigar os diferentes estágios da coalescência e suas contribuições para a dinâmica do sistema. A evolução dos buracos negros binários passa pelo processo de coalescência, que é marcado por três fases, classificadas como: espiralação (*inspiral*), fusão (*merger*) e *ringdown* (ver Figura 3).

A fase de espiralação é descrita analiticamente pela aproximação pós-Newtoniana (PN) que permite uma descrição da evolução dinâmica do sistema. Mas à medida que

Figura 3 Forma de onda completa do sinal de OGs de um par de buracos negros coalescendo como uma função do tempo. As diferentes técnicas de aproximações analíticas e numéricas e os intervalos de validade são indicados. A linha ondulada preta ilustra o regime próximo à fusão (*plunge*). Enquanto a linha ondulada cinza mostra a fase fusão (*merger*), que é descrita pela Relatividade Numérica (NR, *Numerical relativity*).



FONTE: Ohme (2012)

o sistema vai perdendo energia via emissão de ondas gravitacionais, essa aproximação vai tornando-se imprecisa, necessitando de outro método. Tal método, utilizado quando aproxima-se o fim da espiralação, é o formalismo *effective-one-body* (EOB), no qual acrescentam-se parâmetros livres para utilizar a Relatividade Numérica (OHME, 2012).

O espectro de energia para a fase de espiralação é dado por (THORNE, 1987):

$$\frac{dE}{df} = \frac{1}{3}\pi^{2/3}\mu M^{2/3}f^{-1/3}, \quad (1.12)$$

sendo μ a massa reduzida e M é a massa total do sistema. Com a evolução da binária, a frequência e a amplitude da onda aumentam, fazendo o sistema evoluir mais rapidamente, o chamado *chirp*. À medida que a espiralação evolui e os buracos negros mantêm-se a uma distância de $R = 6M$, denominada de órbita estável mais interna² (ISCO), podemos inferir a frequência do sinal imediatamente antes da fusão, dada na forma (SATHYAPRAKASH; SCHUTZ, 2009):

$$f_{ISCO} \sim 220 \left(\frac{20M_{\odot}}{M} \right) \text{ Hz}, \quad (1.13)$$

sendo M a massa total da binária. Essa expressão fornece um valor da frequência da última órbita estável circular do sistema, uma vez que a frequência de fusão é obtida por meio de simulações numéricas.

Com o fim da espiralação, os dois buracos negros passam pelo regime *plunge*, encontrando-se em uma instabilidade dinâmica até começar a fusão. Resultando em uma fase não-linear, somente resolvida por métodos da relatividade numérica. No entanto, cabe ressaltar que para o caso de buracos negros com mesma massa e sem rotação, toma-se uma aproximação analítica para a forma de onda dessa fase (AJITH et al., 2008). Simulações numéricas realizadas por Ajith et al. (2011) pertimiram construir uma família

² Nesta seção, estamos assumindo as quantidades $G=c=1$.

de formas de onda analítica para os três estágios da coalescência, resolvendo o problema da abordagem analítica para a fase da fusão. As ondas gravitacionais emitidas nesta fase carregam informações sobre todo o processo altamente dinâmico. O espectro de energia para este estágio é descrito como:

$$\frac{dE}{df} = \frac{1}{3}\pi^{2/3}\mu M^{2/3}\frac{f^{2/3}}{f_f}, \quad (1.14)$$

sendo f_f a frequência emitida da fase de fusão.

A fase *ringdown* resulta do produto final da fusão do sistema, contribuindo para um buraco negro altamente perturbado produzindo oscilações dominadas pelo modo de vibração quase-normal. É no modo fundamental que maior quantidade de energia é emitida. Logo, a contribuição de $n > 0$, torna-se desprezível em amplitude com relação ao modo $n = 0$. As ondas gravitacionais emitidas dessa fase são uma superposição senoidal exponencialmente amortecida. Para um amortecimento senoidal, a forma de onda é escrita como:

$$h(t) \simeq e^{(-t/\tau)}\cos(2\pi f_r t), \quad (1.15)$$

sendo t o tempo, τ o tempo característico de amortecimento da onda e f_r a frequência do sinal emitido que está relacionada com os parâmetros do buraco negro, massa final do processo de fusão (M) e spin (a):

$$f_r \simeq \left[1 - 0,63(1 - a)^{3/10}\right] \frac{1}{2\pi M}, \quad (1.16)$$

nessa expressão foram adotadas unidades geometrizadas $G = c = 1$. O espectro de energia que descreve a forma de onda do sinal *ringdown* é dada por (FLANAGAN; HUGHES, 1998):

$$\frac{dE}{df} \approx \frac{1}{8}\mathcal{A}^2 Q M^2 f_r \delta(f - f_r), \quad (1.17)$$

sendo \mathcal{A} a amplitude de perturbação ao iniciar o *ringdown*, Q é um parâmetro chamado fator de qualidade que está associado diretamente ao spin do buraco negro e $\delta(f - f_r)$ é uma função delta de Dirac. A radiação de um buraco negro excitado é fortemente amortecida, durando apenas alguns ciclos nesta frequência, de modo que infere-se a frequência do buraco negro como (SATHYAPRAKASH; SCHUTZ, 2009):

$$f_{BN} \sim 1000 \left(\frac{M_{bn}}{10M_\odot}\right)^{-1} \text{ Hz}, \quad (1.18)$$

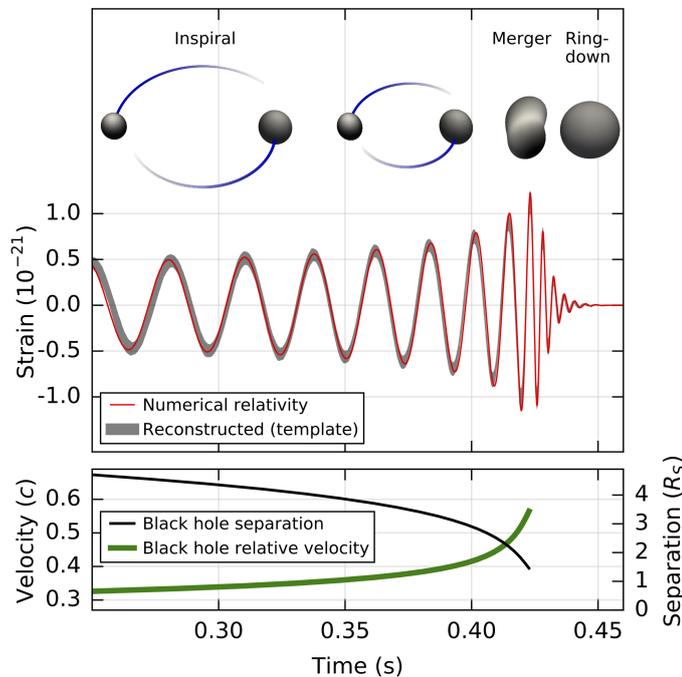
sendo M_{bn} a massa do buraco negro resultante da fusão. A energia radiada do processo é dada por:

$$E_r \approx \frac{1}{8} \mathcal{A}^2 M^2 f_r Q. \quad (1.19)$$

A fração de massa total do buraco negro remanescente convertida em energia radiada na fase *ringdown*, pode ser representada pela eficiência de emissão da radiação gravitacional (ε_{rg}). Essa eficiência depende de como ocorreu o mecanismo inicial para formação do buraco negro.

Muitos esforços teóricos, computacionais e experimentais têm sido desenvolvidos desde a predição teórica da existência das ondas gravitacionais, feita por Albert Einstein, em 1916. Mas, somente cem anos depois que houve a detecção inédita da emissão de ondas gravitacionais (ABBOTT et al., 2016a; ABBOTT et al., 2016b).

Figura 4 GW150914: O painel superior mostra as imagens de cada fase do processo de coalescência dos dois buracos negros e a amplitude da onda gravitacional alcançada durante cada estágio. O painel inferior apresenta a separação do buraco negro em unidades do raio de Schwarzschild ($R_S = 2GM/c^2$) e a velocidade relativa efetiva dada pelo parâmetro pós-Newtoniano $v/c = (GM\pi f/c^3)^{1/3}$, onde M é a massa total do sistema e f é a frequência da onda gravitacional calculada com a relatividade geral.



FONTE: Abbott et al. (2016a)

A primeira detecção direta (conhecida como GW150914) foi proveniente da coalescência de um sistema binário composto por dois buracos negros de massas estelares (ABBOTT et al., 2016a). Como prevista pela forma de onda da relatividade geral, a evolução do sistema aconteceu com as órbitas finais da espiralação levando à fusão da binária

com a posterior fase *ringdown* do buraco negro remanescente como um produto final da fusão. Sob uma duração de 0,2 s, o sinal aumentou em frequência e amplitude durante 8 ciclos de 35 a 150 Hz, alcançando o máximo da amplitude (ver Figura 4).

Outra detecção direta da radiação gravitacional bastante importante ocorreu em Dezembro de 2015 e também foi detectada pelos observatórios LIGO (ABBOTT et al., 2016b). O evento GW151226 também foi proveniente de um par de buracos negros de massas estelares. O sinal durou cerca de 1 s, e foi primeiro detectado no observatório que fica em Livingston, nos EUA e após 1,1 ms foi detectado no outro observatório que se situa em Hanford. Foram detectados 55 ciclos de 35 Hz até alcançar a máxima amplitude em 450 Hz.

Uma das observações direta da radiação gravitacional foi um marco para as contrapartidas eletromagnéticas (ABBOTT et al., 2017). Essa detecção aconteceu em Agosto de 2017 e foi observada tanto pelos detectores LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*) quanto pelo observatório VIRGO, localizado na Itália. Além disso, foi a primeira observação desses detectores de um sistema binário de estrelas de nêutrons. A associação com um *burst* de raios- γ , detectado pelo Fermi-GBM 1,7 s após a coalescência sugere à hipótese de uma fusão de estrelas de nêutrons e fornece a primeira evidência direta de uma ligação entre estas fusões e *bursts* de raios- γ curtos.

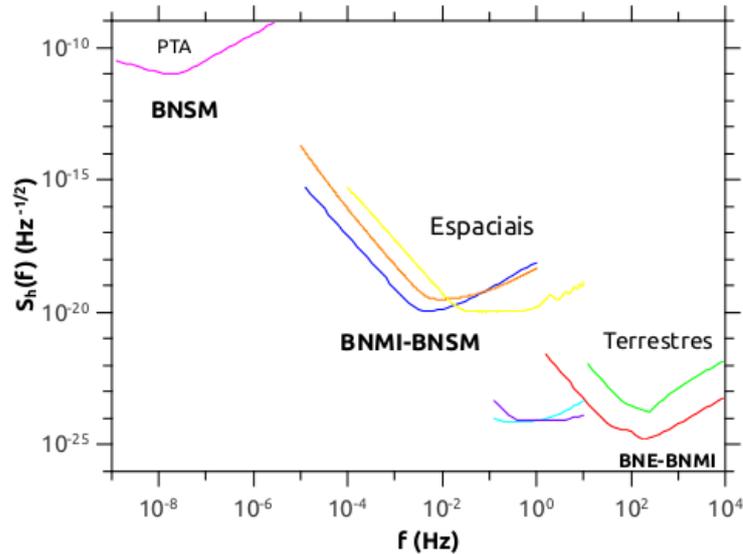
Estas observações diretas são um marco para a Astronomia de Ondas Gravitacionais, já que estão diretamente relacionadas à existência de buracos negros no Universo. Muitos modelos envolvendo a formação de buracos negros em sua larga faixa de massa são discutidos na atualidade, porém ainda há muitos problemas em aberto.

A Figura 5 apresenta as diferentes técnicas usadas para a detecção de ondas gravitacionais e a faixa de frequência em que cada detector atua. Os detectores terrestres são interferométricos do “tipo Michelson”, enquanto os espaciais realizam uma “interferometria digital” com uma técnica chamada TDI (*Time Delay Interferometry*). A técnica PTA utiliza uma forma alternativa de detecção por meio do experimento *Pulsar Timing Array* (PTA). Este experimento utiliza o monitoramento de pulsares por radiotelescópios (HOBBS et al., 2010).

1.2.4 Sistemas Disco-Binária Desalinhados

Para um sistema binário de BNSMs em uma órbita circular, a interação entre o disco desalinhado e a binária é semelhante à precessão Lense-Thirring, atuando em um disco de acreção circundando um único buraco negro rotacionando (LENSE; THIRRING, 1918; LODATO; PRINGLE, 2007). As interações entre disco-binária desalinhados envolvem o efeito adicional do decaimento da inclinação devido aos efeitos de dissipação viscosa. Para um buraco negro primário circundado por um disco inclinado, o fluxo do gás é dominado por torques viscosos. Neste caso, não se espera uma contrapartida eletromagnética

Figura 5 Curvas de sensibilidade S_h para as diferentes técnicas usadas na detecção de ondas gravitacionais em função da frequência f da radiação emitida pelos diversos tipos de massa dos buracos negros. Sendo BNE e BNMI, os buracos negros de massa estelar e de massa intermediária, respectivamente.



FONTE: [Pereira \(2015\)](#)

durante a fusão da binária, em sistemas disco-binária inclinados.

A interação da binária em um ambiente gasoso depende das propriedades do disco. O raio de desacoplamento, por exemplo, se refere ao raio em que o torque gravitacional torna-se comparável ao torque viscoso. Quando a distância inicial entre os dois buracos negros é muito maior que o raio de desacoplamento, a binária pode ser circundada por um disco circumbinário. Por outro lado, quando a evolução é dominada pela emissão de ondas gravitacionais (isto é, quando a separação inicial dos buracos negros é pequena comparada ao raio de desacoplamento), então um disco individual circunda somente o buraco negro mais massivo.

Para um disco circumbinário, o vetor momento angular do disco nem sempre coincide com aquele da binária. A orientação inicial do disco é estabelecida pela distribuição de momento angular do gás mais que pelo momento angular da binária ([HAYASAKI; SAITO; MINESHIGE, 2013](#)).

[Lubow, Martin e Nixon \(2015\)](#) estudaram os efeitos da inclinação binária-disco sobre torques ressonantes de Lindblad atuando em um disco circumbinário. Os autores investigaram a ressonância de Lindblad interna 2:1 (para $m = 2$) que domina o truncamento de maré de discos coplanares por uma binária prograde. Para esta ressonância, os autores encontraram um rápido decréscimo do torque com o ângulo de inclinação: por um fator de 2 para 30 graus, por um fator de 20 para 90 graus e nulo com um ângulo de 180 graus (caso contra-rotacionando).

Torques viscosos podem dominar sobre torques ressonantes de Lindblad (para m

= 2) se a binária está contra-rotacionando. Eles podem dominar também para ângulos de inclinação muito menores, se o disco é suficientemente viscoso. Neste caso, o gás no disco pode ser capturado pelo secundário imerso no disco circumbinário ou escapando dele. Em um disco circumsecundário inclinado, os torques de maré enfraquecidos permitem a transferência de massa da componente secundária para a componente central da binária. Os discos inclinados são esperados ainda para serem mais estendidos do que os discos coplanares devido ao decréscimo nos torques de maré ressonantes (LUBOW; OGILVIE, 2000; LUBOW; MARTIN; NIXON, 2015).

Neste trabalho, assumimos que o efeito mais importante para o desalinhamento entre o disco e a binária é devido ao efeito Bardeen-Petterson (BARDEEN; PETTERSON, 1975). Desde que o vetor momento angular orbital do buraco negro secundário não coincida com o spin do buraco negro primário, cujo disco de acreção está alinhado com o spin, isto é, pelo efeito Bardeen-Petterson o disco está alinhado com o spin da componente primária, resultando em um desalinhamento com o plano orbital da companheira.

Desse modo, para o estudo de sistemas inclinados com o par de buracos negros decaindo gravitacionalmente pela emissão de ondas gravitacionais, precisamos conhecer algumas definições e propriedades físicas dos discos de acreção viscosos circundando sistemas binários de BNSMs (ver Capítulo 2), bem como compreender a descrição matemática e os aspectos físicos das ondas gravitacionais emitidas durante o decaimento orbital da binária (ver Capítulo 3), para que assim possa ser feita uma modelagem numérica, por meio do código SPH PHANTOM, de um disco viscoso, em que o gás é tratado como partículas pontuais (ver Capítulo 4).

2 Discos de Acreção

Neste capítulo, são descritos os principais aspectos da física de acreção, as propriedades dos discos de gás e a interação entre o disco e um sistema binário. A descrição física dos discos viscosos é fundamental para sua modelagem numérica utilizando códigos hidrodinâmicos, por exemplo, o código SPH PHANTOM, que foi empregado neste trabalho. Desse modo, é necessário conhecer os parâmetros essenciais que descrevem a evolução e a estrutura dos discos gasosos.

2.1 Teoria Clássica de Discos de Acreção

Um disco de acreção é um sistema definido como: gás circundando uma estrela ou um objeto compacto, que se estabelece na forma de um disco plano em rotação e acreta massa ao objeto central pela perda de energia e momento angular.

2.1.1 Aproximação de Discos Finos

A aproximação de discos finos considera a quantidade $H/R \ll 1$, isso significa que a escala de comprimento típica na direção vertical, ou seja, a espessura do disco H é muito menor do que a distância radial R , como representado esquematicamente na Figura 6. Isso implica que muitas das equações são integradas na direção vertical, em vez de lidar com quantidades por unidade de volume¹. Nesse trabalho, trataremos em vez disso quantidades por unidade de superfície, tal como a densidade de superfície, Σ .

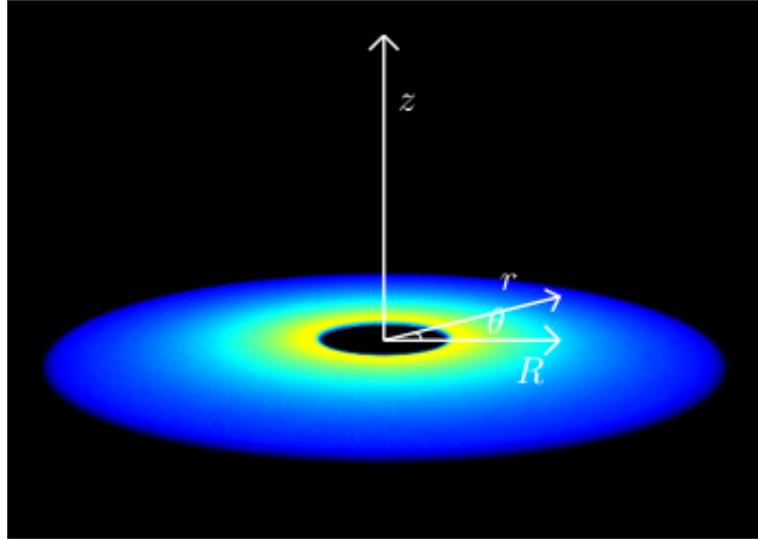
A condição de discos finos é assumida em muitos cenários astrofísicos para estar em uma faixa de $H/R \sim 10^{-3} - 10^{-2}$ para AGNs e $H/R \sim 5 \times 10^{-2} - 10^{-1}$ para discos protoplanetários e protoestelares. Esta consideração em escalas espaciais requer uma consideração equivalente em velocidades, implicando que a velocidade do som c_S é muito menor do que a velocidade rotacional $v_\phi = v_K$ (sendo v_K a velocidade Kepleriana), ou seja, que a velocidade do fluxo é altamente supersônica. Esta condição implica que a velocidade radial v_R é muito menor do que a velocidade do som e a velocidade rotacional (LODATO, 2008):

$$v_R \ll c_S \ll v_\phi. \quad (2.1)$$

Além disso, assumimos ainda que a escala de tempo viscosa é muito mais longa do que as escalas de tempo dinâmica e térmica.

¹ Quando quantidades de 'volume' são necessárias, como a viscosidade, usualmente essas quantidades são entendidas como uma medida vertical.

Figura 6 Representação esquemática de um disco de gás fino.



FONTE: Cerioli (2015)

2.1.2 Estrutura e Evolução de Discos de Acreção

A evolução de discos de acreção é descrita pelas equações básicas da dinâmica de fluidos viscosos, que são a equação de continuidade e a equação de Navier-Stokes. Para descrever tal sistema consideramos coordenadas cilíndricas (R, ϕ, z) centrada no objeto e o disco assimétrico, de modo que todas as variáveis não dependem no ângulo azimutal ϕ , mas são funções do raio R e tempo t ².

A equação de continuidade para a densidade ρ de um fluido movendo com uma velocidade \mathbf{v} é:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.2)$$

como mencionamos anteriormente, usaremos a densidade de superfície Σ ao invés da densidade de volume ρ para derivar as equações gerais para a estrutura do disco:

$$\Sigma(R, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(R, z, t) dz, \quad (2.3)$$

a equação de continuidade, em coordenadas cilíndricas, integrada na direção vertical seguindo a aproximação de discos de acreção fino leva a equação de evolução no tempo para a densidade de superfície do disco:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma v_R) = 0. \quad (2.4)$$

² Assumimos apenas dependência como uma função de R e t , uma vez que a dependência em z é desconsiderada depois da integração vertical pela aproximação de discos finos.

Para determinar a velocidade \mathbf{v} , usaremos a equação de movimento do fluido, definida como equação de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} (\nabla P - \nabla \cdot \sigma) - \nabla \Phi \quad (2.5)$$

sendo que no lado direito da equação acima, temos as forças atuando no fluido que são as forças de pressão, viscosas e a força gravitacional externa. Em muitos casos, a gravidade é dominada pelo objeto central de massa M , dado pelo potencial:

$$\Phi = -\frac{GM}{r}, \quad (2.6)$$

onde r é o raio esférico, e a força gravitacional é obtida diretamente da direção radial:

$$-\nabla \Phi = -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.7)$$

No entanto, em alguns casos o disco pode ser massivo suficiente para a contribuição do potencial ser não desprezível, e então, podemos adicionar o termo $-\nabla \Phi_{disco}$, onde Φ_{disco} é o potencial gravitacional gerado pelo próprio disco obtido da equação de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi_{disco} = 4\pi G \Sigma \phi(z). \quad (2.8)$$

O tensor σ na equação (2.5) descreve o efeito de forças viscosas, e tem um papel muito importante na dinâmica de discos de acreção, uma vez que ele controla a dissipação de energia e momento angular do disco, e é escrito da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = \eta \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \delta_{ij} \right] + \zeta \nabla \cdot \mathbf{v} \delta_{ij}, \quad (2.9)$$

sendo η e ζ os coeficientes de viscosidade *shear* e *bulk*, respectivamente. Sendo $\eta = \nu \rho$ relacionado à viscosidade cinemática. O tensor σ tem somente uma componente que não desaparece em um fluxo circular:

$$\sigma_{R\phi} = \rho \nu R \frac{d\Omega}{dR}, \quad (2.10)$$

sendo o tensor σ proporcional a taxa de deformação, representada pela quantidade $Rd\Omega/dR$, desaparecendo para fluidos rotacionando rigidamente.

Assumindo que um disco é composto por uma sequência de anéis finos, cuja viscosidade atua por meio de forças tangenciais entre dois anéis rotacionando com velocidades diferentes, que possibilitam a troca de momento angular das partes internas do disco, onde a velocidade angular é maior para as partes externas onde o movimento é mais lento. O efeito causado por esta troca de momento angular é que uma pequena quantidade de partículas de gás são aceleradas pela troca e movem-se em grandes distâncias carregando momento angular, seguindo à acreção das partes internas do disco.

2.1.2.1 Equilíbrio Radial

Agora, vamos considerar a componente radial da equação de Navier-Stokes (2.5) e desconsiderar termos envolvendo v_R e $\partial P/\partial R$. Se o gás é barotrópico, ou seja, a pressão depende apenas da densidade, a velocidade do som é definida como:

$$c_S^2 = \frac{dP}{d\rho}, \quad (2.11)$$

encontramos que:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial R} = \frac{c_S^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial R} \approx \frac{c_S^2}{R}, \quad (2.12)$$

sendo $c_S \ll v_K$. A relação resultante representa o balanço entre as forças centrífuga e de gravidade:

$$\frac{v_\phi^2}{R} = \frac{d\Phi}{dR}, \quad (2.13)$$

sendo Φ gerado pelo objeto central de massa M :

$$\frac{d\Phi}{dR} = \frac{GM}{R^2}. \quad (2.14)$$

A velocidade rotacional é dada por:

$$v_\phi^2 = v_K^2 = \frac{GM}{R} \quad (2.15)$$

e a velocidade angular é:

$$\Omega_K^2 = \frac{GM}{R^3}, \quad (2.16)$$

os discos que seguem estas condições são chamados discos Keplerianos.

Devemos considerar ainda que, se a velocidade do som aumenta devido ao aquecimento térmico do disco, os efeitos de pressão podem ter efeitos visíveis, então escrevendo a equação de movimento radial, incluindo termos de pressão, temos:

$$\frac{v_\phi^2}{R} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial R} + \frac{GM}{R^2}. \quad (2.17)$$

Mas podemos reescrever a equação (2.17) assumindo as seguintes condições: introduzimos a velocidade do som e consideramos que $\rho \propto R^{-\beta}$ para obter:

$$v_\phi = \left(\frac{GM}{R}\right)^{1/2} \left[1 - \beta \left(\frac{c_S}{v_K}\right)^2\right]^{1/2}, \quad (2.18)$$

o segundo termo do lado direito é da ordem de $(H/R)^2$ e geralmente é desprezível para discos finos.

2.1.2.2 Estrutura Vertical

Abordaremos a estrutura vertical estudando o equilíbrio hidrostático, para isso consideramos a componente vertical z da equação de Navier-Stokes. Uma vez que, a velocidade na direção vertical é muito pequena, podemos desprezar o lado esquerdo da equação (2.5), além disso as forças viscosas também desaparecem, já que a única componente de deformação está na direção $R\phi$. Desse modo, os dois termos que mantêm equilíbrio são as forças gravitacional e de pressão. A equação (2.5) se reduz à:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (2.19)$$

Para o caso de discos não auto-gravitantes, a componente vertical da força gravitacional é:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{z}{R} \approx \frac{GM}{R^3} z = \Omega_K^2 z \quad (2.20)$$

sendo r o raio esférico, que para discos finos podemos aproximar $r \approx R$. Reescrevendo (2.19), temos:

$$\frac{c_s^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\frac{GM}{R^3} z = -\Omega_K^2 z. \quad (2.21)$$

O perfil de densidade vertical é escrito como:

$$\rho(z) = \rho_0 \exp \left[-\left(\frac{\Omega_K}{c_s} \right)^2 \frac{z^2}{2} \right] = \rho_0 \exp \left(-\frac{z^2}{2H^2} \right), \quad (2.22)$$

onde a espessura do disco é definida por:

$$H = \frac{c_s}{\Omega_K}, \quad (2.23)$$

e a relação de aspecto do disco é:

$$\frac{H}{R} = \frac{c_s}{v_K}, \quad (2.24)$$

como mencionamos anteriormente, a aproximação de discos finos é válida quando a relação $H/R \ll 1$ ou ainda quando a rotação do disco é altamente supersônica $c_s \ll v_K$.

No caso quando o perfil de densidade não é Gaussiano segue a forma:

$$\rho(z) = \rho_0 \frac{1}{\cosh^2(z/H_{ag})}, \quad (2.25)$$

sendo H_{ag} a espessura no caso de um disco auto-gravitante e é escrito da seguinte forma:

$$H_{ag} = \frac{c_s^2}{\pi G \Sigma}, \quad (2.26)$$

no entanto, efeitos de auto-gravidade podem ser desprezados se $H_{ag} \gg H$ correspondendo à $\Omega c_s / \pi G \Sigma \gg 1$, ou assumindo a aproximação $M_{disc} \approx \pi R^2 \Sigma a$:

$$\frac{M_{disc}}{M} \approx \frac{H}{R} \ll 1. \quad (2.27)$$

2.1.2.3 Conservação de momento angular

Nesta seção, mostraremos que a componente azimutal da equação (2.5) representa a conservação de momento angular orbital. Assumindo assimetria, as forças de pressão e gravitacional não contribuem nesta direção. Escrevendo a componente ϕ da equação de Navier-Stokes integrada verticalmente, temos:

$$\Sigma \left(\frac{v_R v_\phi}{R} + \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_\phi}{\partial R} \right) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 T_{R\phi}), \quad (2.28)$$

sendo $T_{R\phi}$ correspondente a integral sobre a direção z da componente diferente de zero do tensor σ e é escrita da forma:

$$T_{R\phi} = \nu \Sigma R \frac{\partial \Omega}{\partial R}. \quad (2.29)$$

Combinando a equação (2.28) com a equação da continuidade, encontramos:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Sigma R v_\phi) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R v_R \Sigma R v_\phi) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 T_{R\phi}), \quad (2.30)$$

sendo $\Sigma R v_\phi$ o momento angular do gás por unidade de superfície. No caso de uma curva de rotação Kepleriana e um tensor deformação viscoso simples, a equação (2.30) assume a forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Sigma R^2 \Omega) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (\Sigma v_R \Omega R^3) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (\nu \Sigma R^3 \Omega'), \quad (2.31)$$

sendo $\Omega' = \frac{\partial \Omega}{\partial R}$. Usando a equação de continuidade (2.4) e a equação (2.30), encontramos a velocidade radial:

$$v_R = \frac{1}{R \Sigma (R^2 \Omega)'} \frac{\partial}{\partial R} (\Sigma \nu R^3 \Omega'), \quad (2.32)$$

substituindo em (2.4), temos:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{1}{(R^2 \Omega)'} \frac{\partial}{\partial R} (\Sigma \nu R^3 \Omega') \right], \quad (2.33)$$

essa é uma das equações mais relevantes na teoria de discos de acreção, já que enfatiza a importância da viscosidade em dirigir a evolução do disco, uma vez que se a viscosidade

é nula ($\nu = 0$) o perfil de densidade do disco não evolui. Quando os efeitos de pressão são desprezíveis e $v_\phi = v_K$, a componente radial da velocidade é:

$$v_R = -\frac{3}{\Sigma R^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} (\nu \Sigma R^{1/2}), \quad (2.34)$$

e a densidade de superfície evolui da seguinte forma:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R^{1/2} \frac{\partial}{\partial R} (\nu \Sigma R^{1/2}) \right]. \quad (2.35)$$

2.1.2.4 Soluções de Estado Estável

A solução de estado estável é a solução mais simples da equação da evolução no tempo da densidade de superfície do disco. As condições externas variam em tempos muito maiores do que o tempo viscoso, de modo que um disco de acreção estável se estabelece em uma estrutura de estado estável.

Devido à assimetria, cada quantidade envolvida por unidade de área pode ser integrada em ϕ , ganhando um fator de 2π e tornando-se uma quantidade por unidade de intervalo radial. Da equação de continuidade, considerando $\partial/\partial t = 0$, obtemos que a quantidade $Rv_R\Sigma$ é constante. Escrevendo assim, a taxa de acreção fica:

$$\dot{M} = -2\pi Rv_R\Sigma, \quad (2.36)$$

que representa um *inflow* de massa constante através de cada ponto no disco. A equação de conservação do momento angular (2.30) nos leva a introdução do fluxo de momento angular \dot{J} atravessando um anel do disco, que também é uma quantidade constante:

$$\dot{J} = \dot{M}R^2\Omega + 2\pi\nu\Sigma R^3\Omega', \quad (2.37)$$

o termo $\dot{M}R^2\Omega$ representa o momento angular transportado por massa por meio de advecção e dá uma contribuição positiva, o termo $2\pi\nu\Sigma R^3\Omega'$ é negativo, porque contém $\partial\Omega/\partial R$ e está relacionado ao torque viscoso. Reescrevendo a equação do fluxo de momento angular para um disco kepleriano, temos que $\dot{M} - \dot{J}/R^2\Omega_K = 3\pi\nu\Sigma$. O fluxo de momento angular \dot{J} pode ser deduzido da condição de fronteira de torque zero. Isso consiste em assumir que na parte interna do disco existe uma região, chamada "camada limite", onde a velocidade angular do gás se conecta ao objeto central.

No caso de um buraco negro, a parte interna do disco (R_{in}) coincide com o raio da órbita circular estável mais interna (R_{ISCO}). Uma vez que \dot{J} é constante, a equação $\dot{J} = \dot{M}(GM R_{in})^{1/2}$ será sempre válida, e nós obtemos a taxa de acreção como uma função de R para um disco de estado estável:

$$\dot{M} = 3\pi\nu\Sigma \left(1 - \sqrt{\frac{R_{in}}{R}} \right). \quad (2.38)$$

2.1.3 Discos de Acreção Energéticos

Para fornecer acreção, uma quantidade significativa de energia potencial precisa ser dissipada por forças viscosas. O torque total exercido pelas forças viscosas em um anel de gás de largura ΔR é dado por:

$$G\left(R - \frac{\Delta R}{2}\right) - G\left(R + \frac{\Delta R}{2}\right) = -\frac{\partial G}{\partial R} \Delta R, \quad (2.39)$$

sendo G o torque definido por:

$$G(R) = -2\pi R^2 T_{R\phi} = -2\pi\nu\Sigma R^3\Omega', \quad (2.40)$$

e então a potência gerada por este torque é dada por:

$$-\Omega \frac{\partial G}{\partial R} = -\left[\frac{\partial(G\Omega)}{\partial R} - G\Omega'\right], \quad (2.41)$$

essa relação nos leva à algumas interpretações quanto à perda de energia do anel do disco devido à duas contribuições diferentes, a primeira delas é o termo da derivada radial de $G\Omega$, $\partial(G\Omega)/\partial R$, relacionada ao transporte de energia devido à viscosidade, pode-se ver que a contribuição integrada deste termo em todo o domínio radial do disco desaparece como $G\Omega$ nos limites de $[R_{in}, R_{out}]$ igual a zero. Enquanto a segunda contribuição vem do termo $G\Omega'$ que representa a dissipação de energia devido à viscosidade. Sabendo disso, nós podemos escrever a potência dissipada por unidade de área do disco:

$$D(R) = -\frac{G\Omega'(R)}{2\pi R} = \nu\Sigma(R\Omega')^2, \quad (2.42)$$

para discos keplerianos, a equação acima é escrita como:

$$D(R) = \frac{9}{4}\nu\Sigma\Omega^2. \quad (2.43)$$

Para obter a potência total emitida pelo disco em um estado estável, integramos a equação acima sobre o domínio inteiro do disco gerando a luminosidade integrada:

$$L_{disco} = \int_{R_{in}}^{\infty} 2\pi R D(R) dR = \int_{R_{in}}^{\infty} \frac{3GM\dot{M}}{2R^2} \left(1 - \sqrt{\frac{R_{in}}{R}}\right) dR = \frac{1}{2} \frac{GM\dot{M}}{R_{in}}, \quad (2.44)$$

de (2.44), temos que a L_{disco} é somente metade da energia potencial perdida pela matéria acretando e a outra metade tem sido necessária para manter a rotação kepleriana do disco em R_{in} ³. A contribuição para a luminosidade do disco vem de toda a energia dissipada,

³ Em outras palavras, do teorema de virial sabemos que a energia total do objeto rotacionando em uma órbita kepleriana estável é $-1/2GM/R$, de modo que a contribuição cinética o mantém no movimento orbital. A energia restante é dissipada na camada limite, quando o gás finalmente perde a energia cinética para cair no objeto central. Essa camada limite é esperada para ser tão luminosa quanto o disco todo.

porque em um estado estacionário o disco não aquece. Assumimos que o disco radia como um corpo negro e a potência emitida por unidade de superfície é:

$$D(R) = 2\sigma_{SB}T_s^4, \quad (2.45)$$

sendo σ_{SB} a constante de Stefan-Boltzmann, T_s a temperatura da superfície do disco e o fator 2 leva em conta ambos os lados do disco. Uma vez que temos assumido um disco Kepleriano e estável, a temperatura possui a seguinte forma:

$$T_s(R) = \left[\frac{3}{8\pi\sigma_{SB}} \frac{GM\dot{M}}{R^3} \left(1 - \sqrt{\frac{R_{in}}{R}} \right) \right]^{1/4}. \quad (2.46)$$

Podemos inferir a partir de (2.46) que a temperatura é independente da viscosidade, tal como $D(R)$ e que para raios grandes, a curva assume a relação $T_s(R) \propto R^{-3/4}$. A temperatura de superfície apresenta um papel análogo à temperatura efetiva de uma estrela. Fazendo uso da fórmula de Planck, podemos aproximar o espectro emitido pelo disco como a soma do espectro de corpo negro dos anéis do disco:

$$F_\nu = \int_{R_{in}}^{R_{ext}} B_\nu(T_s) 2\pi R dR = \int_{R_{in}}^{R_{ext}} \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{2\pi R dR}{\exp\left[\frac{h\nu}{\kappa_B T_s(R)}\right] - 1}, \quad (2.47)$$

nesse caso ν representa a frequência, h é a constante de Planck e c é a velocidade da luz. Da integral acima, podemos deduzir a forma do espectro:

- para frequências baixas $h\nu \ll \kappa_B T_s(R_{out})$: o espectro é proporcional a $F_\nu \propto \nu^2$, limite Rayleigh-Jeans;
- para frequências intermediárias e $T_s(R) \propto R^{-3/4}$ encontramos $F_\nu \propto \nu^{1/3}$ a relação típica de um disco estável opticamente espesso;
- para frequências altas $h\nu \gg \kappa_B T_s(R_{in})$: o espectro decai como $e^{-\nu}$, limite de Wien.

2.1.4 Viscosidade

A viscosidade padrão devido à colisões entre partículas do gás é incapaz de produzir acreção em um tempo adequado para a evolução do disco. Isso acontece porque a ação da viscosidade padrão é muito pequena, e a escala de tempo viscosa seria muito grande em comparação com a vida do disco de acreção observada. Considerando um disco Kepleriano, a velocidade radial é pequena e proporcional à viscosidade, $v_R \sim \nu/R$. A escala de tempo típica para a evolução viscosa é dada por:

$$t_\nu \sim \frac{R}{v_R} \sim \frac{R^2}{\nu}, \quad (2.48)$$

outra escala de tempo bastante importante é o tempo dinâmico que está relacionado ao período orbital T ,

$$t_{din} = \Omega^{-1} = \frac{T}{2\pi}, \quad (2.49)$$

que é o tempo necessário para alcançar o equilíbrio centrífugo e para um disco Kepleriano torna-se, $t_{din} = (R^3/GM)^{1/2}$. Comparando t_ν à escala de tempo dinâmica t_{din} do disco, temos:

$$\frac{t_\nu}{t_{dyn}} = \frac{R^2\Omega}{\nu}, \quad (2.50)$$

a razão acima corresponde ao número de Reynolds (Re) que é usado na dinâmica do gás para descrever a razão entre as forças inerciais e viscosas e para diferenciar se o movimento do fluxo é laminar ou turbulento. Dado que o parâmetro ν para a viscosidade colisional é escrito como:

$$\nu = \lambda\bar{v}, \quad (2.51)$$

sendo $\lambda = 1/(n\sigma_{col})$ o livre caminho médio, n é a densidade de número do gás, σ_{col} é a seção de choque colisional e \bar{v} é a velocidade média das moléculas devido aos movimentos térmicos, ou seja, a velocidade do som no gás c_s .

A densidade de número é definida como:

$$n = \frac{\rho}{\mu m_p} \simeq \frac{\Sigma}{H\mu m_p}, \quad (2.52)$$

sendo μ é o peso molecular médio e m_p é a massa do próton. Assumindo as quantidades mencionadas acima, a equação (2.50) é reescrita da forma:

$$\frac{t_\nu}{t_{din}} = \left(\frac{\Sigma\sigma_{col}}{\mu m_p} \right) \left(\frac{H}{R} \right)^{-2}. \quad (2.53)$$

Assumindo alguns valores para a equação acima, podemos extrair o tempo viscoso no caso de um disco de acreção circundando um buraco negro supermassivo com massa de $M_{bn} = 10^8 M_\odot$, $H/R \simeq 0,001$, $\sigma_{col} \simeq 2 \times 10^{-15} \text{cm}^2$, $\mu = 2$, $\Sigma \sim M_{disco}/R_{disco}^2$, sendo $M_{disco} = 1M_\odot$ e $R_{disco} = 10R_S$. De modo que temos a escala de tempo viscoso da ordem de $\approx 3 \times 10^{24} \text{s} \approx 10^{17} \text{anos}$. Esse valor é muito maior do que o tempo de Hubble, isso nos leva à conclusão que a viscosidade colisional não é eficiente como uma fonte principal de movimentos turbulentos em discos de acreção. Fazendo uma estimativa do número de Reynolds dado os valores mencionados acima encontramos $Re \approx 10^{13}$, logo podemos obter algumas características para discos de acreção, tal como: discos altamente turbulentos, pois ultrapassam o valor crítico de Re ($\gg 10^3 - 10^4$). Podemos esperar que essa viscosidade turbulenta possa ser muito maior do que a viscosidade molecular fornecendo o transporte de momento angular no disco.

Nestas condições, a viscosidade pode ser mais alta, porque neste caso o momento angular é trocado não por meio de colisões de moléculas individuais do gás, mas pela mistura de elementos do fluido movendo em torno do disco devido à turbulência. O comprimento típico deste movimento pode ser muito maior do que o livre caminho médio colisional, logo o transporte torna-se mais efetivo.

Na busca pelo entendimento dos mecanismos físicos por trás da turbulência do gás, e na determinação dos tamanhos e velocidades de seus redemoinhos formados, podemos propor algumas considerações, como no caso do tamanho típico dos redemoinhos turbulentos ser limitado pela geometria do sistema, uma vez que ele não pode exceder a espessura do disco (H) ou a turbulência não pode ser isotrópica, enquanto a velocidade do fluxo turbulento é esperada para ser menor que a velocidade do som ($v_t < c_s$), caso contrário o disco poderá não ser estável seguindo o desenvolvimento de fortes choques. Seguindo estas ideias, a parametrização da viscosidade do disco segue a prescrição α (SHAKURA; SUNYAEV, 1973):

$$\nu = \alpha c_s H, \quad (2.54)$$

sendo $\alpha \ll 1$.

Quando o fluido torna-se turbulento, movimentos caóticos são estabelecidos nele, estes movimentos dão origem a uma transferência de momento angular melhorada à medida que a troca ocorre em escalas maiores (mistura de elementos do fluido em torno do disco) do que as relacionadas a colisões moleculares. O mecanismo de turbulência pode ser explicado introduzindo flutuações à velocidades do fluido:

$$v_\phi = R\Omega + u_\phi. \quad (2.55)$$

Estas quantidades de flutuações podem ser exploradas de modo que podemos reescrever a equação do momento angular como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Sigma R v_\phi) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}(R v_\phi \Sigma R v_\phi) = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\Sigma R^2 \langle u_\phi u_R \rangle_{z,\phi} \right), \quad (2.56)$$

sendo o símbolo $\langle \rangle$ um indicativo de uma média vertical e azimutal. Considerando o caso de um fluido puramente hidrodinâmico, onde somente o campo relevante é o campo de flutuação de velocidade e esta contribuição para o tensor deformação é:

$$T_{R\phi}^{Re} = -\Sigma \langle u_R u_\phi \rangle_{z,\phi}, \quad (2.57)$$

essa expressão também é chamada de "Reynolds stress", se existe uma correlação positiva entre u_R e u_ϕ o termo (2.57) atua como um tipo de tensor deformação viscoso.

É importante destacar que um alto número de Reynolds é necessário, mas não é uma condição suficiente para discos tornarem-se turbulentos. Para isso é necessário

um mecanismo capaz de extrair continuamente energia do movimento médio do gás e transferí-lo para o movimento turbulento caótico, se esse não fosse o caso, o movimento caótico decairia em uma escala de tempo viscosa.

Atualmente, dois mecanismos têm sido propostos para explicar a origem da viscosidade turbulenta, que são MRI (*Magneto-Rotational Instability*) e a instabilidade gravitacional. O mecanismo MRI requer a presença de campos magnéticos no disco, onde as linhas de campo atuam como molas conectando os diferentes anéis dentro do disco. A rotação diferencial esticaria as molas que tentam restaurar o equilíbrio minimizando os anéis internos e acelerando os externos. O MRI pode amplificar pequenas perturbações levando a troca muito eficiente de momento angular. Enquanto o mecanismo de instabilidade gravitacional acontece quando o disco é massivo e torna-se alto gravitante, causando a formação de estruturas espirais, onde o momento angular é dirigido por ondas de densidades (LODATO, 2008).

2.1.5 Modelo Padrão de Shakura-Sunyaev

Para descrever a estrutura estável de discos finos são necessárias algumas equações apresentadas a seguir:

1.
$$\rho = \frac{\Sigma}{H}, \quad (2.58)$$

2.
$$H = \left(\frac{R^3}{GM} \right)^{1/2} c_s, \quad (2.59)$$

3.
$$c_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho}, \quad (2.60)$$

4.
$$P = \frac{\kappa_B T_c}{\mu m_p} \rho + \frac{4\sigma_{SB}}{3c} T_c^4, \quad (2.61)$$

5.
$$\frac{4\sigma_{SB}}{3\tau} T_c^4 = \frac{3}{8\pi} \frac{GM_p \dot{M}}{R^3} \left(1 - \sqrt{\frac{R_{in}}{R}} \right), \quad (2.62)$$

6.
$$\tau = \kappa_R \frac{\Sigma}{2}, \quad (2.63)$$

7.
$$\dot{M} \left(1 - \sqrt{\frac{R_{in}}{R}} \right) = 3\pi\nu\Sigma, \quad (2.64)$$

8.
$$\nu = \alpha c_s H. \quad (2.65)$$

Este conjunto de equações possui soluções algébricas expressas como função do raio R , com α , M e \dot{M} como parâmetros, no entanto para este conjunto de equações se tornarem completamente alto-consistente são necessárias prescrições para $P(\rho)$, $\nu(\rho, T_c, \Sigma, \alpha, \dots)$ e $\kappa_R(\rho, T_c, \Sigma, \dots)$.

Shakura e Sunyaev (1973) encontraram soluções analíticas para o conjunto de equações (2.58 - 2.65), usando uma equação de estado localmente isotérmica (2.60) para a viscosidade, enquanto a opacidade é devido à competição de dois mecanismos:

- interação *free-free* governada pela lei de Kramers:

$$\kappa_R^{ff} = 0,11\rho T_c^{-7/2} n \text{cm}^2 \text{g}^{-1}, \quad (2.66)$$

com n átomos por unidade de volume.

- espalhamento Thomson:

$$\kappa_R^T = \frac{\sigma_T}{\mu m_p}, \quad (2.67)$$

sendo $\sigma_T = 6,67 \times 10^{-25} \text{cm}^2$ a seção de choque do espalhamento Thomson. O domínio de um processo sobre o outro depende da densidade e temperatura do gás. Os discos de acreção podem ser divididos em três regiões, já que cada parte exige diferentes regimes físicos. Essas regiões (que definimos aqui, como regiões 1, 2 e 3) são delimitadas pelos raios críticos, R_{rad} e R_{Kr} . A região 1 se concentra em $R < R_{rad} < R_{Kr}$, a pressão de radiação domina sobre a pressão do gás e a principal fonte de opacidade é o espalhamento Thomson em elétrons livres, $\kappa_R^T = 0,4 \text{cm}^2 \text{g}^{-1}$. A região 2 é encontrada em $R_{rad} < R < R_{Kr}$, a pressão do gás domina e a opacidade é dada pelo espalhamento Thomson. A região 3 se concentra em $R > R_{Kr}$, a pressão do gás domina, mas a principal fonte de opacidade é a absorção *free-free*, dada pela lei de Kramers, $\kappa_R^{ff} = 5 \times 10^{24} \rho T_c^{-7/2} \text{cm}^5 K^{7/2} \text{g}^{-2}$.

A aproximação de disco fino no modelo de disco de estado estável pode não ser mais válida após o efeito da pressão de radiação. Assumindo que o gás caindo para dentro do disco é completamente ionizado, daremos uma estimativa da luminosidade de Eddington (L_{Edd}) equilibrando a gravidade, que atua no centro e o espalhamento Thomson de fótons e elétrons que fornece o mecanismo de pressão de radiação. Se a força que atua para fora devido à pressão de radiação equilibra a atração gravitacional, nenhum material pode ser acretado em princípio, toda vez que essa condição for alcançada chamamos de L_{Edd} , ou seja, a luminosidade de acreção máxima.

Assumindo uma simetria esférica, equilibrando estas duas contribuições, temos:

$$\frac{GMm_p}{R^2} = \frac{L}{4\pi R^2} \frac{\sigma_T}{c}, \quad (2.68)$$

então a L_{Edd} pode ser calculada do balanço entre a força gravitacional e a força exercida pela radiação:

$$L_{Edd} = \frac{4\pi GMm_p c}{\sigma_T} \simeq 1,3 \times 10^{38} \frac{M}{M_\odot} \text{ergs}^{-1}. \quad (2.69)$$

Considerando a luminosidade do disco devido à queda do gás, temos:

$$L = \eta \dot{M} c^2, \quad (2.70)$$

sendo η o parâmetro de eficiência de conversão e \dot{M} é a taxa em que esse material cai. Assumindo ainda que no caso do objeto central ser um buraco negro, podemos definir uma taxa de acreção crítica, como:

$$\dot{M}_{crit} = \frac{2\pi m_p c R_S}{\eta \sigma_T} \simeq 4,5 \times 10^{-8} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \left(\frac{0,1}{\eta} \right) \frac{M_\odot}{\text{anos}}. \quad (2.71)$$

No regime super crítico, quando $\dot{M}_{crit} \gg \dot{M}$, a aproximação de disco fino não é válida, nestas circunstâncias a pressão de radiação pode causar um *outflow* de matéria, fazendo a parte mais interna do disco quase esférica. Por outro lado, a solução de disco estável existe somente quando $\dot{M} < \dot{M}_{crit}$. A solução para H do disco onde a pressão de radiação domina é escrita da forma:

$$H = \frac{3R_S}{4\eta} \frac{\dot{M}}{\dot{M}_{crit}} \left(1 - \sqrt{\frac{R_{in}}{R}} \right), \quad (2.72)$$

para um disco circundando um buraco negro, a escala de altura é sempre menor do que o raio de Schwarzschild, $H/R_S = c_s/\Omega R_S < 1$.

2.2 Discos de Acreção Circundando Sistemas Binários

Na seção 2.1 foi abordada a dinâmica de discos de acreção gasosos orbitando um objeto central, que no nosso caso trata-se de um buraco negro. No entanto, alguns trabalhos sugerem que a fusão de sistemas binários de BNSMs é esperada para ocorrer imersa em ambientes gasosos (MAYER et al., 2007). Nesse caso, a teoria clássica de discos gasosos muda quando é adicionado um objeto massivo secundário, ou quando a presença do gás em tal sistema binário atua no movimento kepleriano das massas. tais questões estão em constantes discussões, principalmente no que se referem aos aspectos observacionais que precedem a emissão de ondas gravitacionais, como a influência do processo de acreção.

Embora muitas questões precisam ser esclarecidas durante a interação entre o gás e o objeto secundário, alguns aspectos teóricos sugerem possíveis abordagens para tentar explicar essa evolução dinâmica. O primeiro deles é que a presença de um disco

gasoso leva à migração do objeto secundário. Outro aspecto é que em algumas situações particulares, que depende da razão de massa da binária, pode ser gerado um *gap* ou mesmo uma cavidade no disco. No caso da presença de uma cavidade, ela pode atuar com uma barreira no disco, evitando que o gás do lado externo da órbita da secundária seja acretado no objeto primário. Uma ideia intuitiva que se pode pensar é que, após a abertura do *gap*, nenhuma matéria pode atravessar a órbita do objeto secundário implicando que não haverá mais acreção tanto no objeto secundário quanto no objeto primário. No entanto, algumas simulações numéricas têm apresentado resultados diferentes, mostrando que a matéria pode fluir através da borda da cavidade levando para a acreção de gás no sistema binário (ARTYMOWICZ; LUBOW, 1994).

Como mencionado anteriormente, a razão de massa do sistema binário influencia em diferentes aspectos astrofísicos. Geralmente, dependendo dessa razão e da quantidade de gás no disco, a binária pode ter três discos de separação: dois discos de acreção, um circundando cada componente e um disco circumbinário. Em particular, baseado no trabalho de Cerioli, Lodato e Price (2016), nós consideramos que o objeto secundário está imerso no disco circunprimário.

2.2.1 Torques de Maré

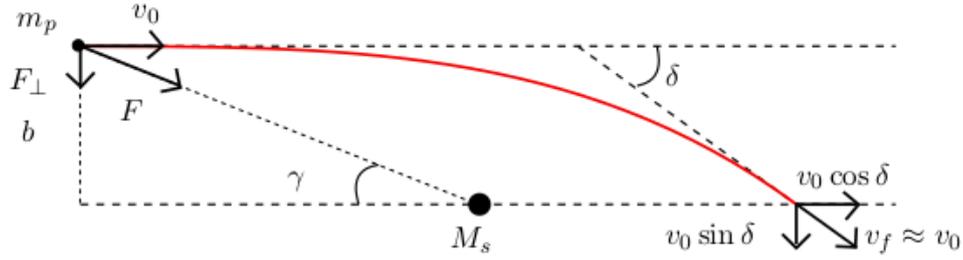
Pela aproximação de discos finos ($H/R \ll 1$), a simetria axial ao longo do eixo z é desconsiderada pela presença do objeto secundário, adicionando uma contribuição gravitacional ao potencial resultando na geração de forças de maré. As forças de maré atuam como torques que perturbam as órbitas keplerianas do gás e os mecanismos de acreção. Como já existem os torques viscosos no gás, quando são adicionados os torques de maré, eles fornecem um mecanismo adicional para a transferência de momento angular no disco.

2.2.1.1 Aproximação Impulsiva

O mecanismo de transferência de momento angular entre o objeto secundário e o gás pode ser determinado estudando o efeito de encontros próximos entre o sistema por meio da aproximação impulsiva. Assumindo a razão de massa de um sistema binário como $q = M_s/M_p \ll 1$, uma partícula de gás m_p pode sentir a presença do objeto secundário quando ele está suficientemente próximo. Essa aproximação é tratada como um encontro de espalhamento que acontece em um tempo $t_{enc} \ll t_{dyn}$ como mostrado na Figura 7.

A força de maré gerada pelo objeto secundário M_s pode defletir a órbita da partícula teste por um ângulo δ . Considerando essa abordagem assumimos o seguinte cenário: a partícula orbita em torno da M_p com um raio da órbita $a + b$, sendo a a separação da binária e b é o parâmetro de impacto, sendo $b \ll a$. Nesta abordagem consideramos algumas condições, tais como:

Figura 7 Representação esquemática da interação gravitacional entre uma partícula de gás de massa m_p e um objeto secundário com massa M_s .



FONTE: Cerioli (2015)

- Órbitas circulares antes e depois dos encontros;
- Assumindo $q \ll 1$, o objeto secundário também assume uma órbita circular com raio a ;
- Velocidade relativa entre a partícula do gás e a componente secundária da binária, $v_0 = v_{gas} - v_s$.

Devido à deflexão, a velocidade relativa da partícula na direção tangencial passa de v_0 para $v_0 \cos \delta$ e adquire $v_0 \sin \delta$ que é a velocidade radial perpendicular à v_0 . A velocidade final depois do encontro tem magnitude $v_f \approx v_0$, chamada aproximação de Born. A componente v_{\perp} é induzida pela força gravitacional atuando na partícula teste,

$$v_{\perp} = \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\perp} = \frac{1}{m_p} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\perp} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{GM_s b}{r^2} \frac{dt}{r}, \quad (2.73)$$

sendo r a distância entre m_p e M_s . Para ângulos pequenos⁴, $dt = ds/v_0$ e $r^2 = s^2 + b^2$, a equação (2.73) fica:

$$v_{\perp} = \frac{2GM_s}{v_0} \int_0^{\infty} \frac{b}{(s^2 + b^2)^{3/2}} ds, \quad (2.74)$$

definindo $x = s/b$, temos:

$$v_{\perp} = \frac{2GM_s}{v_0 b} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{2GM_s}{v_0 b} \left[\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} \right]_0^{\infty} = \frac{2GM_s}{v_0 b}, \quad (2.75)$$

uma vez que $v_{\perp} = v_0 \sin \delta$ e $\sin \delta \approx \delta$, temos:

$$\delta = \frac{2GM_s}{v_0^2 b}. \quad (2.76)$$

A mudança na velocidade tangencial implica em uma mudança no momento angular específico da partícula $\Delta j_p = (a+b)v_0 \cos \delta - (a+b)v_0$, lembrando que temos assumido

⁴ Levando em consideração que $v_f \approx v_0$, para ângulos pequenos, $v_f dt \approx v_0 dt = ds$, logo $dt = ds/v_0$.

que $b \ll a$, então o momento angular específico assume a forma, $\Delta j_p \approx av_0(\cos\delta - 1)$, que pode ser equilibrado por uma mudança no Δj_s do objeto secundário, mantendo durante o encontro a conservação do momento angular total, $\Delta j_s + \Delta j_p = 0$. Sabendo que, $1 - \cos\delta = 2\text{sen}^2(\delta/2) \approx \delta^2/2$, o momento angular específico da componente secundária é:

$$\Delta j_s = \frac{2G^2 M_s^2 a}{b^2 v_0^3}, \quad (2.77)$$

dadas as relações $v_{gas} = v_K = (GM_p/R)^{1/2}$ e $v_s = (GM_p/a)^{1/2}$, temos que o sinal de v_0 depende na posição da partícula do gás com relação à $R = a$. Este resultado nos leva para as seguintes conclusões: quando $R > a$ e a velocidade inicial e o Δj_s são menores que zero, o M_s perde momento angular seguindo em direção ao centro, que em contrapartida o gás do lado de fora da órbita do secundário ganha momento angular indo em direção à raios grandes; por outro lado, quando $R < a$, v_0 e Δj_s são maiores que zero, o objeto secundário ganha momento angular movendo-se para fora, enquanto o gás cai em direção as órbitas internas do disco. Em resumo, o efeito causado pela transferência de momento angular é que o gás é repelido da órbita do objeto secundário, e que a própria massa secundária é sujeita à migração, cujo sentido depende das condições assumidas acima.

2.2.1.2 Ressonâncias Lindblad e de Corrotação

A resposta linear de um disco de gás diferencial rotacionando a um potencial externo rígido também em rotação foi calculada por [Goldreich e Tremaine \(1979\)](#)⁵. Os autores assumiram que o potencial externo varia na escala do raio do disco. É importante ressaltar que, a troca de momento angular entre o disco e o objeto secundário acontece somente em alguns locais de ressonância e o disco responde à perturbação da componente secundária pela excitação de ondas de densidade. A ressonância é uma região do disco onde a frequência característica do movimento da massa secundária é igual à frequência dentro do disco. Estas ressonâncias induzidas pelo potencial gravitacional perturbando o disco são chamadas ressonâncias de Lindblad. Cada variável perturbada é escrita como:

$$X = X(R)e^{im[\Omega_p - \Omega(R)]t}, \quad (2.78)$$

sendo Ω_p a velocidade angular do padrão de perturbação e m é o número de onda azimutal. A troca de momento angular entre o fluido e o objeto perturbador ocorre somente em correspondência às ressonâncias de Lindblad e de corrotação [Goldreich e Tremaine \(1979\)](#).

As ressonâncias de Lindblad correspondem à localização em que a frequência do potencial perturbador (no referencial do disco) corresponde à frequência epicíclica $m[\Omega_p - \Omega(R)] = \pm\kappa(R)$, enquanto a ressonância de corrotação está localizada onde $\Omega_p = \Omega(R)$.

⁵ Um disco de gás é assumido diferencial quando as partes internas e externas desse disco possuem velocidades diferentes. Nesse caso, as partes internas possuem altas velocidades, enquanto as regiões externas movem-se mais lentamente.

A resposta do disco à presença do objeto secundário acontece por meio da excitação de ondas de densidade espirais. Essas ondas de densidade carregam energia e momento no disco e se dissipam através de choques. O torque originado em cada ressonância leva ao torque total no objeto secundário.

Assumindo um disco Kepleriano,

$$\Omega(R) = \kappa(R) = \Omega_K(R), \quad (2.79)$$

e a velocidade padrão coincidindo com a velocidade angular do objeto secundário $\Omega_p = \Omega_s$, a frequência epicíclica nos dá:

$$\Omega(R_L) = \frac{m}{m \pm 1} \Omega_s(a). \quad (2.80)$$

Logo, a localização das ressonâncias de Lindblad é:

$$R_L = \left(1 \pm \frac{1}{m}\right)^{2/3} a, \quad (2.81)$$

quando temos o número de onda azimutal baixo, as ressonâncias de Lindblad estão localizadas longe de $R = a$, no entanto à medida que o número de onda azimutal vai aumentando as ressonâncias de Lindblad vão se acumulando em direção a a . [Artymowicz \(1993\)](#) mostrou que para $m \rightarrow \infty$, as ressonâncias de Lindblad tendiam a se acumular em raios:

$$R = a \pm \left(\frac{2}{3}\right) H, \quad (2.82)$$

As ressonâncias de Lindblad são classificadas em internas e externas. As ressonâncias do tipo OLR (do inglês, *Outer Lindblad Resonance*) estão localizadas em:

$$\Omega(R_{OLR}) = \frac{\Omega_s}{2}, \quad (2.83)$$

com $R_{OLR} = 2^{2/3}a \approx 1,59a$. E as do tipo ILR (*Inner Lindblad Resonance*) localizam-se em:

$$\Omega(R_{ILR}) = 2\Omega_s, \quad (2.84)$$

sendo $R_{ILR} = 2^{-2/3}a \approx 0,63a$.

2.2.2 Migração do Buraco Negro Secundário no Disco

Semelhante ao estudo feito para a migração de planetas em discos proto-planetários, o estudo da migração de buracos negros secundários em sistemas binários ocorre de forma análoga. Existem três tipos de migração que dependem da massa do objeto secundário e dos efeitos causados pelos torques (de maré e/ou viscoso). Lembrando que o torque de

maré é devido ao torque exercido pela componente secundária no gás e o outro devido aos torques viscosos intrínsecos presentes no gás.

A migração do tipo I acontece para planetas de baixas massas e a perturbação causada por eles quase não modifica a estrutura do disco de gás, isso ocorre porque a interação entre o disco e a componente secundária é fraca suficiente para ter uma estrutura do disco praticamente não perturbada. Isso pode ser verificado quando a troca de momento angular local entre o sistema (disco-planeta) é desprezível comparada à redistribuição de momento angular devido à viscosidade do disco, implicando em um planeta totalmente imerso dentro do disco gasoso (WARD, 1997; TANAKA; TAKEUCHI; WARD, 2002).

A migração do tipo II ocorre em planetas de altas massas, cujos torques gravitacionais locais dominam o transporte de momento angular dentro do disco. Como os torques gravitacionais do planeta atuam na repulsão do gás para longe de sua órbita, vai surgindo um *gap* em forma de anel dentro do disco, de modo que sua densidade de superfície é consideravelmente minimizada. Isso faz com que as ressonâncias próximas ao planeta fiquem esgotadas de material, resultando em nenhuma ou pouca contribuição no torque total (LIN; PAPALOUZOU, 1986). Quanto à abertura do *gap* no disco, ele acontece quando o torque de maré exercido pelo planeta no gás iguala aos torques viscosos. A viscosidade opõem-se aos torques ressonantes, tentando suavizar os gradientes de densidade radial da estrutura espiral do disco perturbado. O valor do torque necessário para um *gap* é sempre o valor dos torques viscosos.

Em discos proto-planetários, a transição entre os tipos de migração I e II acontece gradualmente. Isso ocorre, pois a massa do planeta aumenta devido à acreção, e o torque exercido por ele começa a modificar a estrutura do disco na sua redondeza e então, nesse caso a perturbação passa ser considerada.

A migração do tipo III acontece toda vez que o planeta migrando abre um *gap* parcial em torno da sua órbita e experimenta um torque de corrotação devido aos elementos do fluido atravessando a região *horseshoe* (WARD, 1991). Este tipo de migração está em um regime intermediário entre os tipos I e II, quando a formação do *gap* é apenas parcial.

2.2.2.1 Evolução do Acoplamento Entre o Disco e a Binária

Nesta seção, consideramos um sistema binário imerso em um disco gasoso, com o BNSM secundário orbitando o primário, a fim de descrever a evolução do sistema disco-binária. O torque total atuando no buraco negro secundário é dado na forma:

$$\Gamma = -\frac{8}{27} \frac{G^2 M_s^2 a \Sigma}{\Omega_s H^3}, \quad (2.85)$$

essa equação é obtida integrando o torque de uma única partícula sobre a massa do disco e assumindo uma densidade de superfície constante. De modo geral, o torque atuando

no disco pode depender do raio e o torque exercido em um anel do material do disco estabelecido entre R e $R + dR$ é $dK = 2\pi R\Lambda_T(R)\Sigma(R)dR$. Dadas as considerações acima, podemos implementar o torque nas equações de evolução do disco. Sabendo que os torques atuam no momento angular por meio das forças tangenciais, as componentes radial e vertical da equação de Navier-Stokes permanecem inalteradas, enquanto a componente azimutal passa a ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Sigma R v_\phi) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}(\Sigma R v_\phi R v_R) = \frac{1}{2\pi R} \frac{\partial}{\partial R}(G + K), \quad (2.86)$$

sendo G o torque viscoso e assume a forma dada em (2.40). Então, a equação de evolução para a densidade de superfície pode ser obtida pela substituição da velocidade radial na equação de continuidade:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{1}{2\pi R(R^2 \Omega')} \left(\frac{\partial G}{\partial R} + \frac{\partial K}{\partial R} \right) \right]. \quad (2.87)$$

Escrevendo essas equações para um disco Kepleriano, temos que a velocidade radial fica:

$$v_R = -\frac{3}{\Sigma R^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R}(\nu \Sigma R^{1/2}) + \frac{1}{\pi \sqrt{GM}} \frac{1}{\Sigma R^{1/2}} \frac{\partial K}{\partial R}, \quad (2.88)$$

e a equação de evolução para densidade de superfície assume a forma:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R^{1/2} \frac{\partial}{\partial R}(\nu \Sigma R^{1/2}) \right] - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{1}{\pi} \left(\frac{R}{GM} \right)^{1/2} \frac{\partial K}{\partial R} \right], \quad (2.89)$$

sendo $\partial K / \partial R = 2\pi R\Lambda_T(R)\Sigma(R)$, que substitutindo na equação (2.88) na presença da massa secundária fornece,

- para $R < a$

$$v_R = -v_0 - \left| \frac{2\Lambda_T}{\Omega R} \right|, \quad (2.90)$$

- para $R > a$

$$v_R = -v_0 + \left| \frac{2\Lambda_T}{\Omega R} \right|, \quad (2.91)$$

sendo v_0 a velocidade radial não perturbada. Para $R > a$ o gás se move radialmente para dentro mais lento que no caso não perturbado, por outro lado quando temos raios pequenos $R < a$, o gás se move com uma velocidade muito maior. Sob essas condições a equação de evolução da densidade de superfície do disco pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R^{1/2} \frac{\partial}{\partial R}(\nu \Sigma R^{1/2}) \right] - \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{\Lambda_T \Sigma}{\Omega} \right], \quad (2.92)$$

nessa equação aparece um novo termo expressando a advecção do material fluido devido à interação com o objeto secundário. Escrevendo a derivada do momento angular do secundário $J_s = M_s v_s a$, temos:

$$\frac{d}{dt}(M_s \Omega_s a^2) = - \int_{R_{in}}^{R_{out}} 2\pi R \Lambda_T(R) \Sigma(R) dR, \quad (2.93)$$

de onde podemos obter a taxa de encolhimento da separação da binária em termos do torque específico:

$$\dot{a} = \frac{da}{dt} = - \frac{4\pi}{a M_s \Omega_s} \int_{R_{in}}^{R_{out}} R \Lambda_T(R) \Sigma(R) dR. \quad (2.94)$$

2.2.3 Decaimento Gravitacional de um Sistema Binário

Quando um par de buracos negros alcança separações menores que $\sim 10^{-3}$ pc, começa haver a perda de energia e momento angular devido à emissão de ondas gravitacionais. Esta dissipação de energia resulta em um torque negativo que encolhe a binária até a coalescência (PETERS; MATHEWS, 1963; PETERS, 1964). Quando a separação dos dois buracos negros aproxima-se do raio de desacoplamento (a_{dec}), a binária desacopla do disco e o movimento migratório torna-se dominado pelo decaimento gravitacional. A seguir, veremos como a emissão de ondas gravitacionais, fornecida pela Relatividade Geral, atua no mecanismo de migração para a binária de buracos negros.

2.2.3.1 Migração via Emissão de Ondas Gravitacionais

Diferente da teoria Newtoniana, onde a separação e a excentricidade do sistema são constantes do movimento, no caso relativístico, esses parâmetros são dependentes do tempo. Para o caso no qual a excentricidade é diferente de zero, temos algumas equações escritas variando no tempo (PETERS, 1964):

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = - \frac{32 G^4 M_p^5 q^2 (1+q)}{5 c^5 a^5 (1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right), \quad (2.95)$$

$$\left\langle \frac{dJ}{dt} \right\rangle = - \frac{32 G^{7/2} M_p^9 q^2 (1+q)^{1/2}}{5 c^5 a^{7/2} (1-e^2)^2} \left(1 + \frac{7}{8} e^2 \right), \quad (2.96)$$

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = - \frac{64 G^3 M_p^3 q (1+q)}{5 c^5 a^3 (1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right), \quad (2.97)$$

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = - \frac{304 G^3 M_p^3 q (1+q) e}{15 c^5 a^4 (1-e^2)^{5/2}} \left(1 + \frac{121}{304} e^2 \right). \quad (2.98)$$

Assumindo excentricidade zero, a equação (2.97) para a separação da binária torna-se:

$$\dot{a}(t) = -\frac{64 G^3 M_p^3 q(1+q)}{5 c^5 a^3}, \quad (2.99)$$

o sinal negativo representa que a emissão de ondas gravitacionais sempre leva a diminuição entre a separação do sistema. Resolvendo essa equação diferencial, encontramos:

$$a(t) = \left\{ a_0^4 - 4t \left[\frac{64 G^3 M_p^3 q(1+q)}{5 c^5} \right] \right\}^{1/4}, \quad (2.100)$$

para $a(t) = 0$, o tempo τ fica:

$$\tau = \frac{5}{256} \frac{c^5 a_0^4}{G^3 M_p^3 q(1+q)}, \quad (2.101)$$

este tempo τ representa o tempo em que os dois buracos negros vão de encontro a uma separação $a = a_0$ significando a completa fusão do sistema. Usando unidades físicas para obter uma estimativa do tempo de fusão dos dois buracos negros, temos:

$$\tau \simeq 5,7 \times 10^2 \left(\frac{10^8 M_\odot}{M_p} \right)^3 \left(\frac{a_0}{10^{-3} \text{pc}} \right) \frac{1}{q(1+q)} \text{anos}, \quad (2.102)$$

assumindo valores para $M_p = 10^8 M_\odot$, $q = 0,001$ e $a_0 = 10^{-3}$ pc, o tempo de decaimento aproxima-se de $5,7 \times 10^5$ anos⁶, isso implica que a separação do par de buracos negros é dominada pela emissão de ondas gravitacionais, tornando-se o mecanismo mais eficiente para perda de energia e momento angular.

Reescrevendo a equação (2.100) em termos de τ , temos:

$$a(t) = a_0 \left(1 - \frac{t}{\tau} \right)^{1/4}, \quad (2.103)$$

essa expressão é importante porque nos levará à dedução das posições e velocidades dos dois buracos negros. A equação para a velocidade é escrita como:

$$\dot{\vartheta} = \left[\frac{GM_{tot}(1-e^2)}{a^3} \right]^{1/2}, \quad (2.104)$$

assumindo $e = 0$ e $a = a(t)$, temos que:

$$\dot{\vartheta} = \left[\frac{GM_{tot}}{a_0^3} \right]^{1/2} \left(1 - \frac{t}{\tau} \right)^{-3/8}, \quad (2.105)$$

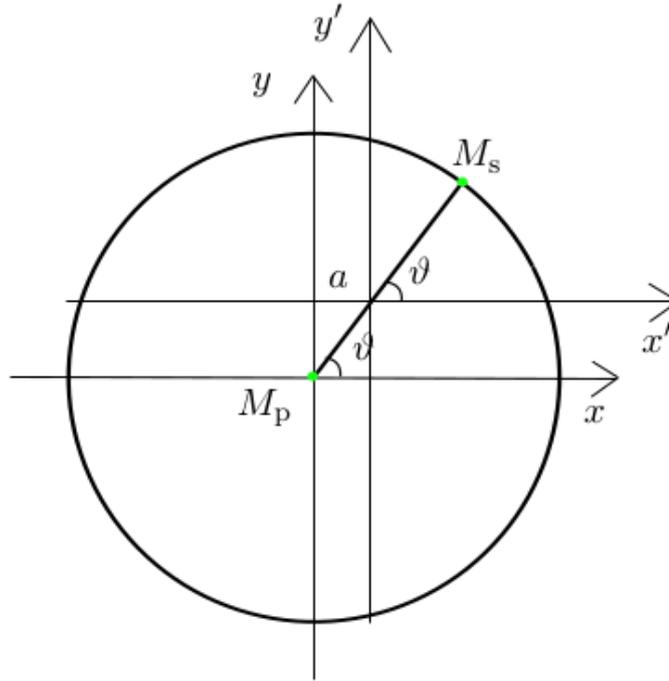
que após a integração, encontramos:

$$\vartheta = -\frac{8}{5} \left[\frac{GM_{tot}}{a_0^3} \right]^{1/2} \tau \left(1 - \frac{t}{\tau} \right)^{5/8}, \quad (2.106)$$

⁶ Essa escala de tempo é muito menor que a idade do universo, $t_{uni} \approx 10^{10}$ anos.

se assumimos os dois buracos negros representados pelas M_p e M_s no sistema de referência como mostrado na Figura 8, a posição relativa do sistema tem as seguintes componentes:

Figura 8 Sistema xy centrado em M_p com o buraco negro secundário representado por M_s a uma distância a da origem, com posição angular $\theta = \theta(t)$. Enquanto, o sistema $x'y'$ está centrado no centro de massa do sistema binário.



FONTE: Cerioli (2015)

$$r_x = a(t)\cos\vartheta(t), \quad (2.107)$$

$$r_y = a(t)\text{sen}\vartheta(t), \quad (2.108)$$

e as respectivas velocidades assumem a forma:

$$v_x(t) = \frac{\dot{a}}{a}r_x - \dot{\vartheta}r_y, \quad (2.109)$$

$$v_y(t) = \frac{\dot{a}}{a}r_y + \dot{\vartheta}r_x. \quad (2.110)$$

A velocidade \mathbf{v} ganha uma componente radial, uma vez que é escrita em termos da taxa de encolhimento da binária:

$$\mathbf{v} = \dot{a}\mathbf{e}_r + a\dot{\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta. \quad (2.111)$$

As posições e as velocidades absolutas das componentes primária e secundária do sistema binário são dadas por:

$$\mathbf{r}'_p = \frac{M_s}{M_{tot}} \mathbf{r}, \quad (2.112)$$

$$\mathbf{r}'_s = \frac{M_p}{M_{tot}} \mathbf{r}, \quad (2.113)$$

$$\mathbf{v}'_p = \frac{M_s}{M_{tot}} \mathbf{v}, \quad (2.114)$$

$$\mathbf{r}'_s = \frac{M_p}{M_{tot}} \mathbf{v}, \quad (2.115)$$

sendo $M_{tot} = M_p + M_s$ a massa total do sistema binário.

2.2.3.2 Raio de Desacoplamento

Quando a emissão de ondas gravitacionais passa a ser um processo dominante para a diminuição da separação de uma binária, o gás do lado de fora da órbita da componente secundária é incapaz de evoluir tão rápido quanto o tempo de decaimento gravitacional, já que os torques viscosos não são mais válidos. Nessas condições, o raio de desacoplamento é a posição em que os torques gravitacionais tornam-se comparáveis aos torques viscosos.

A evolução do sistema disco-binária acoplado é descrito pelas equações:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R^{1/2} \frac{\partial}{\partial R} (\nu \Sigma R^{1/2}) \right] - \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\Lambda_T \Sigma}{\Omega} \right), \quad (2.116)$$

$$\dot{a} = -\frac{4\pi}{a M_s \Omega_s} \int_{R_{in}}^{R_{out}} \Lambda_T(R) \Sigma(R) R dR + \dot{a}_{OG}, \quad (2.117)$$

sendo que \dot{a}_{OG} é dada pela expressão (2.103). [Armitage e Natarajan \(2002\)](#) estimaram o raio de desacoplamento, reunindo duas expressões:

- a primeira é a taxa de migração que é aproximadamente igual a velocidade radial do gás $v_R = -3\nu/2R$, usando a prescrição α de [Shakura e Sunyaev \(1973\)](#):

$$\dot{a} \approx -\frac{3}{2} \alpha v_K \left(\frac{H}{R} \right)^2, \quad (2.118)$$

- a segunda expressão é a taxa de migração devido à radiação gravitacional (2.99), para o caso de órbitas circulares ([PETERS, 1964](#)):

$$\dot{a}(t) = -\frac{64 G^3 M_p^3 q (1+q)}{5 c^5 a^3}, \quad (2.119)$$

obtendo a separação crítica em que a emissão de ondas gravitacionais torna-se o processo dominante levando ao decaimento orbital:

$$a_{dec} = \left(\frac{128}{5}\right)^{2/5} \left(\frac{H}{R}\right)^{-4/5} \alpha^{-2/5} q^{1/5} (1+q)^{1/5} \frac{GM_p}{c^2}, \quad (2.120)$$

usando unidades físicas, podemos reescrever a equação (2.120) da seguinte forma:

$$a_{dec} \approx 1,8 \times 10^{-4} \left(\frac{M_p}{10^8 M_p}\right) \left(\frac{\alpha}{0.01}\right)^{-2/5} \left(\frac{q}{10^{-3}}\right)^{2/5} \left(\frac{H/R}{0.01}\right)^{-4/5} \text{ pc}. \quad (2.121)$$

De modo análogo, nós podemos encontrar a escala de tempo de fusão do raio de desacoplamento, reunindo o tempo de coalescência τ do par de buracos negros e o tempo viscoso t_ν :

$$t_{fusao} = \frac{1}{2c} \left(\frac{128}{5}\right)^{3/5} \left(\frac{H}{R}\right)^{-16/5} \alpha^{-8/5} q^{3/5} \left(\frac{GM_p}{c^2}\right), \quad (2.122)$$

Após o desacoplamento, o tempo de coalescência é menor que o tempo viscoso, uma vez que as componentes da binária espiralam rapidamente, então a borda interna da parte externa do disco não consegue mais seguir o objeto secundário. [Armitage e Natarajan \(2002\)](#) e [Cerioli, Lodato e Price \(2016\)](#) mostraram que se qualquer gás estiver ainda presente pelo menos em torno do objeto primário, o *gap* formado pela componente secundária atua como uma barreira forçando o gás para ser esmagado e rapidamente acretado pelo buraco negro primário levando a dois pontos importantes: um melhoramento na taxa de acreção previamente à emissão de ondas gravitacionais e à observação do mecanismo *squeezing*.

Por outro lado, [Milosavljeviè e Phinney \(2005\)](#) mostraram que no caso de não haver gás entre os buracos negros, a fusão final pode acontecer no vácuo. Para esse resultado, os autores consideraram o modelo α padrão para a evolução do sistema disco-binária e utilizaram o tempo de decaimento gravitacional com o tempo de queda do gás, estimando o raio de desacoplamento como:

$$a_{dec} \approx 117 \left(\frac{\alpha}{0.1}\right)^{-0,34} \left(\frac{M_p}{10^6 M_\odot}\right)^{0,08} \left[\frac{4q}{(1+q)^2}\right]^{0,42} Q \frac{GM_p}{c^2}, \quad (2.123)$$

sendo Q um fator que equivale a 1.

3 Ondas Gravitacionais

Neste capítulo, são apresentadas a descrição matemática e as principais propriedades físicas das ondas gravitacionais. A compreensão das particularidades da radiação gravitacional é fundamental, uma vez que estamos considerando, neste trabalho, um sistema binário de BNSMs dirigido pela emissão das ondas gravitacionais. Para isto, assumimos as abordagens feitas por [D’Inverno \(1992\)](#) e [Creighton e Anderson \(2011\)](#).

3.1 Descrição das Ondas Gravitacionais

As equações de campo obtidas por Einstein podem ser escritas como:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi \frac{G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, que descreve a curvatura do espaço-tempo, a quantidade $\kappa = 8\pi G/c^4$ representa a constante de acoplamento (obtida a partir do limite Newtoniano) e $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento, que define a composição da matéria e energia que causam a curvatura do espaço-tempo. Esta expressão possui dez equações diferenciais acopladas, de segunda ordem e não lineares.

Podemos reescrever a Equação (3.1) da seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi \frac{G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de curvatura de Ricci (ou simplesmente tensor de Ricci) e R é o escalar de curvatura de Ricci. Dessa forma, tomaremos estas quantidades para obtermos a equação de onda que será apresentada a seguir.

3.1.1 Equação de Onda

A linearização das equações de campo ocorre pela aproximação de campo fraco, considerando que a fonte de OGs está suficientemente longe:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é o tensor métrico do espaço-tempo plano de Minkowski e $h_{\mu\nu}$ representa uma pequena perturbação, sendo $|h_{\mu\nu}| \ll 1$.

Essa aproximação simplifica o cálculo do tensor de Riemann, que é escrito assim¹:

$$R_{\nu\rho\sigma}^{\mu} = \Gamma_{\nu\sigma,\rho}^{\mu} - \Gamma_{\rho\nu,\sigma}^{\mu} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\mu}\Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu}\Gamma_{\rho\nu}^{\lambda}, \quad (3.4)$$

onde os símbolos de Christoffel assumem a seguinte forma na aproximação linear:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2}(h_{\beta,\gamma}^{\alpha} + h_{\gamma,\beta}^{\alpha} - h_{\beta\gamma,\alpha}), \quad (3.5)$$

substituindo (3.5) em (3.4), e desconsiderando os termos de segunda ordem em $h_{\mu\nu}$, temos:

$$R_{\nu\rho\sigma}^{\mu} = \frac{1}{2}(h_{\sigma,\nu\rho}^{\mu} - h_{\nu\sigma,\rho}^{\mu} - h_{\rho,\nu\sigma}^{\mu} + h_{\rho\nu,\sigma}^{\mu}). \quad (3.6)$$

Dessa forma, dado que:

$$R_{\nu\sigma} = \eta^{\mu\rho} R_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (3.7)$$

pela contração dos índices (μ, ρ) , obtemos o tensor de curvatura de Ricci:

$$R_{\nu\sigma} = \frac{1}{2}(h_{\sigma,\nu\mu}^{\mu} - h_{\nu\sigma,\mu}^{\mu} - h_{,\nu\sigma} + h_{\nu,\mu\sigma}^{\mu}). \quad (3.8)$$

Por meio da contração do tensor de Ricci, encontramos ainda o escalar de curvatura de Ricci:

$$R = h^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} h_{,\sigma}^{\sigma}. \quad (3.9)$$

De modo que, substituindo (3.8) e (3.9) em (3.2), obtemos as equações de campo linearizadas:

$$h_{\mu\alpha,\nu}{}^{\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - h_{,\mu\nu} + h_{\alpha\nu,\mu}{}^{\alpha} - \eta_{\mu\nu} h_{\alpha\beta,\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu} h_{,\alpha}{}^{\alpha} = 16\pi \frac{G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (3.10)$$

Definimos:

$$\bar{h}_{\mu\alpha} \equiv h_{\mu\alpha} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\alpha} h, \quad (3.11)$$

e para encontrarmos uma forma mais compacta das equações de Einstein, tomaremos o *gauge* de Lorentz $\bar{h}{}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0$. Sendo assim, a equação (3.10) se reduz a:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi \frac{G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (3.12)$$

onde o símbolo \square é o operador D'Alembertiano e pode ser representado como: $\square = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$. A expressão 3.12 representa a equação de onda.

¹ Assumiremos os índices depois da vírgula como derivadas parciais.

3.1.2 Equações de Einstein Linearizadas no Vácuo

Diferentemente da equação (3.12), as equações de campo linearizadas no vácuo, ou seja, sem o termo fonte ($T_{\mu\nu}$) fica:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (3.13)$$

e o gauge de Lorentz é:

$$\frac{\partial \bar{h}_{\beta\nu}}{\partial x^\beta} = 0, \quad (3.14)$$

esta condição requer uma solução de onda plana, que é escolhida viajando em uma direção z , $x^\beta = x^0, x^1, x^2, x^3$; $x^0 = t$, $x^3 = z$:

$$\frac{\partial \bar{h}_{0\nu}}{\partial t} = 0, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \bar{h}_{3\nu}}{\partial x^3} = 0. \quad (3.16)$$

$h_{\mu\nu}$ escrito como função do tempo retardado² $t - z/c$, fica $\bar{h}_{0\nu}(t - z/c)$ e $\bar{h}_{3\nu}(t - z/c)$. De modo que, temos constantes e é escolhido livremente para a constante ser zero, $\bar{h}_{0\nu} = 0$ e $\bar{h}_{3\nu} = 0$.

As componentes que não desaparecem da perturbação métrica do traço-reverso são:

$$\bar{h}_{11} = \bar{h}_{11}(t - z/c), \quad (3.17)$$

$$\bar{h}_{22} = \bar{h}_{22}(t - z/c), \quad (3.18)$$

$$\bar{h}_{12} = \bar{h}_{21} = \bar{h}_{12}(t - z/c). \quad (3.19)$$

Enquanto, as componentes que não desaparecem em termos da perturbação, $h_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\bar{h}$, são:

$$h_{00} = -c^2 h_{33} = \frac{1}{2}c^2(\bar{h}_{11} + \bar{h}_{22}), \quad (3.20)$$

$$h_{11} = -h_{22} = \frac{1}{2}(\bar{h}_{11} - \bar{h}_{22}), \quad (3.21)$$

$$h_{12} = h_{21} = \bar{h}_{12}. \quad (3.22)$$

² Em um evento geral com coordenadas t, x, y, z , o tempo retardado é $\tau = t - r/c$, onde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. O tempo avançado é $t + r/c$. Logo: $r^2 = ct^2 - x^2 + y^2 + z^2 \implies r = ct - z \implies r = c(t - z/c)$.

De tal modo, temos a perturbação métrica viajando ao longo do eixo- z na velocidade da luz, c . Para tal solução tem-se a chamada onda gravitacional. De acordo com as componentes não nulas da perturbação do traço-reverso e da perturbação atual ($h_{\alpha\beta}$), podemos escrever as componentes independentes do tensor de Riemann (que é um invariante de gauge de ordem linear) representando os graus de liberdade da solução da OG, em qualquer gauge escolhido. O tensor de Riemann linearizado é escrito como:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 h_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha \partial x^\delta} + \frac{\partial^2 h_{\alpha\delta}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} - \frac{\partial^2 h_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta \partial x^\delta} \right), \quad (3.23)$$

o tensor de Riemann é o método mais comum usado para expressar a curvatura da variedade Riemanniana, também conhecido como tensor de curvatura.

Dependendo da escolha dos índices nas componentes do tensor de Riemann, as outras componentes podem ser deduzidas pelas suas simetrias. Portanto, sem perda de generalidade, concluí-se que existem somente duas componentes independentes do tensor de Riemann. De modo que, encontramos, $R_{0202} = -R_{0101}$ e $R_{0201} = R_{0102}$:

$$R_{0101} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{11} = -\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\bar{h}_{11} - \bar{h}_{22}), \quad (3.24)$$

$$R_{0102} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{12} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{h}_{12}. \quad (3.25)$$

O tensor de curvatura de Riemann contém duas funções independentes de $t - z/c$, que pode ser chamado os dois graus de liberdade $h_+ = h_{11} = -h_{22}$ e $h_\times = h_{12} = h_{21}$:

$$R_{0101} = -R_{0202} = -\frac{1}{2} \ddot{h}_+, \quad (3.26)$$

$$R_{0102} = -R_{0201} = -\frac{1}{2} \ddot{h}_\times. \quad (3.27)$$

Além das componentes (obtidas a partir do tensor de Riemann) \bar{h}_{11} , \bar{h}_{22} e \bar{h}_{12} , o gauge de Lorentz permite obter graus de liberdade extras (não-físicos), para o $h_{00} = -h_{33} = \frac{1}{2}(\bar{h}_{11} + \bar{h}_{22})$, que não aparece no tensor de curvatura. Nesse caso, para entender a natureza da liberdade de gauge, considera-se uma onda monocromática (considera-se que a onda vem propagando-se de muito longe):

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} \cos(\kappa_\mu x^\mu), \quad (3.28)$$

onde $A_{\alpha\beta}$ é um tensor constante (e simétrico) que representa a amplitude da onda e $\kappa_\alpha = [-\omega, \vec{\kappa}]$ é o vetor de onda com $\omega = c \cdot |\vec{\kappa}|$ sendo a frequência e um vetor nulo

constante ($\kappa_\mu \kappa^\mu = 0$). A condição do gauge de Lorenz (3.14) aplicada a solução de onda monocromática (3.28) fornece:

$$\frac{\partial \bar{h}^{\mu\alpha}}{\partial x^\mu} = -\kappa_\mu A^{\mu\alpha} \text{sen}(\kappa_\mu x^\mu) = -\kappa_\mu A^{\mu\alpha} \text{sen}(\vec{\kappa} \cdot \vec{x} - \omega t) = 0 \quad (3.29)$$

que é satisfeita se $\kappa_\mu A^{\mu\alpha} = 0$, que é uma onda transversa.

A perturbação de onda plana é uma função somente de t e z , as derivadas parciais $\partial/\partial t$ e $\partial/\partial z$ sozinhas podem não desaparecer e desde que as componentes da métrica são funções de t e z na forma $t - z/c$, $d/dz = -c^{-1}\partial/\partial t$.

A perturbação métrica $\bar{h}_{\alpha\beta}$ é especificada pelas dez componentes independentes da matriz simétrica $A_{\alpha\beta}$. Portanto, a condição de Lorenz³:

$$k_\mu A^{\mu\alpha} = 0, \quad (3.30)$$

impõe quatro condições nestas dez componentes, que leva a seis componentes independentes. Existe a liberdade com o gauge de Lorenz para fazer uma transformação de gauge infinitesimal adicional gerada pelo vetor ξ_α que satisfaz a condição harmônica:

$$\square \xi_\alpha = 0, \quad (3.31)$$

uma solução para esta equação que é compatível com a perturbação métrica de onda plana monocromática é:

$$\xi_\alpha = -C_\alpha \text{sen}(k_\mu x^\mu), \quad (3.32)$$

onde $C_\alpha = C_0, C_1, C_2, C_3$ são quatro constantes arbitrárias, contabilizando quatro graus de liberdade do gauge. A perturbação $h_{\mu\nu}$ tem somente dois graus de liberdade remanescente.

A onda plana propaga-se na direção especificada pela parte espacial do vetor κ_α , ou seja, na direção de z :

$$\hat{n} = \frac{c \vec{\kappa}}{\omega}, \quad (3.33)$$

onde \hat{n} é o vetor unitário na direção de propagação. Uma vez que κ_α é escolhido, existem dez componentes independentes da perturbação métrica ($\hat{h}_{\alpha\beta}$) especificado pelas dez componentes da matriz simétrica $A_{\alpha\beta}$.

Nós impomos agora uma condição de gauge harmônico. Qualquer transformação de coordenadas da forma:

$$x_{new}^\mu \rightarrow x_{old}^\mu + \xi^\mu, \quad (3.34)$$

³ Esta condição nos mostra a propriedade da onda transversal com A e k ortogonais.

pode levar a condição de coordenadas hamônica:

$$\square x^\mu = 0 \quad (3.35)$$

enquanto temos $\square \xi^\mu = 0$, com a liberdade de escolher a solução, como mostrada pela equação (3.32). Com essa liberdade de gauge, seguimos para assumir um novo conjunto de coeficientes, C_α^{new} . Pela transformação (3.34), a mudança resultante em nossa perturbação métrica pode ser escrita:

$$h_{\alpha\beta}^{new} = h_{\alpha\beta}^{old} - \partial_\alpha \xi_\beta - \partial_\beta \xi_\alpha, \quad (3.36)$$

que induz uma mudança na perturbação do traço-reverso:

$$\bar{h}_{\alpha\beta}^{new} = h_{\alpha\beta}^{new} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h^{new}, \quad (3.37)$$

substituindo (3.36) em (3.37) mais a expressão $h^{new} = h^{old} - 2\partial_\lambda \xi^\lambda$, temos:

$$\bar{h}_{\alpha\beta}^{new} = h_{\alpha\beta}^{old} - \partial_\alpha \xi_\beta - \partial_\beta \xi_\alpha - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} (h^{old} - 2\partial_\lambda \xi^\lambda) = h_{\alpha\beta}^{old} - \partial_\alpha \xi_\beta - \partial_\beta \xi_\alpha + \eta_{\alpha\beta} \eta^{\gamma\lambda} \partial_\gamma \xi_\lambda. \quad (3.38)$$

Dada a perturbação métrica do traço reverso $\bar{h}_{\alpha\beta}(\bar{h}_{\alpha\beta}^{new})$ em um gauge de Lorentz arbitrário, a correspondente perturbação do gauge transverso e sem traço é:

$$h_{\alpha\beta}^{TT} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x^\beta} + \eta_{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu}, \quad (3.39)$$

derivando a expressão (3.32) e substituindo juntamente com a (3.28) em (3.39), encontramos:

$$h_{\alpha\beta}^{TT} = A_{\alpha\beta} \cos(\kappa_\mu x^\mu) + C_\alpha \kappa_\beta \cos(\kappa_\mu x^\mu) + C_\beta \kappa_\alpha \cos(\kappa_\mu x^\mu) - \eta_{\alpha\beta} C_\nu \kappa^\nu \cos(\kappa_\mu x^\mu), \quad (3.40)$$

onde podemos identificar $h_{\alpha\beta}^{TT} = A_{\alpha\beta}^{TT} \cos(\kappa_\mu x^\mu)$, sendo $A_{\alpha\beta}^{TT}$ dada pela expressão:

$$A_{\alpha\beta}^{TT} = A_{\alpha\beta} + C_\alpha \kappa_\beta + C_\beta \kappa_\alpha - \eta_{\alpha\beta} C_\nu \kappa^\nu. \quad (3.41)$$

Assumimos que $A_{\alpha\beta}^{TT}$ é espacial, se $u^\mu = d/dt$ é um vetor tipo-tempo e então consideramos $A_{\mu\nu}^{TT} u^\nu = 0$. Dada a identidade:

$$\kappa^\mu A_{\mu\nu}^{TT} u^\nu = \kappa^\mu A_{\mu\nu} u^\nu + \kappa^\mu C_\mu \kappa_\nu u^\nu + \kappa^\mu \kappa_\mu u^\nu + \kappa^\mu \kappa_\mu C_\nu u^\nu - \kappa_\mu u^\mu C_\nu \kappa^\nu \equiv 0, \quad (3.42)$$

agora, vamos encontrar a componente espacial de $C_\nu \kappa^\nu$, a partir da perturbação de traço livre:

$$0 = \eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu}^{TT} = \eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu} C_\mu \kappa_\nu + \eta^{\mu\nu} C_\mu \kappa_\nu - \eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} C_\nu \kappa^\nu = \eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} + 2C_\mu \kappa^\mu - 4C_\nu \kappa^\nu, \quad (3.43)$$

de (3.43), chegamos a seguinte relação:

$$\eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} + 2C_\mu \kappa^\mu - 4C_\nu \kappa^\nu = 0 \implies -2C_\mu \kappa^\mu = -\eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} \implies C_\mu \kappa^\mu = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu}, \quad (3.44)$$

a relação (3.44) especifica a última componente de C_α (da solução de condição harmônica) e usa a última liberdade de gauge. Podemos escrever o vetor tipo-tempo \mathbf{u} , de modo que $u^0 = 1$ e $u^i = 0$. Então a condição espacial:

$$h_{\alpha 0}^{TT} = 0 \quad (3.45)$$

significa que apenas h_{ij} pode ser diferente de zero, ou seja, puramente espacial, levando somente seis componentes independentes numa matriz simétrica 3×3 e sem traço⁴. Temos também a condição:

$$\delta^{ij} h_{ij}^{TT} = 0 \quad (3.46)$$

que é a condição sem traço e deixa cinco componentes independentes na matriz h_{ij} assumida anteriormente. Por fim, temos:

$$\delta^{ik} \frac{\partial h_{ij}^{TT}}{\partial x^k} = 0 \quad (3.47)$$

que são três equações que impõem a condição transversa e deixa apenas dois graus de liberdade.

Em resumo, o procedimento para chegar a um gauge-TT supõe uma onda plana monocromática arbitrária. Uma vez que, qualquer onda plana é uma superposição de ondas monocromáticas e desde que as condições de gauge: espacial ($h_{\alpha 0}^{TT} = 0$), sem traço ($\delta^{ij} h_{ij}^{TT} = 0$) e transversa ($\delta^{ik} \partial h_{ij}^{TT} / \partial x^k = 0$) sejam todas lineares. São adotadas as condições de gauge-TT, pois as únicas amplitudes não nulas são $A_+ = A_{11} = -A_{22}$ e $A_\times = A_{12} = A_{21}$ que compõem a parte espacial do tensor de amplitude $A_{\mu\nu}$. Este gauge é chamado sem traço devido à $\bar{h}^{new} = \bar{h}^{old} = 0$ e $A_\mu^\mu = 0$, já que A é um tensor de traço nulo.

3.2 Propriedades Físicas das Ondas Gravitacionais

Por meio da perturbação métrica foi mostrado que as ondas gravitacionais possuem dois estados de polarização (h_+ e h_\times) e viajam à velocidade da luz pelo universo. Para obter uma interpretação física dos efeitos de uma onda gravitacional, consideraremos um conjunto de partículas próximas.

⁴ De uma matriz simétrica 3×3 e sem traço de h_{ij} , temos que cinco componentes são independentes: $h_{21} = h_{12}$, $h_{31} = h_{13}$, $h_{23} = h_{32}$, h_{11} , h_{22} e h_{33} .

Semelhante a seção anterior, continuamos assumindo uma onda gravitacional plana a fim de investigarmos os seus efeitos com o movimento relativo de duas partículas próximas em queda livre. Assumindo que essas partículas estão separadas pelo vetor (espacial):

$$\zeta = \zeta(\text{sen}\theta\text{cos}\phi e_1 + \text{sen}\theta\text{sen}\phi e_2 + \text{cos}\theta e_3), \quad (3.48)$$

e a aceleração relativa das duas partículas é:

$$a_j = -R_{0i0j}\zeta^j, \quad (3.49)$$

este mostra que o tensor de Riemann é localmente medido simplesmente observando a alteração na distância própria entre geodésicas. Lembrando que as únicas componentes que não são zero do tensor de Riemann são: $R_{0101} = -R_{0202} = -1/2\ddot{h}_+$ e $R_{0201} = -R_{0102} = -1/2\ddot{h}_\times$. Fazendo $i = 1, 2$, a equação (3.49) torna:

$$a_1 = -R_{0101}\zeta^1 - R_{0102}\zeta^2 = \frac{1}{2}\ddot{h}_+\zeta\text{sen}\theta\text{cos}\phi + \frac{1}{2}\ddot{h}_\times\zeta\text{sen}\theta\text{sen}\phi, \quad (3.50)$$

$$a_2 = -R_{0202}\zeta^2 - R_{0201}\zeta^1 = -\frac{1}{2}\ddot{h}_+\zeta\text{sen}\theta\text{sen}\phi + \frac{1}{2}\ddot{h}_\times\zeta\text{sen}\theta\text{cos}\phi, \quad (3.51)$$

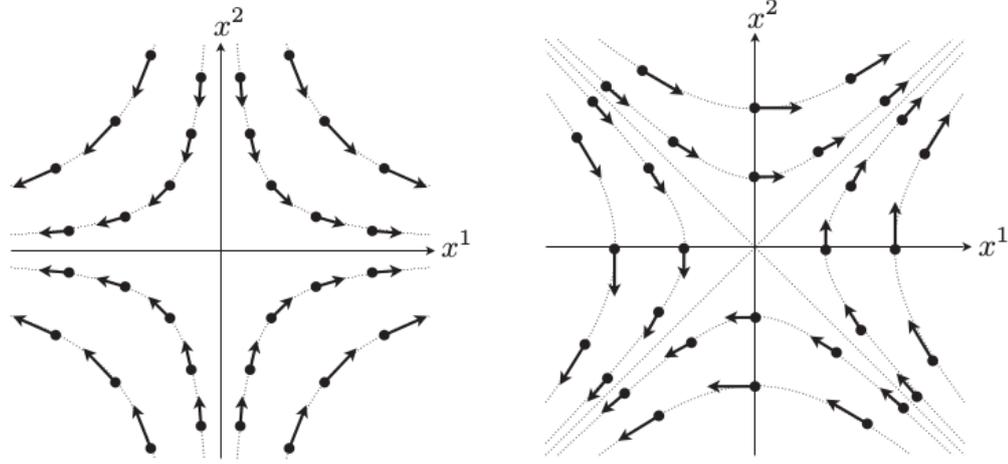
$$a_3 = 0, \quad (3.52)$$

a aceleração é transversa à direção de propagação da onda, pois considera uma onda viajando na direção- z e variando suas distâncias relativas no plano $x - y$. ζ pode ser dado como as componentes de um vetor posição dada a separação espacial física correta quando contraído com o tensor Euclidiano δ_{ij} , ou seja, $l^2 = \delta_{ij}\zeta^i\zeta^j$, assumindo que essas partículas estão em um plano (x^1, x^2) perpendicular à direção de propagação e que $\zeta^3 = 0$. Sendo que, somente a separação física na direção transversa que varia, desde que as partículas permaneçam no plano perpendicular à propagação da onda. De modo que a onda gravitacional é transversa, não apenas na descrição matemática ($h_{\mu\nu}^{TT}$), mas também nos seus efeitos físicos (ver Figura 9).

Considerando o caso de partículas separadas no plano transversal com $\theta = 90$ graus, temos:

1. ondas com polarização *plus*, seguem as condições: $\ddot{h}_\times = 0$, $\ddot{h}_+ > 0$, $a_1 \propto x^1$, $a_2 \propto -x^2$; com $(x^1, x^2) = (\zeta\text{cos}\phi, \zeta\text{sen}\phi)$.
2. ondas com polarização *cross*, assumem as condições: $\ddot{h}_+ = 0$, $\ddot{h}_\times > 0$, $a_1 \propto x^2$, $a_2 \propto -x^1$.

Figura 9 Diagrama das linhas de força no plano transversal. Polarização *plus* (à esquerda) e polarização *cross* (à direita).



FONTE: Creighton e Anderson (2011)

Para chegar a evolução de como o vetor separação evolui no tempo, partimos do vetor unitário ao longo do vetor separação $\mathbf{e}_\zeta = \vec{\zeta}/\zeta$ e a componente da aceleração do desvio geodésico nesta direção é:

$$\mathbf{a}_\zeta = \mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{a} = -\frac{1}{\zeta} R_{0i0j} \zeta^i \zeta^j = \zeta \left(\frac{1}{2} \ddot{h}_+ \text{sen}^2 \theta \cos 2\phi + \frac{1}{2} \ddot{h}_\times \text{sen}^2 \theta \text{sen} 2\phi \right), \quad (3.53)$$

assumindo que uma partícula está em repouso com relação a outra, encontramos:

$$\zeta(t) = \zeta(0) \left(1 + \frac{1}{2} h_+ \text{sen}^2 \theta \cos 2\phi + 1 + \frac{1}{2} h_\times \text{sen}^2 \theta \text{sen} 2\phi \right). \quad (3.54)$$

O desvio geodésico descreve a tendência de uma partícula ao se aproximar ou recuar de outra partícula, enquanto movimenta-se sob a influência de um campo gravitacional variando espacialmente. Para duas partículas em movimento com trajetórias inicialmente paralelas, sob a presença de uma força gravitacional, pode acontecer das trajetórias serem curvadas produzindo uma aceleração relativa entre elas. No caso da equação do desvio geodésico o que causa essa curvatura é o tensor de curvatura de Riemann, levando a uma aceleração relativa. Por isso, na equação (3.49) foi assumida uma dependência linear entre a_j e R_{0i0j} .

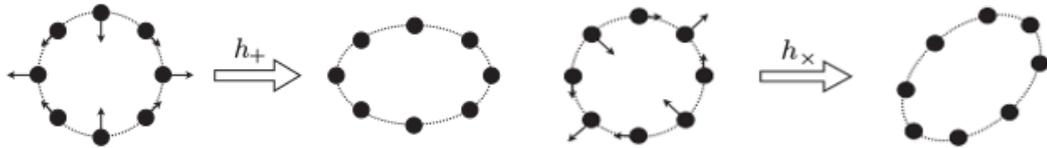
Da equação (3.54) obtemos as seguintes conclusões:

- quando $\theta = 0$ ou $\theta = 180$ graus, não há mudança do vetor separação ζ com o tempo. Isso acontece porque a onda gravitacional é transversal (dada a condição, $\kappa_\mu A^{\mu\nu} = 0$) e não afeta a distância entre as partículas separadas ao longo da direção de propagação.

- por outro lado, quando $\theta = 90$ graus, ocorre uma mudança maior no vetor separação, que é quando ζ situa-se no plano transversal. A rotação entre h_+ e h_\times depende em 2ϕ (ϕ é o ângulo azimutal), então estes são campos quadrupolares.

Nós podemos ver o efeito de cada polarização na Figura 10.

Figura 10 Um anel de partículas no plano transversal de uma onda gravitacional passando. À esquerda, o efeito causado pela passagem da onda gravitacional com polarização *plus*. À direita, o efeito causado por uma onda gravitacional com polarização *cross*. A polarização *cross* difere de uma rotação de 45 graus com relação à polarização *plus*.



FONTE: Creighton e Anderson (2011)

3.2.1 Energia Transportada por uma Onda Gravitacional

Como acabamos de ver, as ondas gravitacionais produzem efeitos físicos em partículas próximas. As partículas se aceleram uma com relação a outra na passagem da onda gravitacional. Logo, podemos perceber que esta onda carrega energia. O cálculo desta energia pode ser feito, desde que esteja associado com a radiação gravitacional. Para isso, pode ser considerada uma região do espaço-tempo grande suficiente para conter muitos comprimentos de onda da radiação das ondas gravitacionais.

Temos do lado direito da equação (3.1) o tensor de energia-momento, que pode ser escrito da seguinte forma:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{c^4}{8\pi G} G_{\alpha\beta}, \quad (3.55)$$

esse tensor é criado pela perturbação da onda gravitacional de primeira ordem. Para fazer $T_{\alpha\beta}$ gauge invariante, podemos desempenhar uma integral média sobre uma região do espaço-tempo grande suficiente para conter várias oscilações de ondas gravitacionais. Reescrevendo a equação (3.55), encontramos:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{c^4}{8\pi G} \left\langle R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} R \right\rangle, \quad (3.56)$$

e escrevendo o tensor de Ricci, como:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\beta}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \Gamma_{\mu\nu}^{\nu} - \Gamma_{\nu\beta}^{\mu} \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu}, \quad (3.57)$$

assumimos o seguinte:

1. adota-se as coordenadas harmônicas no gauge-TT, então: $h_{0\mu}^{TT} = 0$, $\delta^{ik} \frac{\partial h_{ij}^{TT}}{\partial x^k} = 0$ e $\delta^{ij} h_{ij}^{TT} = 0$;
2. todos os termos da forma $\frac{\partial T_{\beta\dots\gamma}}{\partial x^\alpha}$ podem ser desprezados;
3. usamos as equações de campo $\square h_{ij}^{TT} = 0$.

Após considerar as aproximações feitas anteriormente, o tensor de momento-energia resulta em:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{c^4}{32\pi G} \left\langle \frac{\partial h_{TT}^{ij}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial h_{ij}^{TT}}{\partial x^\beta} \right\rangle. \quad (3.58)$$

Da equação (3.58) obteremos uma expressão para uma onda gravitacional plana. Assumindo uma onda plana viajando na direção x^3 e escrevendo a perturbação métrica em função do tempo retardado, temos:

$$h_{ij}^{TT} = h_{ij}^{TT}(t - z/c) = h_+(t - z/c)e_{ij}^+ + h_\times(t - z/c)e_{ij}^\times, \quad (3.59)$$

a perturbação h_{ij}^{TT} é uma combinação das duas polarizações da onda gravitacional. Considerando a relação (3.59) e que $e_+^{ij}e_+^+ = e_\times^{ij}e_\times^\times = 2$ e $e_+^{ij}e_\times^\times = 0$, podemos reescrever a equação (3.58) da forma:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{c^4}{16\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle. \quad (3.60)$$

As únicas componentes do tensor momento-energia que não desaparecem são: $T_{00} = -cT_{03} = -cT_{30} = c^2T_{33}$. Essas componentes representam a densidade de energia/fluxo na direção de propagação da onda gravitacional. Para uma onda plana monocromática com frequência ω viajando na direção $z = x^3$, temos:

$$h_{ij}^{TT} = A_+ \cos[\omega(t - z/c) + \delta_+] e_{ij}^+ + A_\times \cos[\omega(t - z/c) + \delta_\times] e_{ij}^\times, \quad (3.61)$$

a média na equação (3.60) pode ser assumida como sendo uma média temporal ao longo de muitos ciclos, $\langle \cos^2 \omega(t - z/c) \rangle = 1/2$, de modo que se substituirmos (3.61) em (3.58), chegamos à expressão:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{c^4}{32\pi G} \omega^2 (A_+^2 + A_\times^2), \quad (3.62)$$

da mesma forma as únicas componentes que não desaparecem são: $T_{00} = -cT_{03} = -cT_{30} = c^2T_{33}$.

3.3 Produção de Ondas Gravitacionais

As ondas gravitacionais resultam da aceleração de massa. Os objetos astrofísicos que geram as ondas gravitacionais experimentam uma reação *back-reaction* a partir dessas ondas. Para calcular a produção das ondas gravitacionais por um sistema dinâmico são necessárias:

- a expressão de "far – field" para $h_{\mu\nu}$, que depende do movimento dos corpos;
- as equações de movimento dos próprios corpos para examinar as equações de movimento para campo próximo, incluindo a perturbação $h_{\mu\nu}$ de campo próximo.

As equações de movimento Newtoniana são boas suficientes para descrever a dinâmica de "zona próxima" e incorporar a reação da radiação gravitacional com o chamado *back reaction* que aplica energia e momento angular.

Até agora, temos considerado a natureza da radiação gravitacional na zona de campo distante, ou seja, longe da fonte de radiação, por meio da aproximação de campo fraco. No campo distante a perturbação métrica é radiativa e os campos são soluções das equações de Einstein no vácuo. Só que agora voltamos para o problema de conectar a solução de campo distante ao campo próximo para as equações de Einstein em um espaço-tempo sem vácuo.

Escolhemos as coordenadas harmônicas em que a perturbação métrica do traço reverso satisfaz ao gauge de Lorentz e então as equações de campo são dadas como em (3.12). Os termos no tensor de Einstein que são de segunda ordem na perturbação métrica, podem ser pensado como uma fonte efetiva adicional para a perturbação métrica linear, que seria uma contribuição da própria radiação gravitacional para o tensor de momento-energia. Escrevendo as equações de campo definindo o tensor de momento-energia efetivo $\tau^{\alpha\beta}$, para incluir tanto o tensor da matéria quanto os termos de segunda ordem, temos:

$$\square \bar{h}^{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4} \tau^{\alpha\beta}. \quad (3.63)$$

Devido à condição do gauge de Lorenz, temos:

$$\square \frac{\partial \bar{h}^{\mu\alpha}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \square \bar{h}^{\mu\alpha} = -\frac{16\pi G}{c^4} \frac{\partial \tau^{\mu\alpha}}{\partial x^\mu} = 0, \quad (3.64)$$

logo, podemos escrever que:

$$\frac{\partial \tau^{\mu\alpha}}{\partial x^\mu} = 0, \quad (3.65)$$

que são as leis de conservação neste sistema de coordenadas. A solução das equações de campo é dada por:

$$\bar{h}^{\alpha\beta}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{\tau^{\alpha\beta}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}', \quad (3.66)$$

esta equação pode ser resolvida tanto para a zona de campo longe quanto para a de campo próximo.

A solução de campo distante (*far-field*) conecta o campo gravitacional radiativo com a dinâmica da fonte que o gera. A zona de campo distante segue a condição: $R \ll \lambda_{OG} \ll r$, onde R é tamanho da fonte, λ_{OG} é o comprimento da onda gravitacional e r é a distância da fonte. Esse tipo de aproximação significa que $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \simeq r$ é aproximadamente constante sobre a fonte inteira. Seguindo essa e outras aproximações chegamos na seguinte expressão:

$$\bar{h}^{ij}(t, x) \simeq \frac{2G}{c^4 r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int x^i x'^j \tau^{00}(t - r/c, x') d^3x', \quad (3.67)$$

onde o termo do integrando representa o tensor de quadrupolo $I^{ij}(t)$. Reescrevendo a solução (3.67) no gauge-TT, temos:

$$h_{ij}^{TT}(t) \simeq \frac{2G}{c^4 r} \ddot{I}_{ij}^{TT}(t - r/c), \quad (3.68)$$

com

$$I_{ij}^{TT} = P_{ik} I^{kl} P_{lj} - \frac{1}{2} P_{ij} P^{kl} I^{kl}, \quad (3.69)$$

o segundo termo do lado direito faz I_{ij}^{TT} traço livre.

Para a solução de campo próximo é necessário calcular as equações de movimento que descrevem a dinâmica da fonte, seguindo a condição: $R \ll r \ll \lambda_{OG}$. No caso de duas estrelas de tamanho R orbitando uma em torno da outra com velocidade angular ω , a solução de campo próximo é válida quando $R \ll r \ll c/\omega$. No limite Newtoniano, precisamos apenas calcular o potencial Newtoniano para determinar a dinâmica do sistema, que pode ser dado por:

$$\Phi(t, x) = -G \int \frac{\tau^{00}(t, \mathbf{x}') + c^{-2} \delta_{ij} \tau^{ij}(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}'. \quad (3.70)$$

E expandindo o termo $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1}$ em potência de $1/r$, obtemos:

$$\Phi(t, x) = -G \left[\frac{M}{r} + \frac{D_i x^i}{r^3} + \frac{3 I_{ij} x^i x^j}{2 r^5} + \dots \right], \quad (3.71)$$

onde M é a massa total, D^i é o momento de dipolo e I^{ij} é o momento de quadrupolo. Por causa da condição que $R \ll \lambda$, há uma região longe da fonte ($r > R$), mas na

zona próxima ($r \ll \lambda$) em que a gravidade Newtoniana permanece válida com uma boa precisão. Nesta região, o potencial Newtoniano pode ser expandido em termos dos multipolos, como em (3.71). Se o observador move-se na zona radiativa ($r \gtrsim \lambda$), podemos descrever a parte estática do potencial Newtoniano em termos da massa e momento de dipolo, que não aparecem na emissão da radiação gravitacional, mas o terceiro termo na expansão de Φ , envolvendo o momento de quadrupolo sem traço passa a ser descrito em termos Newtoniano. Isto ocorre, porque os efeitos retardados, devido à emissão de OGs, tornam-se significantes na zona de radiação e a *back-reaction*, devido à radiação das OGs, podem mudar a forma desta correção. Verifica-se que a *back-reaction* pode ser expressa adicionando um potencial Newtoniano efetivo da forma:

$$\Phi_{reac} = \frac{1}{5} \frac{d\mathbb{I}_{ij}}{dt^5} x^i x^j. \quad (3.72)$$

A existência de tal reação é uma necessidade física desde que a radiação de OGs ocorre pela perda de energia e momento angular.

De modo que, a solução de campo distante está relacionada com o tensor de quadrupolo no potencial Newtoniano de zona próxima:

$$h_{ij}^{TT}(t) \simeq \frac{2G}{c^4 r} \ddot{\mathbb{I}}_{ij}^{TT}(t - r/c). \quad (3.73)$$

3.3.1 Luminosidade das Ondas Gravitacionais

Define-se como o fluxo da onda gravitacional: a quantidade de energia da radiação gravitacional dE passando através de um elemento de área de uma esfera de raio r , circundando a fonte de onda gravitacional em um tempo dt . O fluxo pode ser escrito, como:

$$\frac{dE}{dAdt} = -\frac{c^3}{32\pi G} \langle \dot{h}_{TT}^{ij} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle = -\frac{c^3}{16\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle, \quad (3.74)$$

lembrando que temos:

$$h_{ij}^{TT} = h_{ij}^{TT}(t - z/c) = h_+(t - z/c) e_{ij}^+ + h_\times(t - z/c) e_{ij}^\times. \quad (3.75)$$

Substituindo a expressão $h_{ij}^{TT} \simeq 2G/c^4 r \ddot{\mathbb{I}}_{ij}^{TT}(t - r/c)$ na equação (3.74), podemos reescrevê-la em termos do tensor de quadrupolo:

$$\frac{dE}{dAdt} = -\frac{G}{8\pi c^5 r^2} \langle \ddot{\mathbb{I}}_{TT}^{ij} \ddot{\mathbb{I}}_{ij}^{TT} \rangle, \quad (3.76)$$

sendo,

$$\ddot{\mathbb{I}}_{ij}^{TT} = (P_{ik} P_{jl} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{kl}) \ddot{\mathbb{I}}^{kl}, \quad (3.77)$$

Na fonte, a energia radiada por unidade de tempo em ângulo sólido $d\Omega$ é:

$$-\frac{dE}{dt d\Omega} = \frac{1}{4\pi} \frac{G}{c^5} \left\langle \frac{1}{2} \frac{d^3}{dt^3} (\mathbb{F}_{ij} \mathbb{F}^{ij}) - \hat{n}_i \hat{n}_j \frac{d^3}{dt^3} (\mathbb{F}^{ik} \mathbb{F}_k^j) + \frac{1}{4} \hat{n}_i \hat{n}_j \hat{n}_k \hat{n}_l \frac{d^3}{dt^3} (\mathbb{F}^{ij} \mathbb{F}^{kl}) \right\rangle, \quad (3.78)$$

sendo $P_{ij} d^3/dt^3 (\mathbb{F}^{ij}) = -\hat{n}_i \hat{n}_j d^3/dt^3 (\mathbb{F}_{ij})$. Para obter a luminosidade das ondas gravitacionais, integramos sobre ângulo sólido, resultando na seguinte expressão:

$$L_{OG} = -\frac{dE}{dt} = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \left\langle \frac{d^3}{dt^3} (\mathbb{F}_{ij} \mathbb{F}^{ij}) \right\rangle. \quad (3.79)$$

O movimento dos corpos gera as ondas gravitacionais, que por sua vez carregam energia. De modo que, deve haver uma reação à radiação gravitacional agindo de volta nos corpos, aplicando conservação de energia. Definimos então, como auto-força (*self-force*) de um corpo, a força que este mesmo corpo encontra como um resultado do seu próprio campo gravitacional. Acontece que a auto-força contém uma parte não-conservativa e uma parte conservativa. A parte não-conservativa é responsável pela radiação de energia e a conservativa muda o movimento do corpo embora não produza qualquer radiação.

Nesse contexto, é definido como a força de reação à radiação, a seguinte expressão:

$$F_j^{RR} = -\frac{2}{5} \frac{G}{c^5} m x^i \frac{d^5 \mathbb{F}_{ij}}{dt^5}, \quad (3.80)$$

essa força é obtida de um potencial de reação à radiação, encontrada na forma $F^{RR} = -\nabla \Phi^{RR}$, onde o potencial é dado por:

$$\Phi^{RR} = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} x^i x^j \frac{d^5 \mathbb{F}_{ij}}{dt^5}, \quad (3.81)$$

esse potencial de reação à radiação é adicionado ao potencial Newtoniano para obter as equações de movimento para um sistema que inclui os efeitos de perda de energia para as ondas gravitacionais. Além do limite Newtoniano, potenciais adicionais podem ser introduzidos para descrever a reação à radiação.

3.3.2 Momento Angular Carregado pelas Ondas Gravitacionais

Uma partícula se movendo sob a influência de um potencial de reação à radiação pode perder momento angular e energia. Então a força de reação à radiação pode ser usada para obter uma expressão para o momento angular carregado por uma onda gravitacional. A taxa de variação do momento angular de uma dada partícula sob influência de uma força de reação à radiação é:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{x} \times \mathbf{F}^{RR}, \quad (3.82)$$

onde \mathbf{x} é a posição da partícula. Substituindo a equação (3.80) em (3.82), encontramos que o \mathbf{J} é:

$$\Delta \mathbf{J}_i = -\frac{2G}{5c^5} \varepsilon_{ijk} \int m x^j x^l \frac{d^5 \mathbb{I}_l^k}{dt^5} dt, \quad (3.83)$$

onde ε_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita. Como definido anteriormente $I^{jl} = m x^j x^l$ e integrando por partes duas vezes, obtemos uma expressão para a taxa de momento angular radiada por um sistema:

$$\frac{dJ_i}{dt} = -\frac{2G}{5c^5} \varepsilon_{ijk} \left\langle \frac{d^2}{dt^2} (\mathbb{I}^{jl} \dot{\mathbb{I}}^{jl}) \right\rangle. \quad (3.84)$$

3.4 Sistema Binário Orbitando

Assumindo um sistema binário composto por duas partículas pontuais com massas m_1 e m_2 em órbita circular no plano $x^1 - x^2$ e com vetor momento angular orbital apontando ao longo do eixo x^3 . Nas coordenadas do centro de massa, estes corpos estão em uma distância constante r_1 e r_2 da origem de coordenadas.

Definindo os seguintes parâmetros, temos: a separação orbital $a = r_1 + r_2$, a massa total do sistema $M = m_1 + m_2$, a massa reduzida do sistema $\mu = m_1 m_2 / M$ e a posição de cada partícula é $r_1 = a m_2 / M$ e $r_2 = a m_1 / M$. Considerando esses parâmetros principais do sistema binário, temos a seguir que as únicas componentes diferentes de zero do tensor de quadrupolo I_{ij} são:

$$I_{11} = \frac{1}{2} \mu a^2 (1 + \cos 2\varphi), \quad (3.85)$$

$$I_{22} = \frac{1}{2} \mu a^2 (1 - \cos 2\varphi), \quad (3.86)$$

$$I_{12} = I_{21} = \frac{1}{2} \mu a^2 \sin 2\varphi, \quad (3.87)$$

onde $\varphi = \omega t$ é a fase orbital e aumenta uniformemente com o tempo. Para calcular a perturbação métrica, derivamos duas vezes as expressões (3.85-3.87) encontrando:

$$\ddot{I}_{11} = -2\mu a^2 \omega^2 \cos 2\varphi, \quad (3.88)$$

$$\ddot{I}_{22} = 2\mu a^2 \omega^2 \cos 2\varphi, \quad (3.89)$$

$$\ddot{I}_{12} = \ddot{I}_{21} = -2\mu a^2 \omega^2 \sin 2\varphi. \quad (3.90)$$

Os tensores de quadrupolo nos fornecem ainda as relações para as duas polarizações das ondas gravitacionais:

$$h_+ = -\frac{4G\mu a^2\omega^2}{c^4 r} \cos 2\varphi, \quad (3.91)$$

$$h_\times = -\frac{4G\mu a^2\omega^2}{c^4 r} \sin 2\varphi. \quad (3.92)$$

A frequência da onda gravitacional é dada pela relação $f_{og} = 2f_{orb} = \omega/\pi$, a fim de eliminarmos os parâmetros a e ω , usaremos $\nu = a\omega$ e da terceira lei de Kepler, temos $GM\omega = \nu^3$. Escrevendo ν em termos da frequência da onda gravitacional, encontramos:

$$\nu = (\pi GM f_{og})^{1/3}, \quad (3.93)$$

em termos do período orbital,

$$\nu = \left(\frac{2\pi GM}{P}\right)^{1/3}, \quad (3.94)$$

da separação orbital,

$$\nu = \left(\frac{GM}{a}\right)^2, \quad (3.95)$$

da fase orbital,

$$\varphi = \omega t = \left(\frac{\nu}{c}\right)^3 \frac{c^3 t}{GM}. \quad (3.96)$$

A perda de energia do sistema vem da energia orbital. A energia do sistema é dada por:

$$E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{Gm_1m_2}{a} = -\frac{1}{2}\mu\nu^2, \quad (3.97)$$

e a luminosidade das ondas gravitacionais é:

$$L_{og} = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \left\langle \frac{d^3}{dt^3} (I_{11}^2 + I_{22}^2 + 2I_{12}^2) \right\rangle = \frac{32}{5} \frac{c^5}{G} \eta^2 \left(\frac{\nu}{c}\right)^{10}, \quad (3.98)$$

onde $\eta = \mu/M$ é a razão de massa simétrica. Assumindo que $L_{og} = -dE/dt$, encontramos:

$$\frac{d(\nu/c)}{dt} = \frac{32\nu}{5} \frac{c^3}{GM} \left(\frac{\nu}{c}\right)^9. \quad (3.99)$$

3.4.1 Tempo de Coalescência

Para calcular o tempo de coalescência τ_c de um sistema binário dominado pelas ondas gravitacionais, integramos a equação (3.99) e expressamos esse tempo em termos

dos principais parâmetros discutos até aqui, como velocidade inicial v_0 , período orbital P_0 , separação orbital a_0 e frequência da onda gravitacional f_0 :

$$\tau_c = \frac{5}{256\eta} \frac{GM}{c^3} \left(\frac{v_0}{c} \right)^{-8}, \quad (3.100)$$

$$\tau_c = \frac{5}{256\eta} \frac{GM}{c^3} \left(\frac{c^3 P_0}{2\pi GM} \right)^{8/3}, \quad (3.101)$$

$$\tau_c = \frac{5}{256\eta} \frac{GM}{c^3} \left(\frac{c^2 a_0}{GM} \right)^4, \quad (3.102)$$

$$\tau_c = \frac{5}{256\eta} \frac{GM}{c^3} \left(\frac{\pi GM f_0}{c^3} \right)^{-8/3}. \quad (3.103)$$

4 Código e Modelagem Numérica

Neste capítulo é apresentado o código PHANTOM e descrita a fundamentação analítica do método *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH). A abordagem SPH é bastante apropriada para o propósito deste trabalho, visto que esta investigação é baseada no decaimento gravitacional de um par de BNSMs, em que a componente primária é circundada por um disco de gás inclinado.

4.1 Código PHANTOM

A abordagem SPH resolve as equações hidrodinâmicas na forma Lagrangiana, interpolando quantidades em um conjunto de partículas pontuais. Neste tipo de método numérico a resolução depende no número de partículas, ou seja, é maior em regiões mais densas. O código 3D PHANTOM foi escrito por Daniel Price (PRICE, 2007; LODATO; PRICE, 2010; PRICE; FEDERRATH, 2010; PRICE, 2012; PRICE et al., 2018).

4.1.1 Código baseado no método SPH

4.1.1.1 Teoria de Interpolação de Kernel

A abordagem SPH é fundamentada na definição de um conjunto de partículas pontuais, em que cada ponto possui massa e posição próprias. Cada partícula possui valores de um conjunto de quantidades, tais como velocidade, densidade, energia térmica, entropia, entre outros. Para calcular quantidades contínuas de partículas pontuais é usada a Teoria de Interpolação. Para isso é necessário desenvolver um método matemático que expresse uma função contínua começando dos valores que são assumidos em uma função discreta, que no caso da abordagem SPH é sem *grid*, isto é, um conjunto de pontos no espaço.

Considerando uma das quantidades A e definindo $A(\mathbf{r})$, temos a seguinte identidade:

$$A(\mathbf{r}) = \int A(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')d\mathbf{r}', \quad (4.1)$$

onde A é uma variável escalar arbitrária e δ é a função delta de Dirac. Esta integral é aproximada por:

$$A(\mathbf{r}) = \int A(\mathbf{r}')W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h)d\mathbf{r}' \quad (4.2)$$

onde substituímos a função delta por um *smoothing* kernel, W , com largura finita, h . Onde W tem duas principais propriedades:

$$\int W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h)d\mathbf{r}' = 1, \quad (4.3)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (4.4)$$

Agora, a integral (4.2) é discretizada em um conjunto finito de pontos de interpolação, ou seja, as partículas:

$$A(\mathbf{r}) = \int \frac{A(\mathbf{r}')}{\rho(\mathbf{r}')} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \approx \sum_{b=1}^N m_b \frac{A_b}{\rho_b} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b, h) \quad (4.5)$$

na equação (4.5) substituímos a integral por um somatório e o elemento de massa com a massa da partícula, $m_p = \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$. O somatório interpolado na equação acima é a base para todo o formalismo SPH. Esse somatório apresenta uma forma geral de um interpolante de uma quantidade em qualquer ponto no espaço $A(\mathbf{r})$ de quantidades definidas nas próprias partículas (A_b, ρ_b, m_b) . No caso dos termos de gradiente podem ser calculados diretamente pela derivada da equação (4.5):

$$\nabla A(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int \frac{A(\mathbf{r}')}{\rho(\mathbf{r}')} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \approx \sum_b m_b \frac{A_b}{\rho_b} \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b, h), \quad (4.6)$$

substituindo A por \mathbf{A} na equação anterior, temos expressões similares com quantidades vetoriais, tais como:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \sum_b m_b \frac{\mathbf{A}_b}{\rho_b} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b, h), \quad (4.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \sum_b m_b \frac{\mathbf{A}_b}{\rho_b} \cdot \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b, h), \quad (4.8)$$

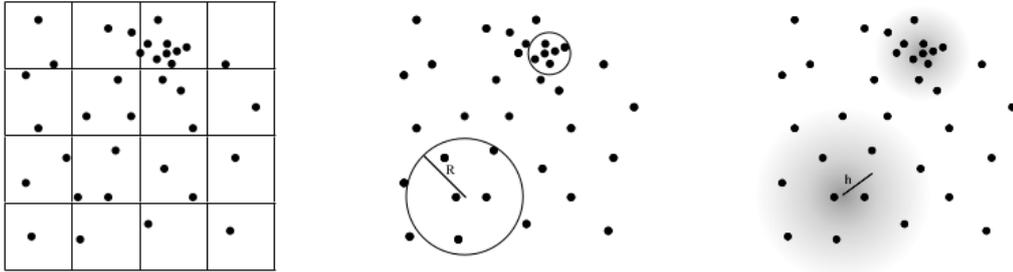
$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx - \sum_b m_b \frac{\mathbf{A}_b}{\rho_b} \times \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b, h), \quad (4.9)$$

$$\nabla^i A^i(\mathbf{r}) \approx \sum_b m_b \frac{A_b^i}{\rho_b} \nabla^i W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b, h). \quad (4.10)$$

4.1.2 Estimador da Densidade em SPH

A estimativa da densidade para uma distribuição arbitrária de N partículas de massas pontuais acontece por meio de três abordagens diferentes, como apresentada na Figura 11.

Figura 11 Diferentes abordagens para a estimativa da densidade de uma distribuição de massas pontuais.



FONTE: Price (2012)

A primeira abordagem (painel esquerdo), por meio do método *particle-mesh* calcula a densidade simplesmente dividindo a massa contida em cada célula do *grid* pelo volume. O segundo método (painel do meio) constrói um volume esférico em torno da amostra de pontos incluindo sempre o mesmo número de partículas vizinhas, ou seja, é retirado o *grid* e calculada a densidade baseada na amostragem local da distribuição de massa. Por fim, o método SPH (painel direito) possui uma abordagem que consiste no cálculo da densidade usando uma soma ponderada sobre as partículas vizinhas. O código PHANTOM se baseia nesta última abordagem e a seguir vamos descrevê-la em detalhes. De tal modo que, se substituímos A por ρ na equação (4.5), teremos como resultado a estimativa da densidade em SPH:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{b=1}^N m_b W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b, h), \quad (4.11)$$

onde W é uma função ponderada com dimensões do inverso do volume e h é um parâmetro de escala. Como mencionada anteriormente W também é referida como *smoothing kernel* e precisa satisfazer algumas propriedades, como a equação (4.3) (a conservação de massa total implica na condição de normalização) e na equação (4.4). Além dessas propriedades fundamentais, existem outras propriedades de kernel que se satisfeitas garantem precisão na estimativa de interpolação, como uma ponderação positiva e "*smoothness*"; simetria esférica, que implica em $W(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, h) \equiv W(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|, h)$; estimativa de $A(\mathbf{r})$ poderia não ser afetada por pequenas mudanças no número de partículas próximas e eficiência computacional.

Uma escolha que satisfaz as propriedades acima é a Gaussiana:

$$W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) = \frac{1}{(\sqrt{\pi}h)^d} \exp\left[-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}{h^2}\right], \quad (4.12)$$

onde d é o número de dimensões espaciais. Contudo, o uso de uma função de suporte compacto como kernel possuem vantagens, como a suposição de valores diferente de zero em um domínio finito, limitando o somatório em uma lista bem definida de partículas vizinhas.

O kernel mais usado em SPH são as funções B-spline de Schönberg, gerado como transformada de Fourier:

$$M_n(x, h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\text{sen}(kh/2)}{kh/2} \right]^n \cos(kx) dk. \quad (4.13)$$

O uso de um kernel de suporte compacto pode sempre ser mantido como uma regra valiosa do SPH para prevenir eventuais desencontros na interpretação física das equações SPH.

4.1.3 A Variação do Parâmetro h

A escolha de h é extremamente importante para os kernels de suporte compactos. Se tivéssemos um número arbitrário de partículas regularmente deslocadas (como em um *grid*) poderíamos usar o mesmo h em todo o conjunto de partículas, já que o número de partículas contido no suporte compacto seria praticamente o mesmo para cada uma. No entanto, se apenas considerarmos um deslocamento aleatório das partículas, o uso de um único h para todas elas acabará por afetar a precisão, já que algumas partículas podem não ter vizinhos.

Para aumentar a resolução em formulações SPH modernas, cada partícula tem seu próprio h associado que determina o seu raio de interação de acordo com as condições locais (PRICE; MONAGHAN, 2007). De tal modo que, h torna-se uma escolha natural para levar em conta a densidade numérica local de partículas:

$$h(\mathbf{r}) \propto n(\mathbf{r})^{-1/d}, \quad (4.14)$$

$$n(\mathbf{r}) = \sum_b [W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b, h(\mathbf{r}))], \quad (4.15)$$

sendo $n(\mathbf{r})$ o número de partículas por unidade de volume. Para partículas de massas iguais, este é equivalente a fazer h proporcional à própria densidade, desde que $1/n \equiv m/\rho$. Calculando na posição da partícula a , temos as seguintes equações (PRICE, 2012):

$$\rho(\mathbf{r}_a) = \sum_b m_b W(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b, h(\mathbf{r}_a)), \quad (4.16)$$

$$h(\mathbf{r}_a) = \eta \left(\frac{m_a}{\rho_a} \right)^{1/d}, \quad (4.17)$$

sendo η o parâmetro especificando h ($\eta \overline{\Delta x_p} = h$) em unidades da distância média entre as partículas $(m/\rho)^{1/d}$. O código PHANTOM implementa a formulação SPH completa com

h variáveis. Quando uma formulação auto consistente não é empregada é mais preciso usar uma média simples sobre kernels:

$$W_{ab} = \frac{1}{2}[W_{ab}(h_a) + W_{ab}(h_b)]. \quad (4.18)$$

Considerando a relação dada nas equações (4.16) e (4.17) é aproximadamente similar manter a massa dentro de uma esfera "smoothing" constante, desde que em 3D, tenhamos:

$$M_{tot}^a = \int_{V_a} \rho dV \approx \frac{4}{3}\pi R_{kern}^3 \rho_a, \quad (4.19)$$

onde R_{kern} é o raio de kernel ou o raio de suporte compacto, que atua como o raio de corte adimensional de W em $2h$, assim $M_{tot} = constante$ e que implica em $h^3\rho = constante$.

O parâmetro de proporcionalidade η pode ser relacionado com o número médio de vizinhos (\bar{N}_{neigh}) de acordo com:

$$\bar{N}_{neigh} = \frac{4}{3}\pi(R_{kern}\eta)^3, \quad (4.20)$$

onde $R_{kern} = 2$ em três dimensões.

Matematicamente, a equação (4.16) é para obter diretamente derivadas envolvendo h . Esta equação é independente do tempo e dependente somente da posição e da massa das partículas, o que leva ao cálculo do campo de densidade de partículas de massas pontuais (PRICE, 2012).

4.1.4 Derivadas na Teoria de Interpolação

4.1.4.1 Derivada Primeira

O gradiente da quantidade A pode ser calculado apenas transferindo derivadas de W . Escrevendo o gradiente de (4.5), temos:

$$\nabla A(r_a) = \sum_b^N m_b \frac{A_b}{\rho_b} \nabla W(|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|, h_a), \quad (4.21)$$

e expandindo $A(\mathbf{r}')$ em torno de r , encontramos:

$$\nabla A(\mathbf{r}) \approx A_a \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} \nabla_a W_{ab} + \frac{\partial A_a}{\partial \mathbf{r}^\alpha} \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a)^\alpha \nabla_\alpha W_{ab}, \quad (4.22)$$

com $W_{ab} = W(|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|, h)$. Esse resultado é válido se as seguintes condições são satisfeitas:

$$\sum_b \frac{m_b}{\rho_b} \nabla_a W_{ab} \approx 0, \quad (4.23)$$

$$\sum_b \frac{m_b}{\rho_b} (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a) \nabla_a W_{ab} \approx 1. \quad (4.24)$$

Substituindo (4.21) no lado esquerdo e subtraindo o primeiro termo do lado direito da equação (4.22), temos:

$$\sum_b m_b \frac{A_{ab}}{\rho_b} \nabla_a W_{ab} = \frac{\partial A_a}{\partial \mathbf{r}^\alpha} \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a)^\alpha \nabla_\alpha W_{ab}, \quad (4.25)$$

onde podemos rescrevê-la da forma:

$$\sum_b \frac{m_b}{\rho_b} (A_b - A_a) \nabla_a W_{ab} = \frac{\partial A_a}{\partial \mathbf{r}^\alpha} \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a)^\alpha \nabla_\alpha W_{ab}. \quad (4.26)$$

Assumindo a condição (4.24), obtemos:

$$\frac{\partial A_a}{\partial \mathbf{r}^a} = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} (A_b - A_a) \nabla_a W_{ab}. \quad (4.27)$$

Uma abordagem geral que segue várias formulações possíveis para derivadas primeiras, pode ser encontrada introduzindo funções diferenciáveis arbitrárias Φ e $1/\Phi$ ao invés de ρ :

$$\Phi \nabla A + A \nabla \Phi = \nabla(\Phi A) \rightarrow \nabla A = \frac{1}{\Phi} [\nabla(\Phi A) - A \nabla \Phi], \quad (4.28)$$

$$\frac{1}{\Phi} \nabla A + A \nabla \frac{1}{\Phi} = \nabla \left(\frac{A}{\Phi} \right) \rightarrow \nabla A = \Phi \left[\frac{1}{\Phi^2} \nabla A + \nabla \left(\frac{A}{\Phi} \right) \right], \quad (4.29)$$

onde podemos escrever da seguinte forma:

$$\nabla A_a = \sum_b \frac{\Phi_b}{\Phi_a} (A_b - A_a) \nabla W_{ab}, \quad (4.30)$$

$$\nabla A_a = \sum_b \frac{\Phi_b}{\Phi_a} A_a + \frac{\Phi_a}{\Phi_b} A_b \nabla W_{ab}. \quad (4.31)$$

Escrevendo a fórmula geral para o caso vetorial, temos:

$$\partial^j A_a^i = \sum_b \frac{\Phi_b}{\Phi_a} (A_b^i - A_a^j) \partial^j W_{ab}, \quad (4.32)$$

$$\partial^j A_a^i = \sum_b m_b \left(\frac{\Phi_b}{\Phi_a} A_a^i + \frac{\Phi_a}{\Phi_b} A_b^i \right) \partial^j W_{ab}. \quad (4.33)$$

Veremos que as equações de movimento assumem a forma como nas equações (4.31) e (4.33), que não são as estimativas mais precisas para derivadas primeiras, mas tem algumas vantagens intrínsecas sobre a formulação (4.30 e 4.32) que desaparecem para A constante.

4.1.4.2 Derivada Segunda

Derivando duas vezes a fórmula de interpolação, equação (4.5), obtemos:

$$\nabla_a^\alpha \nabla_a^\beta \mathbf{A} = \sum_b m_b \frac{A_b}{\rho_b} \nabla_a^\alpha \nabla_a^\beta W_{ab}. \quad (4.34)$$

No entanto, a diferenciação direta da segunda derivada da equação acima fornece um resultado impreciso. Alguns problemas gerados dessa diferenciação estão relacionados com a posição e o comportamento não-físico das partículas, como a transferência de calor de partículas frias para quentes no caso do laplaciano. Uma expressão geral mais precisa para derivada segunda, no caso 3D é:

$$\nabla^\alpha \nabla^\beta A_\kappa = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} A_{ab}^\kappa (5\hat{\mathbf{r}}_\alpha \hat{\mathbf{r}}_\beta \delta^{\alpha\beta}) \frac{F(|\mathbf{r}_{ab}|)}{|\mathbf{r}_{ab}|} \quad (4.35)$$

onde $5\hat{\mathbf{r}}_\alpha$ pode ser substituído por $(d+2)\hat{\mathbf{r}}_\alpha$, onde d é o número de dimensões espaciais. A equação (4.1.4.2) é uma fórmula geral, mas escrevendo-a em termo dos operadores que precisamos, por exemplo, o Laplaciano para uma quantidade escalar A é:

$$\nabla^2 \mathbf{A}_a = 2 \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} (A_a - A_b) \frac{F(|\mathbf{r}_{ab}|)}{|\mathbf{r}_{ab}|}. \quad (4.36)$$

O gradiente do divergente é obtido estabelecendo $\beta = \kappa$ e contraindo em 4.1.4.2:

$$\nabla^\alpha \nabla^\beta A_\beta = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} [(5A_{ab} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - A_{ab}] \frac{F(|\mathbf{r}_{ab}|)}{|\mathbf{r}_{ab}|}, \quad (4.37)$$

combinando as equações (4.1.4.2) e (4.1.4.2), temos:

$$\sum_b \frac{m_b}{\rho_b} [(A_{ab} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ab})\hat{\mathbf{r}}_{ab}] \frac{F_{ab}}{|\mathbf{r}_{ab}|} = \frac{1}{5} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \frac{1}{10} \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (4.38)$$

4.2 Equações SPH

,Nesta seção descreveremos as equações SPH por meio do formalismo Lagrangiano e discutiremos sobre as propriedades de conservação.

4.2.1 Equações de Movimento

Após termos descrito a Teoria de Interpolação de Kernel, obteremos as equações de movimento com a discretização específica das equações hidrodinâmicas usando o forma-

lismo Lagrangiano. Inicialmente, começamos nosso cálculo com a expressão lagrangiana clássica, dada por:

$$L = T - V, \quad (4.39)$$

onde T e V são as energias cinética e potencial, respectivamente. A lagrangiana para um fluido não dissipativo é escrita na forma:

$$L = \int [\rho v^2 - u(\rho, s) - \Phi] dV, \quad (4.40)$$

onde u é a energia interna, v é a velocidade do fluido e Φ é a energia gravitacional. Para um sistema de massas pontuais com velocidade $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ e energia interna por unidade de massa, temos:

$$L = \sum_b m_b \left[\frac{1}{2} v_b^2 - u_b(\rho_b, s_b) - \Phi_b \right], \quad (4.41)$$

onde u é escrito como uma função das variáveis termodinâmicas: densidade (ρ) e entropia (s). As equações de movimento para tal sistema podem ser derivadas do princípio de mínima ação:

$$S = \int L dt, \quad (4.42)$$

tal que,

$$\delta S = \int \delta L dt = 0, \quad (4.43)$$

onde δ é a variação com relação à pequena mudança nas coordenadas da partícula $\delta\mathbf{r}$. Considerando que a lagrangiana pode ser escrita como uma função diferenciável das posições e velocidades das partículas, temos:

$$\delta S = \int \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} \right) dt = 0. \quad (4.44)$$

Fazendo integração por partes e assumindo que $\delta \mathbf{v} = d(\delta \mathbf{r})/dt$, onde $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$, encontramos:

$$\delta S = \int \left\{ \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \right] \cdot \delta \mathbf{r} \right\} dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \cdot \delta \mathbf{r} \right]_{t_0}^t = 0. \quad (4.45)$$

Se assumimos que a variação desaparece nos tempos iniciais e finais, uma vez que $\delta \mathbf{r}$ é arbitrário, a equação de movimento dada pelas equações de Euler-Lagrange para uma partícula a é:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = 0. \quad (4.46)$$

Escrevendo os termos da Lagrangiana (4.41) como uma função das coordenadas e velocidades das partículas, temos:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = m_a \mathbf{v}_a, \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = - \sum_b m_b \frac{\partial u_b}{\partial \rho_b} \Big|_s \frac{\partial \rho_b}{\partial \mathbf{r}_a}, \quad (4.48)$$

como u é uma função de ρ e s , assumimos a entropia constante, ou seja, sem dissipação.

Da primeira lei da Termodinâmica, temos:

$$dU = TdS - PdV, \quad (4.49)$$

onde $\delta Q = TdS$ é o calor adicionado ao sistema e $\delta W = PdV$ é o trabalho realizado pela expansão e compressão do fluido. No caso do SPH, o volume não é calculado diretamente, mas é usada a estimativa do volume $V = m/\rho$ e a mudança no volume $dV = -m/\rho^2 d\rho$. Escrevendo as quantidades por unidade de massa, temos:

$$du = Tds + \frac{P}{\rho^2} d\rho. \quad (4.50)$$

Assumindo a entropia constante, isto é, o elemento de fluido não troca de calor com o meio externo e tem uma equação de estado adiabático, a mudança na energia térmica é dada por:

$$\frac{\partial u_b}{\partial \rho_b} \Big|_s = \frac{P}{\rho^2}. \quad (4.51)$$

Para obter o gradiente da densidade na equação (4.48), podemos derivar a equação (4.11) da partícula b com relação às coordenadas da partícula a , encontrando:

$$\frac{\partial \rho_b}{\partial \mathbf{r}_a} = \frac{1}{\Omega_b} \sum_c m_c \frac{\partial W_{ab}(h_b)}{\partial \mathbf{r}_a} (\delta_{ba} - \delta_{ca}), \quad (4.52)$$

onde $W_{bc} \equiv W(\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_c, h_b)$, δ_{ba} e δ_{ca} são funções delta de Dirac referindo-se aos índices das partículas. Temos assumido ainda que, o h é uma própria função da densidade, $h = h(\rho)$, surgindo o termo Ω_b para o gradiente de h dado por:

$$\Omega_b = 1 - \sum_c m_c \frac{\partial W_{bc}(h_b)}{\partial h_b} \frac{\partial h_b}{\partial \rho_b}, \quad (4.53)$$

onde para a relação $h - \rho$, a derivada é escrita como:

$$\frac{\partial h}{\partial \rho} = -\frac{h}{\rho d}, \quad (4.54)$$

onde d é o número de dimensões espaciais. Substituindo as equações (4.51) e (4.52) em (4.48), temos:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = - \sum_b m_b \frac{P_b}{\Omega_b \rho_b^2} \sum_c m_c \frac{\partial W_{bc}(h_b)}{\partial \mathbf{r}_a} (\delta_{ba} - \delta_{ca}). \quad (4.55)$$

Substituindo as equações (4.47), (4.48), (4.55) em (4.46), encontramos as equações de movimento das equações de Euler-Lagrange escrita na forma:

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = - \sum_b m_b \left[\frac{P_a}{\Omega_a \rho_a} \frac{\partial W_{ab}(h_a)}{\partial \mathbf{r}_a} + \frac{P_b}{\Omega_b \rho_b} \frac{\partial W_{ab}(h_b)}{\partial \mathbf{r}_a} \right]. \quad (4.56)$$

Para um h constante, a equação acima pode ser escrita de forma simplificada:

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = - \sum_b m_b \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} \right) \nabla_a W_{ab}. \quad (4.57)$$

4.2.2 Propriedades de Conservação

As propriedades de conservação seguem diretamente das simetrias na Lagrangiana original e na estimativa de densidade SPH. As propriedades interessantes das equações de movimento são as conservações do momento linear e angular:

$$\frac{d}{dt} \sum_a m_a \mathbf{v}_a = \sum_a m_a \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = - \sum_a \sum_b m_a m_b \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} \right) \nabla_a W_{ab} = 0, \quad (4.58)$$

$$\frac{d}{dt} \sum_a \mathbf{r}_a \times m_a \mathbf{v}_a = \sum_a m_a \left(\mathbf{r}_a \times \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} \right) = - \sum_a \sum_b m_a m_b \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} \right) \mathbf{r}_a \times (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) \tilde{F}_{ab} = 0. \quad (4.59)$$

O duplo somatório na equação de conservação do momento linear (4.58) é zero por causa da antisimetria no gradiente de kernel e a conservação se dá propriamente porque a Lagrangiana e a estimativa de densidade são invariantes à translações. Na equação de conservação do momento angular (4.59) é adotado o gradiente de kernel escrito na forma $\nabla W_{ab} = \mathbf{r}_{ab} \tilde{F}_{ab}$ e o último termo é zero devido à antisimetria no somatório duplo, já que $(\mathbf{r}_a \times \mathbf{r}_b) = -(\mathbf{r}_b \times \mathbf{r}_a)$. A conservação do momento angular acontece uma vez que a Lagrangiana e a estimativa de densidade são invariantes a rotações das coordenadas da partícula. Embora as equações de movimento dependem somente nas posições relativas das partículas, existe uma dependência no valor absoluto da pressão, como nas equações (4.56) e (4.57) que contêm a força entre as partículas, que não é nula mesmo quando a pressão é constante (PRICE, 2012), (MONAGHAN, 1992).

4.2.3 Termodinâmica

Partindo da equação (4.51) podemos obter a equação de evolução para a energia interna:

$$\frac{du_a}{dt} = \frac{P_a}{\rho_a^2} \frac{d\rho_a^2}{dt}. \quad (4.60)$$

Fazendo a derivada no tempo da equação (4.16) e substituindo em (4.60), podemos escrever a equação de evolução para a energia interna na forma:

$$\frac{du_a}{dt} = \frac{P_a}{\Omega_a \rho_a^2} \sum_b m_b (\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b) \cdot \nabla W_{ab}(h_a). \quad (4.61)$$

Para obter a equação de energia total, partimos da Lagrangiana por meio da Hamiltoniana:

$$H = \sum_a \mathbf{v}_a \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} - L = \sum_a m_a \left(\frac{1}{2} v_a^2 + u_a \right), \quad (4.62)$$

que é definida como a energia total das partículas SPH e escrevendo sua derivada no tempo, temos:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_a m_a \frac{de_a}{dt} = \sum_a m_a \left(\mathbf{v}_a \cdot \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} + \frac{du_a}{dt} \right). \quad (4.63)$$

Substituindo (4.56) e (4.61) em (4.63), obtemos:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_a m_a \frac{de_a}{dt} = - \sum_a \sum_b m_a m_b \left[\frac{P_a}{\Omega_a \rho_a^2} \mathbf{v}_b \cdot \nabla_a W_{ab}(h_a) + \frac{P_b}{\Omega_b \rho_b^2} \mathbf{v}_a \cdot \nabla_a W_{ab}(h_b) \right] = 0. \quad (4.64)$$

A equação (4.64) nos mostra que a energia total também é conservada pela abordagem SPH. A conservação da energia total acontece devido a dois fatores: simetria da Lagrangiana (equação 4.40) com relação ao tempo e a sua invariância no tempo à translações. Podemos escrever ainda, a partir da (4.64), a equação de evolução sem dissipação para a energia específica e :

$$\frac{de_a}{dt} = - \sum_b m_b \left[\frac{P_a}{\Omega_a \rho_a^2} \mathbf{v}_b \cdot \nabla_a W_{ab}(h_a) + \frac{P_b}{\Omega_b \rho_b^2} \mathbf{v}_a \cdot \nabla_a W_{ab}(h_b) \right]. \quad (4.65)$$

Até agora, temos assumido entropia constante em nossas equações, isso implica que o aquecimento ou resfriamento dos elementos de fluido é devido apenas à compressão ou expansão do gás. Quando adicionamos uma fonte de calor, por exemplo uma partícula *sink*, dentro do elemento de fluido (ou seja, dissipação devido à viscosidade ou emissão (absorção) de luz), precisamos levar em consideração a variação na entropia. Para isso, podemos escrever as seguintes equações usando uma função $K(s)$ dependente da entropia

variável (SPRINGEL; HERNQUIST, 2002). A equação de estado de um gás ideal fica, portanto:

$$P = K(s)\rho^\gamma. \quad (4.66)$$

A equação da energia térmica pode ser escrita como:

$$u = \frac{K(s)}{\gamma - 1} \rho^{\gamma-1}, \quad (4.67)$$

e a evolução de K é dada da seguinte forma:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{\gamma - 1}{\rho^{\gamma-1}} \left(\frac{du}{dt} - \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \right) = \frac{\gamma - 1}{\rho^{\gamma-1}} \left(\frac{du}{dt} \right)_{diss}, \quad (4.68)$$

se choques ou viscosidade estão presentes deve-se adicionar um termo que envolva:

$$\frac{dK_a}{dt} = \frac{\gamma - 1}{\rho_a^{\gamma-1}} \left(\frac{du_a}{dt} \right)_{diss} + \frac{1}{2} \frac{\gamma - 1}{\rho_a^{\gamma-1}} \sum_b^N m_b \Pi_{ab} \mathbf{v}_{ab} \nabla_b W_{ab}, \quad (4.69)$$

onde Π_{ab} é o tensor viscoso.

A suposição da função K é referida como a forma de conservação de entropia da abordagem SPH. No entanto, esta denominação pode ser um pouco ilusória, já que a conservação de entropia também ocorre com a consideração da equação (4.51) (PRICE, 2012).

4.3 Viscosidade em SPH

Podemos obter a viscosidade de um disco de acreção usando o termo de viscosidade artificial, como veremos adiante. Os termos de viscosidade artificial em SPH são obtidos diretamente como representações numéricas da derivada segunda da velocidade. Para isso usamos uma formulação integral baseada na primeira derivada de kernel SPH.

4.3.1 Termos da Viscosidade Artificial e Dissipação *Switches*

Como vimos anteriormente na seção 4.2, a abordagem SPH deduzida a partir do formalismo Lagrangiano conserva massa, momento linear, momento angular, energia e entropia. Mas em casos, como o nosso, que queremos investigar o decaimento gravitacional pela perda de energia e momento angular de objetos astrofísicos altamente dinâmicos, os termos dissipativos devem ser adicionados nas equações SPH. Nesse contexto, o gás dissipa energia através de choques, convertendo energia cinética em calor. Um fenômeno onde a descontinuidade em densidade e pressão de um fluido aparece quando existe movimento supersônico do mesmo tipo. A propagação de um choque é o resultado de uma perturbação

não-linear, como uma compressão ou aceleração da velocidade muito maior do que a velocidade do som.

Na abordagem SPH, assumimos que as quantidades são suavizadas em h (*smoothing length*, que é a menor escala espacial), então descontinuidades nesta escala não serão resolvidas pelos métodos numéricos. Para lidar com os choques, precisamos de um termo para tratar descontinuidades na proximidade da frente de choque. Em códigos numéricos baseados no método SPH, normalmente o choque é estendido até alguns h para lidar com os gradientes finitos e controlar a evolução. O termo dissipativo adicionado nesse caso surge somente na presença de choques. Este mecanismo garante que a quantidade correta de energia seja dissipada na região do choque, recuperando o comportamento assintótico longe do choque.

A formulação padrão da viscosidade artificial é dada por (MONAGHAN, 1992):

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_{diss} = - \sum_b m_b \frac{-\alpha^{AV} \bar{c}_{s,ab} \mu_{ab} + \beta^{AV} \mu_{ab}^2}{\bar{\rho}_{ab}} \hat{\mathbf{r}}_{ab} F_{ab}, \quad (4.70)$$

$$\mu_{ab} = \frac{\bar{h}_{ab} \mathbf{v}_{ab} \cdot \mathbf{r}_{ab}}{\mathbf{r}_{ab} + \epsilon \bar{h}_{ab}^2}, \quad (4.71)$$

onde as quantidades barradas indicam médias, como nos casos da densidade $\bar{\rho}_{ab} = (\rho_a + \rho_b)/2$ e da velocidade do som $\bar{c}_{s,ab} = (c_{s,a} + c_{s,b})/2$. Os parâmetros α^{AV} e β^{AV} são adimensionais e geralmente assumem os valores: $\alpha = 1$ e $\beta = 2$. A função F representa a parte escalar do gradiente de kernel, $\nabla_a W_{ab} = \hat{\mathbf{r}}_{ab} F_{ab}$. O termo com μ^2 torna-se dominante no limite de choques fortes, quando as diferenças de velocidade são altas. Em caso contrário, o termo linear domina.

Na equação (4.70) a quantidade correspondente ao *bulk* do termo dissipativo é dado por:

$$\Pi_{ab} = \frac{-\alpha^{AV} \bar{c}_{s,ab} \mu_{ab} + \beta^{AV} \mu_{ab}^2}{\bar{\rho}_{ab}}, \quad (4.72)$$

as dimensões físicas de Π é pressão sobre o quadrado da densidade. Sabendo disso, podemos adicionar essa quantidade à equação (4.57):

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = - \sum_b m_b \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} + \Pi_{ab} \right) \nabla_a W_{ab}, \quad (4.73)$$

para tratar os choques, a viscosidade artificial tem que ser adicionada ao cálculo da evolução do fluido apenas para as partículas se aproximando, no caso quando o fluxo é convergente, $\mathbf{v}_{ab} \cdot \mathbf{r}_{ab} < 0$. A viscosidade desaparece quando $\mathbf{v}_{ab} \cdot \mathbf{r}_{ab} > 0$, que é quando as partículas estão se afastando.

Uma dos pontos mais importantes que deve ser destacado é que, a dissipação (ou termo artificial) é aplicada à descontinuidades, mas que tal dissipação é efetivamente

desligada nas partes suaves do fluxo por *switches* apropriados, já que ela pode resultar em fontes de viscosidade e condutividade não físicas na simulação do fluido. Por esse motivo o uso de *switches*, ligam e desligam termos artificiais para prevenir efeitos não desejados onde não é necessário. Os "*switches*" atuam nos valores dos parâmetros α e α_u fornecendo uma lei de evolução no tempo.

Em códigos SPH, como o PHANTOM, a viscosidade artificial na presença de choques é controlada pelo *switch* de Morris e Monaghan (1997) que sugeriram o parâmetro α para ser individual a cada partícula, de modo que, longe dos choques, a dissipação artificial é reduzida ao mínimo, que deve seguir uma equação de evolução da seguinte forma:

$$\frac{d\alpha_a^{AV}}{dt} = -\frac{\alpha_a^{AV} - \alpha_{min}^{AV}}{\tau_a} + S_a, \quad (4.74)$$

onde S é um termo fonte que cresce em discontinuidade, dado por:

$$S_a = \max(0, -\nabla \cdot v). \quad (4.75)$$

O parâmetro α_a^{AV} é a viscosidade artificial para cada partícula que decai exponencialmente para α_{min}^{AV} (em geral, é assumido o valor $\alpha_{min}^{AV} = 0.1$) no tempo τ_a , que pode ser definido como:

$$\tau_a = \frac{h_a}{\xi c_{s,a}}, \quad (4.76)$$

com $\xi = 0.1$ e o crescimento de α_a^{AV} é restrito ao valor máximo $\alpha_a^{AV} \approx 2$. Adicionando o termo dissipativo (4.72) à equação de evolução da energia interna, temos:

$$\frac{du_a}{dt} = \sum_b m_b \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \Pi_{ab} \right) \mathbf{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}. \quad (4.77)$$

A viscosidade artificial no código PHANTOM é implementada com base no trabalho de Morris e Monaghan (1997) que sugeriu uma formulação mais abrangente para tratar também choques ultra-relativísticos. Lodato e Price (2010) adotam a seguinte forma:

$$\left(\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} \right)_{diss} = - \sum_b m_b \left[\frac{q_a^{AV}}{\Omega_a \rho_a^2} \nabla_a W_{ab}(h_a) + \frac{q_b^{AV}}{\Omega_b \rho_b^2} \nabla_b W_{ab}(h_b) \right], \quad (4.78)$$

onde o termo q^{AV} é a viscosidade artificial que é introduzida em SPH para capturar choques e prevenir interpenetração de partículas, e assume as seguintes condições:

$$q_a^{AV} = \frac{1}{2} \alpha_a^{AV} \rho_a v_{sig,a} |\mathbf{v}_{ab} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ab}|, \quad (4.79)$$

para $\mathbf{v}_{ab} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ab} < 0$ e $q_a^{AV} = 0$ no caso $\mathbf{v}_{ab} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ab} \geq 0$, sendo a velocidade do sinal dado por:

$$v_{sig,a} = c_{s,a} + \beta^{AV} |\mathbf{v}_{ab} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ab}|. \quad (4.80)$$

Por simplicidade, consideramos o caso de h constante, isso implica em manter $\Omega = 1$ e agora substituindo a equação (4.79) na forma adotada por Lodato e Price (2010)(4.78), encontramos:

$$\left(\frac{d\mathbf{v}_a}{dt}\right)_{diss} = -\sum_b \frac{m_b}{2} \left[\frac{\alpha_a^{AV} v_{sig,a}}{\rho_a} + \frac{\alpha_b^{AV} v_{sig,b}}{\rho_b} \right] |\mathbf{v}_{ab} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ab}| \hat{\mathbf{r}}_{ab} F_{ab}. \quad (4.81)$$

Assumindo os parâmetros α , c_s e ρ constante sobre o raio de kernel, podemos reescrever a equação (4.81) da forma:

$$\left(\frac{d\mathbf{v}_a}{dt}\right)_{diss} = -\sum_b m_b \frac{\alpha_a^{AV} v_{sig,a}}{\rho_a} |\mathbf{v}_{ab} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ab}| \hat{\mathbf{r}}_{ab} F_{ab}. \quad (4.82)$$

Reescrevendo a equação de evolução da energia térmica com o termo da viscosidade artificial, temos:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{diss} = -\sum \frac{m_b}{\rho_b} \left[\frac{1}{2} \alpha^{AV} v_{sig} (\mathbf{v}_{ab} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ab})^2 + \alpha_u v_{sig}^u (u_a - u_b) \right] \bar{F}_{ab}, \quad (4.83)$$

em que $\bar{F}_{ab} = [\bar{F}_{ab}(h_a) + \bar{F}_{ab}(h_b)]/2$ e v_{sig}^u é a velocidade do sinal que aparece no termo de condutividade artificial, com o coeficiente α_u , dado por:

$$v_{sig}^u = \sqrt{\frac{|P_a - P_b|}{\bar{\rho}_{ab}}}. \quad (4.84)$$

Price (2008) introduziu a velocidade do sinal para a equação de condutividade, já que v_{sig}^u apresenta uma boa propriedade, desaparecendo quando o equilíbrio de pressão é estabelecido através da descontinuidade, isso evita difusão de calor não desejada onde não é necessária.

4.3.2 Viscosidade Física do Disco Assumindo a Viscosidade Artificial

A equação de Navier-Stokes para a aceleração de um fluido viscoso é dada a seguir:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nabla \cdot \sigma, \quad (4.85)$$

onde $\nabla \cdot \sigma = \partial_j \sigma_{ij}$ e σ_{ij} é dado por:

$$\sigma_{ij} = \eta \left(\partial_j v_i + \partial_i v_j - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \sigma_{ij} \right) + \zeta \nabla \cdot \mathbf{v} \sigma_{ij}, \quad (4.86)$$

sendo η o coeficiente da viscosidade *shear* relacionado à viscosidade *shear* cinemática $\nu = \eta/\rho$ e ζ é o coeficiente da viscosidade *bulk*, relacionado à viscosidade de volume $\zeta_{vol} = \zeta/\rho$. Assumindo os coeficientes da viscosidade constantes, a equação de Navier-Stokes assume a forma:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})}{\rho}. \quad (4.87)$$

A pressão está relacionada à densidade pela equação de estado localmente isotérmica:

$$P = c_s^2(R)\rho, \quad (4.88)$$

onde a velocidade do som uma função do raio esférico $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é dada por:

$$c_s(R) = c_{s,0}R^{-q}. \quad (4.89)$$

O valor adotado neste trabalho foi $q = 3/4$.

Adicionando à equação de movimento SPH (4.56) as viscosidades *shear* e *bulk* e o termo adotado por Lodato e Price (2010), encontramos:

$$\frac{dv_a^i}{dt} = \sum_b m_b \left[\frac{S_a^{ij}}{\Omega_a \rho_a^2} \nabla_a^j W_{ab}(h_a) + \frac{S_b^{ij}}{\Omega_b \rho_b^2} \nabla_b^j W_{ab}(h_b) \right], \quad (4.90)$$

onde S_a^{ij} é dada pela expressão:

$$S_a^{ij} = \left[-(P_a + q_a^{AV}) + \left(\zeta_a - \frac{2}{3}\eta_a \right) \frac{\partial v_a^k}{\partial x_a^k} \right] \delta^{ij} + \eta_a \left(\frac{\partial v_a^i}{\partial x_a^j} + \frac{\partial v_a^j}{\partial x_a^i} \right). \quad (4.91)$$

Assumindo a identidade (4.38) obtida da derivada segunda na Teoria de Interpolação, faremos $\mathbf{A} = \mathbf{v}$ e multiplicaremos o termo $\alpha^{AV} v_{sig} |\mathbf{r}_{ab}|$ para encontrar:

$$-\sum_b m_b \frac{\alpha_a^{AV} v_{sig,a}}{\rho_a} |\mathbf{v}_{ab} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ab}| \hat{\mathbf{r}}_{ab} F_{ab} = \frac{1}{5} \alpha^{AV} v_{sig} |\mathbf{r}_{ab}| \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{1}{10} \alpha^{AV} v_{sig} |\mathbf{r}_{ab}| \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (4.92)$$

que corresponde ao termo dissipativo (4.82). Comparando a equação (4.92) com os termos na equação de Navier-Stokes, envolvendo as quantidades $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$ e $\nabla^2 \mathbf{v}$, obtemos:

$$\nu \approx \frac{1}{10} \alpha^{AV} v_{sig} |\mathbf{r}_{ab}|, \quad (4.93)$$

$$\zeta \approx \frac{1}{6} \alpha^{AV} v_{sig} |\mathbf{r}_{ab}|. \quad (4.94)$$

A viscosidade física de um disco de acreção é dada pela parametrização de Shakura e Sunyaev (1973):

$$\nu = \alpha_{SS} c_s h, \quad (4.95)$$

sendo α_{SS} um coeficiente constante. Para usar a viscosidade artificial para representar a viscosidade física do disco Shakura e Sunyaev (1973) são necessárias pequenas modificações da formulação apropriada para tratar choques. Lodato e Price (2010) discutem algumas dessas mudanças:

1. a viscosidade pode ser aplicada para partículas tanto se aproximando quanto se afastando;
2. o termo β^{AV} na velocidade do sinal v_{sig} (4.80) pode ser desconsiderada, desde que seja assumida a igualdade $v_{sig} = c_s$;
3. o termo q^{AV} pode ser multiplicado por um fator $h/|r_{ab}|$, semelhante ao esquema da viscosidade artificial de Monaghan (1992), que nos leva a uma expressão da seguinte forma, $q_a^{AV} = \frac{1}{2}\alpha^{AV}\rho_a c_{s,a} |\mathbf{v}_{ab} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ab}| \frac{h}{|\mathbf{r}_{ab}|}$;
4. o termo α^{AV} pode ser tratado como uma constante e então nenhum tipo de *switch* precisa ser usado.

Então a viscosidade artificial para um disco de acreção adota as seguintes expressões:

$$\nu^{AV} \approx \frac{1}{10}\alpha^{AV}c_s h, \quad (4.96)$$

$$\zeta^{AV} \approx \frac{1}{6}\alpha^{AV}c_s h. \quad (4.97)$$

Comparando a parametrização de Shakura e Sunyaev (1973) dada pela equação (4.95) com a expressão (4.96), temos a viscosidade α_{SS} :

$$\alpha_{SS} \approx \frac{1}{10}\alpha^{AV}\frac{\langle h \rangle}{H}, \quad (4.98)$$

onde $\langle h \rangle$ é a média azimutal de h . Para simular um disco com o coeficiente α_{SS} uniforme, é preciso estabelecer um valor constante para a razão $\langle h \rangle/H$.

4.4 Subrotina do Decaimento Gravitacional no Código PHANTOM

Nesta seção, falaremos sobre a implementação do decaimento gravitacional feita no código PHANTOM por Cerioli, Lodato e Price (2016). A abordagem assumida pelos autores foi a partir do momento em que a dinâmica da binária de buracos negros torna-se dominada por torques gravitacionais. Nesse estágio de evolução do sistema, o par de buracos negros começa a perder energia, devido à emissão de ondas gravitacionais e então a separação entre as componentes da binária decai (PETERS, 1964).

No código PHANTOM, o movimento dos buracos negros segue as equações (2.107 - 2.110), sem que um sinta a presença do outro. A massa unitária em unidade do código assume o valor de uma massa solar, $u_M = 1M_\odot$. Para fixar as unidades de comprimento (u_L) e de tempo (u_T), Cerioli, Lodato e Price (2016) procederam por fazer as equações

(2.99) e do período ($T = 2/\pi$) adimensionais, onde $\Omega = (GM_{tot}/a^3)^{1/2}$. As quantidades como um fator adimensional multiplicado pela unidade física u , são:

$$u_M = M_\odot, \quad (4.99)$$

$$u_L = \frac{GM_\odot}{c^2} = R_g, \quad (4.100)$$

$$u_T = \frac{GM_\odot}{c^3} = \frac{R_g}{c}, \quad (4.101)$$

para as quais assumimos $G = c = 1$ e R_g como sendo o raio gravitacional do buraco negro primário e é considerado para ser a medida de separação da binária. Esta escolha de unidades equivale a ter a massa unitária como a massa primária, $\tilde{u}_M = M_p$, sendo adotado no código $M_p = 1$. A expressão adimensional para a velocidade angular é:

$$\dot{\vartheta}(t) = \omega_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{-3/8}, \quad (4.102)$$

e para a posição angular relativa é:

$$\vartheta(t) = -\frac{8}{5}\omega_0\tau \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{5/8} \quad (4.103)$$

para $t = 0$, a $\omega(0) = \omega_0$ e $\vartheta(0) = -8/5\omega_0\tau$.

Cerioli, Lodato e Price (2016) usaram a abordagem SPH do código PHANTOM para modelar um disco de acreção gasoso em torno de um sistema binário de BNSMs. As partículas de gás movem-se sob o potencial gravitacional gerado pelo par de BNSMs¹,

$$\Phi_a = -\frac{M}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_1|} - \frac{(1-M)}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_2|}, \quad (4.104)$$

onde \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 são dadas pelas seguintes expressões:

$$\mathbf{r}_1 = \left[-\frac{m_2}{m_1 + m_2} a \cos(\theta), -\frac{m_2}{m_1 + m_2} a \sin(\theta), 0 \right], \quad (4.105)$$

$$\mathbf{r}_2 = \left[\frac{m_1}{m_1 + m_2} a \cos(\theta), \frac{m_1}{m_1 + m_2} a \sin(\theta), 0 \right], \quad (4.106)$$

sendo a o semi-eixo maior, dado por (2.103). Este potencial foi implementado em uma formulação Newtoniana, já que os autores estavam interessados apenas na fase final da fusão e na interação do gás entre os buracos negros. No cenário adotado, foi assumido que o disco de acreção externo está localizado depois da componente secundária da binária e é incapaz de evoluir rapidamente para contrabalançar o encolhimento gravitacional, sendo

¹ As partículas SPH sentem a binária como uma força externa, que no código PHANTOM é implementado usando o potencial gravitacional Newtoniano.

que do raio de desacoplamento (ver seção 2.2.3.2 para mais detalhes) em diante a evolução do sistema é somente dominada pela emissão da radiação gravitacional.

O código PHANTOM faz a distribuição das partículas usando o método Monte Carlo e a densidade de superfície do disco é reproduzida pela seguinte lei de potência:

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 R^{-p}, \quad (4.107)$$

onde o índice $p = 3/2$ é adotado para todos os modelos simulados. A viscosidade do disco é modelada com a viscosidade artificial. O parâmetro α_{AV} é calculado em cada tempo para reproduzir o valor desejado de α_{SS} descritos na seção 4.3.

Ceroli, Lodato e Price (2016) assumem um sistema binário com excentricidade zero e um disco de acreção centrado no centro de massa da binária no mesmo plano dos dois buracos negros. Todas as simulações começam com apenas um disco circunprimário, porque a separação inicial a_0 é muito menor comparada ao raio de desacoplamento da binária. Isto significa que os torques provenientes da emissão de ondas gravitacionais dominam completamente a dinâmica do sistema. A razão de massa padrão adotada pelos autores foi $q = 10^{-3}$. Este valor foi influenciado pelos recursos computacionais disponíveis, uma vez que q está diretamente relacionado com o raio de desacoplamento ($a_{dec} \propto q^{2/5}$), ou seja, um alto valor de q corresponde a um raio de desacoplamento muito maior, levando a um tempo computacional mais longo.

Durante as simulações a razão de massa é mantida constante. Isso implica que os buracos negros não mudam o valor de suas massas durante a acreção. Essa aproximação é razoável, pois baseada na quantidade de massa do disco de acreção interno ($\approx 1M_\odot$) em comparação com as massas dos BNSMs ($\approx 10^8 M_\odot$), nenhuma mudança significativa acontece na razão de massa da binária. A massa do disco é uma variável livre, de modo que pode ser escalonada de acordo com o valor físico escolhido, e em nenhum momento a M_{disc} entra em qualquer equação de evolução.

O disco é inicialmente assimétrico e rotaciona em torno do centro de massa do sistema com uma velocidade angular kepleriana. A estrutura do disco é modificada somente após o início da simulação, devido às ondas de densidade formadas pela interação do disco com o buraco negro secundário.

5 Simulações Numéricas e Estimativa das Taxas de Eventos

Neste capítulo, são apresentados os resultados numéricos obtidos com o código 3D PHANTOM, que foram realizados durante estágio de doutorado-sanduiche na Universidade de Milão¹. Mostramos, também, a estimativa das taxas de eventos esperadas para os futuros detectores espaciais LISA e gLISA.

5.1 Modelagem Numérica

Este trabalho foi baseado na modelagem feita por [Cerioli, Lodato e Price \(2016\)](#), em que foi investigado o mecanismo *squeezing* durante a fusão de um par de BNSMs. Segundo os autores, a evidência deste mecanismo é causada pela compressão do disco de gás interno quando o buraco negro secundário espirala em direção ao buraco negro primário. Isso implica em um aumento nas taxas de acreção, que sempre excedem a taxa de Eddington.

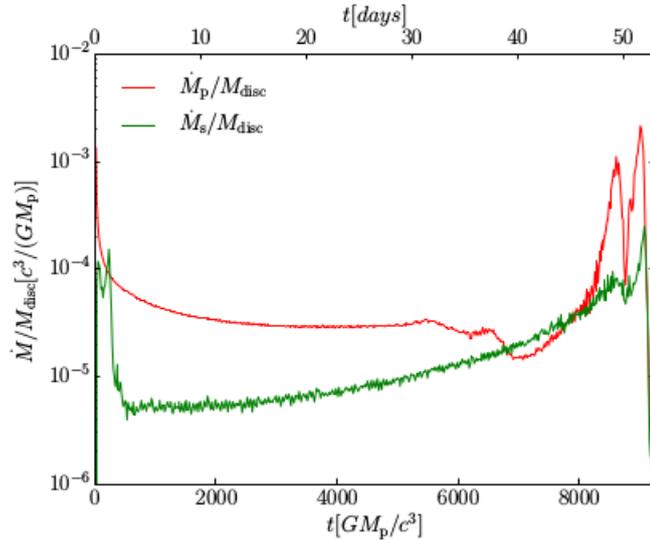
Os autores estudaram ainda os efeitos produzidos nas taxas de acreção pelas mudanças na resolução numérica, no raio de acreção da componente secundária e na espessura do disco. Os resultados de [Cerioli, Lodato e Price \(2016\)](#) foram comparados às simulações anteriores em 2D com discos espessos de [Baruteau, Ramirez-Ruiz e Masset \(2012a\)](#), o que permitiu concluir que o aumento nas taxas de acreção leva a um aumento da luminosidade, tornando possível a detecção de um precursor eletromagnético do sinal da radiação gravitacional emitido durante a coalescência.

Os resultados numéricos de [Cerioli, Lodato e Price \(2016\)](#) foram extremamente satisfatórios, principalmente em relação à contrapartida eletromagnética cerca de 10 dias antes da completa fusão do sistema (ver Figura 12). No entanto, como destacado pelos próprios autores, a modelagem foi feita com um disco de acreção circumprimário alinhado com o plano orbital dos buracos negros. Baseados nesses resultados, propusemos utilizar a mesma abordagem feita por [Cerioli, Lodato e Price \(2016\)](#), porém assumindo um disco gasoso desalinhado com o plano orbital do sistema binário de BNSMs.

O interesse neste tipo de cenário astrofísico tem sido motivado por recentes trabalhos numéricos e observacionais ([MARTIN, 2008](#); [LODATO; PRICE, 2010](#); [NIXON et al., 2012](#); [NIXON; KING; PRICE, 2013](#); [NEALON; PRICE; NIXON, 2015](#)). Espera-se que alguns discos de acreção sejam inclinados devido às instabilidades (causadas, por exemplo,

¹ Alguns dos resultados numéricos apresentados neste capítulo foram executados no *cluster Virgo* gerenciado pelo Departamento de Astrofísica Teórica da *Università degli Studi di Milano*, sob a supervisão do Prof. Dr. Giuseppe Lodato e colaboração do Prof. Dr. Daniel J. Price. A outra parte das simulações foram executadas no *cluster Hipercubo* da Univap, sob orientação do Prof. Dr. Irapuan Rodrigues.

Figura 12 Taxas de acreção das componentes primária e secundária em uma simulação em alta resolução. Foram utilizadas 2×10^6 partículas. Os picos marcam episódios de intensa e repentina acreção. O eixo horizontal superior mostra o tempo dado em dias para $M_p = 10^8 M_\odot$ e o eixo horizontal inferior apresenta o tempo em unidades do código. As taxas de acreção \dot{M} são normalizadas com a massa do disco.



FONTE: Cerioli, Lodato e Price (2016)

pela radiação produzida por discos *warped*) ou como um resultado da formação do disco (por exemplo, discos circundando binárias de BNSMs) (PRINGLE, 1997; NIXON; KING; PRICE, 2013). Para uma binária de BNSMs em órbita circular, a interação entre o disco desalinhado e a binária é idêntica à precessão Lense-Thirring em um disco de acreção em torno de um buraco negro rotacionando (BARDEEN; PETTERSON, 1975; LODATO; PRINGLE, 2007). Sistemas disco-binária desalinhados estão sujeitos ao decaimento do ângulo de inclinação devido aos efeitos de dissipação viscosa. Se assumimos um buraco negro primário circundado por um disco inclinado, o gás pode fluir dominado pelos torques viscosos, desde que a eficácia dos torques de maré caia rapidamente com o aumento da inclinação do disco (LUBOW; MARTIN; NIXON, 2015). Neste caso, para sistemas disco-binária inclinados, não são esperadas contrapartidas eletromagnéticas próximo à fusão da binária.

Nesse contexto, o objetivo nesta parte do trabalho é estimar as taxas de acreção de uma binária de BNSMs com um disco de gás em diferentes ângulos de inclinação: 1, 5, 10, 20, 30 e 180 graus. As taxas de acreção de BNSMs circundados por apenas um disco circumprimário desalinhado, dias antes da completa fusão da binária, não têm sido muito investigadas. Espera-se com esses resultados averiguar se existem ou não assinaturas eletromagnéticas imediatamente antes da fusão do sistema binário, bem como, propor um cenário mais realístico como encontrado em observações.

No estudo anterior feito por Cerioli, Lodato e Price (2016), foi assumido que o disco de gás circumprimário estava alinhado com o plano orbital da binária. No entanto, o vetor

momento angular do disco circunprimário nem sempre coincide com o do sistema binário. Isso acontece porque a orientação de um disco é primariamente devido à distribuição de momento angular do gás e não devido ao momento angular da binária de buracos negros (HAYASAKI; SAITO; MINESHIGE, 2013). Esta, por sua vez, tem um plano orbital herdado do processo de fusão das galáxias de origem.

De tal modo, assumimos a orientação do plano de um disco circunprimário arbitrariamente com relação ao plano do sistema binário. A inclinação do momento angular do disco l_z com relação ao eixo orbital da binária é dada por, $\theta = \cos^{-1}(l_z)$.

Nos casos em que o disco circunda apenas uma das componentes da binária, a interação entre os buracos negros e o disco pode ter efeitos observacionais relevantes. Por exemplo, nas fases iniciais da interação buraco negro-disco, a órbita da secundária é inclinada com respeito ao disco circunprimário, então a companheira atinge o disco duas vezes durante o seu período orbital. Portanto, da interação entre o buraco negro secundário e o disco são formados *outflows* do gás quente. Neste caso, a luminosidade do gás que participa do *outflow* pode alcançar a luminosidade de Eddington do buraco negro menor (IVANOV; IGUMENSHCHEV; NOVIKOV, 1998; IVANOV; PAPALOIZOU; POLNAREV, 1999).

5.1.1 Condições Iniciais

Para os resultados apresentados nesta subseção, foi utilizada a subrotina do decaimento gravitacional implementada por Cerioli, Lodato e Price (2016) no código PHANTOM. A seguir serão descritas as condições iniciais assumidas em nossas simulações. Consideramos massas diferentes para as componentes de um sistema binário, sendo a razão de massa adotada de $q = M_s/M_p = 10^{-3}$. Assumimos esse valor para o parâmetro q , uma vez que as binárias mais comuns são provavelmente aquelas que surgem de fusões galácticas menores, então a escolha de uma razão de massa pequena está de acordo com o encontrado no universo. Uma razão de massa maior leva a uma perturbação muito mais intensa ao disco circunprimário, pois a secundária produziria um *gap* mais largo no disco. Um valor maior para M_s também implica em uma distância inicial maior da massa primária, para evitar justamente uma forte perturbação nas condições iniciais, ocasionando um tempo computacional proibitivamente longo até a fusão do sistema.

Foi mantido nas simulações apenas um disco circunprimário, pois como discutido em Cerioli, Lodato e Price (2016), a separação inicial a_0 dos dois buracos negros é sempre muito menor que o raio de desacoplamento do sistema. Então para o presente caso, usamos $a_0 = 4,75$ (em unidades físicas $a_0 = 2,28 \times 10^{-5}$ pc), já que para valores maiores que esse ocorreu pouca ou nenhuma evolução na taxa de acreção do buraco negro primário, dados os valores dos parâmetros $\alpha_{SS} = 0,01$ e $q = 10^{-3}$.

O raio de acreção do buraco negro primário $R_{acc,p}$ é assumido para ser igual ao raio

interno R_{in} do disco de acreção, de modo que toda a massa que se aproximar do buraco negro será acretada. Seguindo a escolha de Cerioli, Lodato e Price (2016), se estamos interessados na quantidade de massa acretada, assumimos o raio $R_{ISCO} = R_{in} = R_{acc,p}$. A massa e o momento das partículas não são adicionados aos buracos negros, porque, no código PHANTOM, os buracos negros são tratados como um potencial externo. Além disso, a massa e o momento são desprezíveis de qualquer forma, já que as massas dos BNSMs são muito maiores que a do disco de gás assumido. O valor da razão $H/R = 0,01$ do disco foi assumido considerando $R = R_{in}$. As unidades do código usadas para a massa, o comprimento e o tempo são dadas por:

$$M_0 = M_p; R_0 = \frac{GM_p}{c^2}; T_0 = \frac{GM_p}{c^3}. \quad (5.1)$$

Os parâmetros de entrada para os modelos dos discos viscosos desalinhados a pequenas inclinações assumiram ângulos de 1 e 5 graus, número de partículas igual a $N_{part} = 5 \times 10^5$, parâmetro de viscosidade Shakura & Sunyaev $\alpha_{SS} = 0,01$ e a relação da espessura sobre o raio do disco sendo $H/R = 0,01$. Escolhemos executar as simulações em baixa resolução, com um número de 5×10^5 partículas SPH, para obtenção de resultados mais rápidos, frente aos recursos computacionais disponíveis.

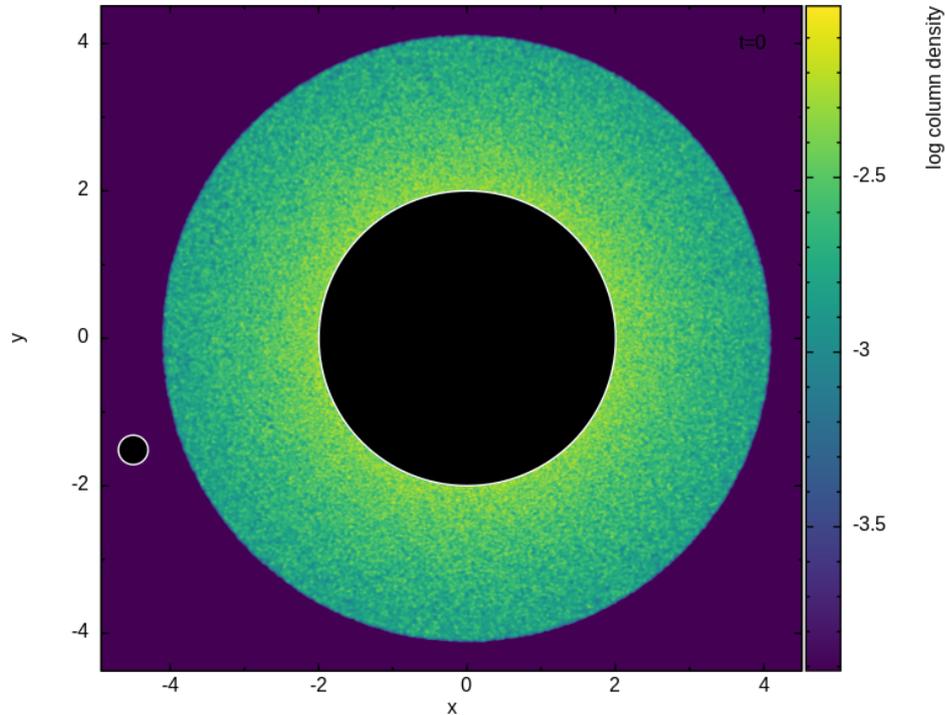
A Tabela 1 mostra as condições iniciais em unidades do código e em unidades físicas. A primeira coluna apresenta os parâmetros iniciais: raio de acreção da componente primária igual ao raio da borda interna do disco $R_{acc,p}$, raio de acreção da componente secundária $R_{acc,s}$, raio externo do disco R_{ext} , separação inicial da binária a_0 e tempo de fusão devido à emissão das ondas gravitacionais τ_{og} . As segunda e terceira colunas mostram os valores atribuídos a cada parâmetro de entrada em unidade do código e em unidade física, respectivamente. A quarta coluna mostra os valores em unidades astronômicas.

Tabela 1 Parâmetros iniciais descritos em unidades do código, unidades físicas e unidades astronômicas.

<i>Parâmetro</i>	<i>Unid. código</i>	<i>Unid. física</i>	<i>Unid. astron.</i>
$R_{acc,p}$	2	$9,6 \times 10^{-6}$ pc	1,98 UA
$R_{acc,s}$	0,2	$9,6 \times 10^{-7}$ pc	0,19 UA
R_{ext}	4,1	$1,97 \times 10^{-5}$ pc	4,06 UA
a_0	4,75	$2,28 \times 10^{-5}$ pc	4,71 UA
τ_{og}	9475,7	54 dias	

A Figura 13 apresenta um *snapshot* com estas condições iniciais em um tempo $t = 0$ estabelecido em um plano xy .

Figura 13 Snapshot da densidade de coluna com as condições iniciais de uma simulação com 5×10^5 partículas e disco inclinado a 5 graus em um $t = 0$. Os BNSMs são indicados pelos círculos pretos e seus respectivos tamanhos são proporcionais aos raios de acreção primário e secundário.



FONTE: A autora.

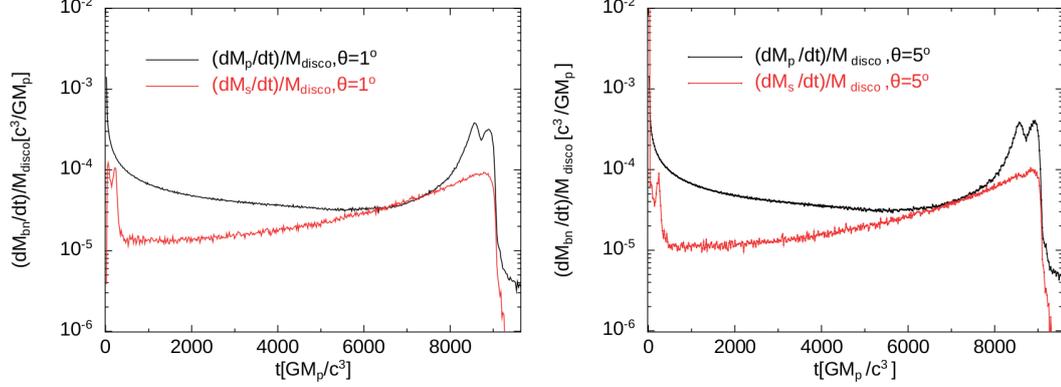
5.1.2 Disco Circumprimário Inclinado em Ângulos de 1 e 5 graus

Nessa seção são mostrados os resultados das taxas de acreção e variação da massa acreta para um sistema binário que consiste de uma órbita circular, com um disco circumprimário com dois ângulos de inclinação com relação ao plano da binária: 1 e 5 graus.

Para as condições iniciais apresentadas na seção 5.1.1, temos os resultados numéricos apresentados na Figura 14, que mostra a evolução das taxas de acreção das massas primária e secundária (em unidades do código). O tempo de decaimento dos dois buracos negros é de aproximadamente 54 dias. Nos dois gráficos, nota-se tanto o duplo pico na taxa de acreção da componente primária correspondendo a um tempo menor que 8 dias antes da fusão, quanto o mecanismo *squeezing* da secundária no início da evolução do sistema. Esses resultados mostraram-se surpreendentes a um disco circumprimário desalinhado a 1 e 5 graus, uma vez que ainda produzem um aumento em luminosidade excedendo a taxa de Eddington antes da fusão dos BNSMs. Ambos os fenômenos também foram observados no trabalho de Cerioli, Lodato e Price (2016), ver Figura 12, com um disco de acreção sem nenhuma inclinação.

Porém no gráfico do lado direito da Figura 14, no qual temos um ângulo de inclinação de 5 graus, o primeiro pico do mecanismo *squeezing* parece não se tornar tão

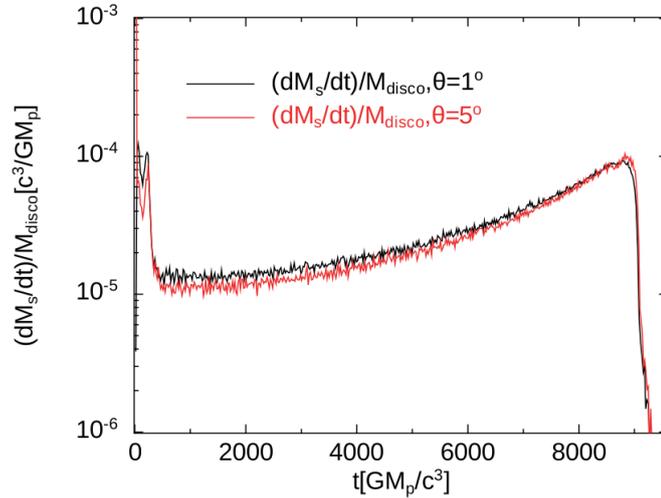
Figura 14 Taxas de acreção dos buracos negros primário e secundário, normalizadas pela massa do disco inicial M_{disco} como função do tempo de fusão. Os ângulos de inclinação do disco circumprimário com relação ao plano da binária foram $\theta = 1^\circ$ (esquerda) e $\theta = 5^\circ$ (direita). Ambas as simulações usaram um número total de 5×10^5 partículas.



FONTE: A autora

proeminente quanto para o ângulo de 1 grau. Isso ocorre, porque os torques viscosos começam a dominar sobre os torques gravitacionais, implicando em uma menor quantidade de acreção do gás no buraco negro companheiro. Podemos verificar esse fato mais nitidamente através das Figuras 15 e 16.

Figura 15 Taxas de acreção dos buracos negros secundários com discos desalinhados à 1 (linha preta) e a 5 (linha vermelha) graus.

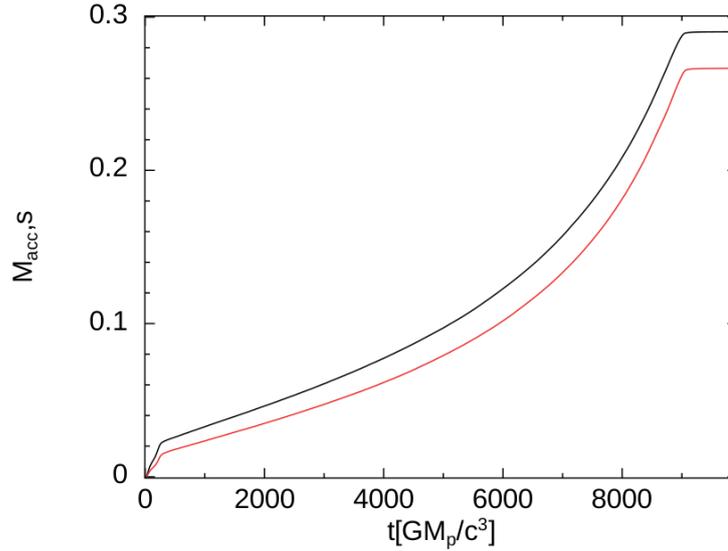


FONTE: A autora

A Figura 15 mostra uma maior proeminência tanto no primeiro quanto no segundo pico do fenômeno *squeezing* no disco inclinado a 1 grau. Esse tipo de fenômeno acontece devido à rápida queda do buraco negro secundário em direção ao primário, arrastando todo o gás que se encontra em sua órbita. O decaimento do buraco negro secundário causa picos na densidade de superfície do disco. No caso de um disco desalinhado com um ângulo de inclinação maior, há uma queda na taxa de acreção de massa, devido à ineficiência dos torques de maré sobre os torques viscosos. Os perfis de densidade de superfície surgem

durante a interação da componente secundária com o disco interno, onde ocorre a troca de momento angular entre o buraco negro secundário e o gás do disco. Isso faz com que as partículas de gás percam momento angular e caiam em direção às órbitas internas. Nesse momento, a acreção forçada do gás na componente primária da binária é marcada pelos picos nas taxas de acreção.

Figura 16 Massa acreta pelos buracos negros secundários com discos desalinhados a 1 grau (linha preta) e 5 graus (linha vermelha).



FONTE: A autora

A Figura 16 mostra uma pequena diferença na quantidade de massa acreta pelos buracos negros secundários. O buraco negro secundário com o disco circunprimário inclinado a um ângulo de 1 grau acreta cerca de 29,04% da massa interna do disco, enquanto o secundário no disco inclinado a 5 graus acreta em torno de 26,6% da massa do disco. Essa diferença na massa acreta mostra que, à medida que aumenta a inclinação do disco de gás, diminui a taxa de acreção do buraco negro, pois diferente de um disco alinhado, o gás não está continuamente caindo no buraco negro do disco circunprimário.

Tabela 2 Taxas de acreção do buraco negro primário nos tempos do primeiro pico (t_1) e do segundo pico (t_2) em unidades do código.

Inclinação	Tempo t_1 (1º pico)	Tempo t_2 (2º pico)	\dot{M}_p/M_{disco} em t_1	\dot{M}_p/M_{disco} em t_2
$\theta = 1^\circ$	8560	8902	$3,82 \times 10^{-4}$	$3,18 \times 10^{-4}$
$\theta = 5^\circ$	8569	8930	$3,85 \times 10^{-4}$	$4,03 \times 10^{-4}$

A Tabela 2 mostra os valores em unidades do código das taxas de acreção para a componente M_p em dois diferentes tempos, que correspondem aos dois picos apresentados na Figura 14. Os valores encontrados para as taxas de acreção dos BNSMs primários com discos inclinados a pequenos ângulos (1 e 5 graus) ultrapassam a taxa de Eddington $\dot{M}_{Edd} = 4,5M_\odot/\text{yr}$.

Tais resultados encontrados possuem valores das taxas de acreção um pouco inferiores aos obtidos por Cerioli, Lodato e Price (2016), como mostrados a seguir, mas ainda assim representam uma possível contrapartida eletromagnética que antecede a fusão do sistema binário. A Tabela 3 apresenta uma comparação entre os resultados encontrados por Cerioli, Lodato e Price (2016) (com o modelo de disco alinhado $\theta = 0^\circ$) e por nós ($\theta = 1^\circ, 5^\circ$ e 10° , publicados em Pereira et al. (2019a)) .

5.1.3 Disco Circumprimário Inclinado em Ângulos de 10, 20 e 30 graus

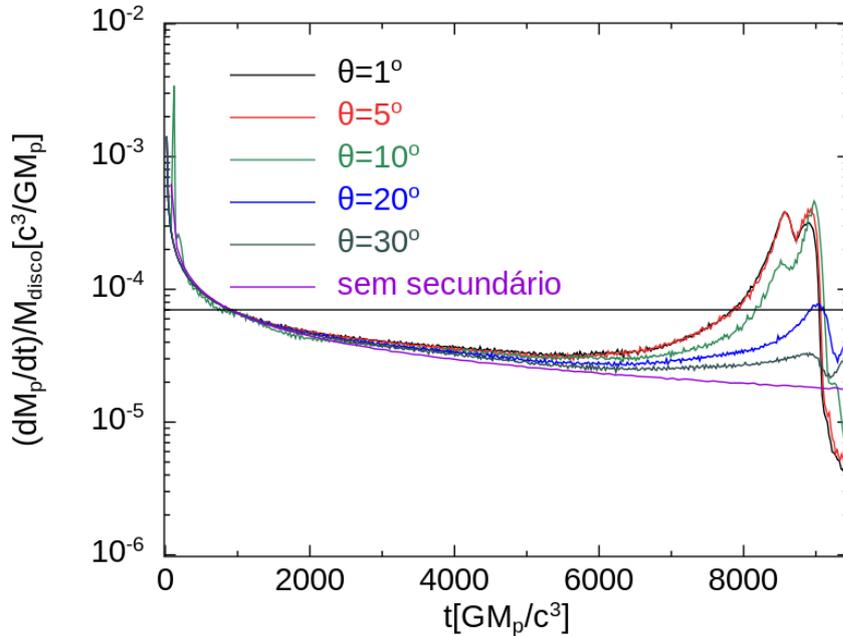
Nesta seção, são apresentadas as estimativas das taxas de acreção para um disco circumprimário inclinado em ângulos de 10, 20 e 30 graus. Para esses ângulos de inclinação, só foi encontrada uma possível assinatura eletromagnética proveniente do buraco negro primário com o disco inclinado a 10 graus, levando a um aumento na luminosidade excedendo o limite de Eddington (ver Tabela 3). Por sua vez, discos com inclinações entre 20 e 30 graus apresentaram picos muito menos pronunciados nas taxas de acreção. Enquanto o trabalho analítico de Lubow, Martin e Nixon (2015) previu que a ineficiência dos torques de maré caem rapidamente com o aumento do ângulo de inclinação, nós mostramos que o mecanismo chamado “snowplough desalinhado” permanece importante mesmo para ângulos maiores que a razão de aspecto do disco (H/R). Na Figura 17, mostramos uma comparação das taxas de acreção do BNSM primário a 10, 20 e 30 graus e sem o BNSM secundário com relação aos resultados de 1 e 5 graus.

Pode-se verificar na Figura 17 que a \dot{M}_p/M_{disco} (normalizada pela massa do disco inicial M_{disco}) apresenta um decréscimo no primeiro pico do disco inclinado a 10 graus. À medida que aumentamos a inclinação do disco para 20 e 30 graus, há uma queda significativa na taxa de acreção do BNSM primário próximo à fusão. Entretanto, o disco inclinado a 20 graus possui o primeiro pico da taxa de acreção no limite de Eddington. Quando simulamos o BNSM central sem o secundário, fica claro que o comportamento da taxa de acreção é determinado pela presença do BNSM companheiro e do efeito *snowplough*. Este resultado está completamente de acordo com o trabalho analítico realizado por Lubow, Martin e Nixon (2015), no qual analisaram o torque de maré atuando em um disco desalinhado com um sistema binário em órbita circular. Os autores concluíram que

Tabela 3 Comparação entre as taxas de acreção do buraco negro primário durante o primeiro pico (t_1) e o segundo pico (t_2) em unidades da M_\odot/yr e da taxa de Eddington.

<i>Modelo</i>	t_1	t_2	$\dot{M}_p/(M_\odot/\text{yr}) (t_1)$	$\dot{M}_p/(M_\odot/\text{yr}) (t_2)$	$\dot{M}_p/M_{Edd} (t_1)$	$\dot{M}_p/M_{Edd} (t_2)$
$\theta = 0^\circ$	8572	8950	31,40	31,27	6,98	6,95
$\theta = 1^\circ$	8560	8902	23,11	19,23	5,13	4,27
$\theta = 5^\circ$	8569	8930	24,68	25,80	5,49	5,73
$\theta = 10^\circ$	8513	8975	10,58	29,61	2,35	6,58

Figura 17 Taxas de acreção para os buracos negros primário desalinhados com o disco circumprimário. Todos os ângulos usados nas simulações com 5×10^5 partículas foram mostrados neste gráfico. A linha horizontal preta representa o limite de Eddington. Os picos duplos mostrados nos estágios finais da evolução são ocasionados devido ao mecanismo "snowplough desalinhado".



FONTE: A autora

comparando o sistema disco-binária desalinhado com um caso de um sistema coplanar (em que a inclinação $\theta = 0$), o torque de ressonância de Lindblad decresce por um fator de 2 para uma inclinação de 30 graus.

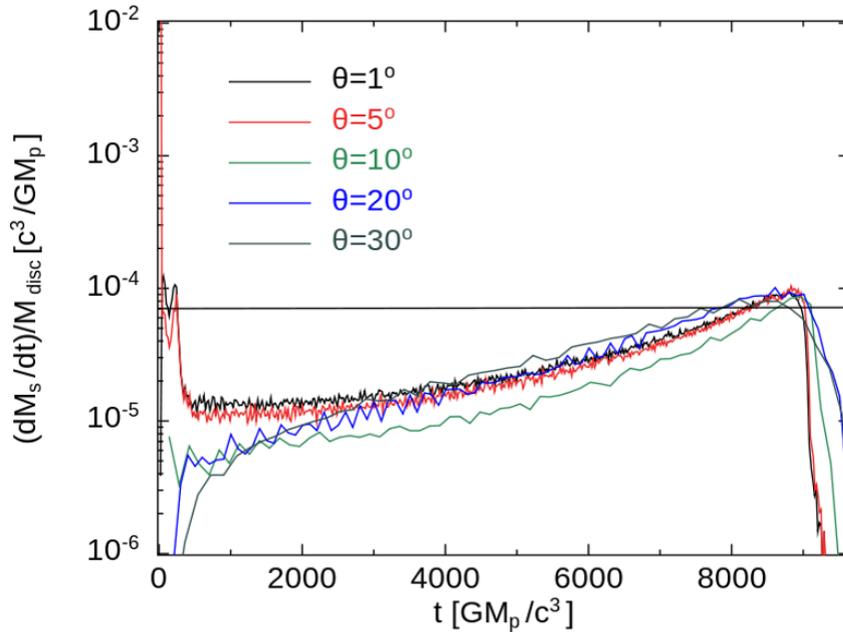
Lubow, Martin e Nixon (2015) mostraram que inclinações $0 < \theta < 90^\circ$ fazem com que o torque ressonante de Lindblad, para o modo² $m = 2$, caia rapidamente com a inclinação. Enquanto, para ângulos entre $90^\circ < \theta < 180^\circ$, o torque cai mais lentamente. Discos desalinhados em sistemas binários podem ser maiores comparados à discos alinhados devido à redução na força dos torques de maré de Lindblad. Nesses casos, os torques viscosos podem dominar sobre a ressonância 2:1 de Lindblad³, desde que o disco seja suficientemente viscoso, semelhante ao modelo adotado neste trabalho.

Na Figura 18 temos a taxa de acreção do buraco negro secundário evoluindo no tempo para inclinações de 10, 20 e 30 graus em comparação aos ângulos 1 e 5 graus. Podemos notar que o fenômeno *squeezing* não surge para discos com inclinações $\theta > 10^\circ$.

² Para um sistema binário com órbita circular e um disco alinhado, a contribuição dominante para o torque está relacionada com as distorções de maré com número de onda azimutal $m = 2$, já que o modo $m = 0$ não exerce qualquer torque no disco e a ressonância $m = 1$ ocorre muito próxima à massa central, no entanto as forças de maré nessa região são fracas. Baseado nisso, Lubow, Martin e Nixon (2015) consideraram a escolha de $m = 2$ para analisar sistemas disco-binária desalinhados.

³ Distorções de maré dão origem às ressonâncias internas de Lindblad, onde a frequência orbital do disco é duas vezes a frequência orbital do sistema binário.

Figura 18 Taxas de acreção para os buracos negros secundários desalinhados com o disco circumprimário. Todos os ângulos usados nas simulações com 5×10^5 partículas foram mostrados neste gráfico. A linha horizontal preta representa o limite de Eddington. Os picos duplos mostrados nos tempos iniciais para ângulos de 1 e 5 graus são ocasionados devido ao fenômeno *squeezing*.

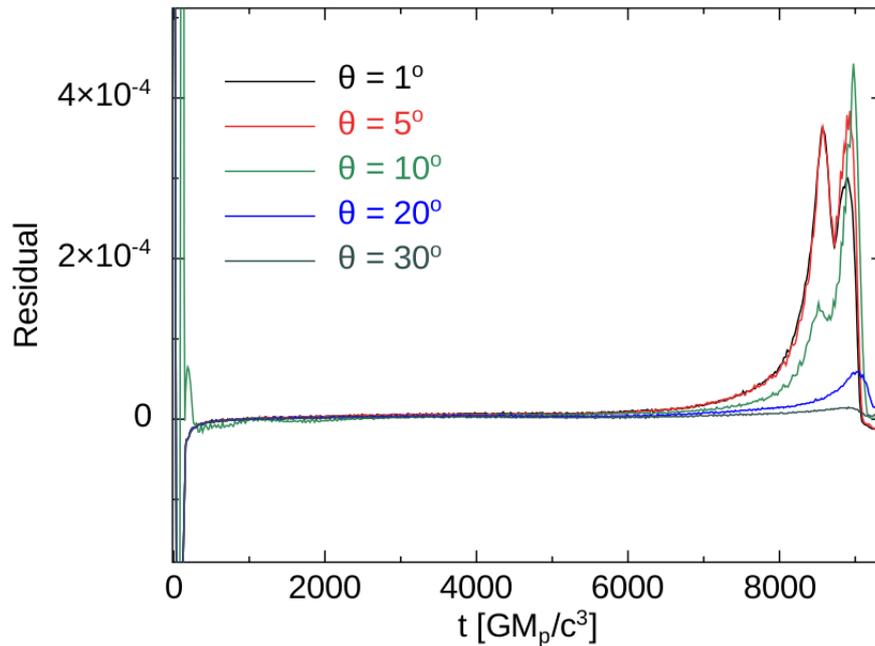


FONTE: A autora

A Figura 19 mostra o residual entre as taxas de acreção do BNSM primário com e sem o secundário. Esta figura apresenta claramente qual é a quantidade da taxa de acreção devido à presença do companheiro e do efeito *snowplough*. Quando comparamos a taxa de acreção do BNSM primário com e sem o secundário, é observado que as taxas são iguais até $t \sim 5000$ (em unidades do código). Após este tempo, o mecanismo *snowplough* para pequenos ângulos de inclinação torna-se importante e a taxa de acreção aumenta com relação à taxa de acreção sem o companheiro.

Na Figura 20 apresentamos a evolução para os sistemas disco-binária desalinhados com inclinações: 1, 5, 10, 20 e 30 graus. Os *snapshots* mostram os momentos finais da completa fusão do par de buracos negros. Podemos observar que a quantidade de gás remanescente no disco é maior à medida que aumentamos o ângulo de inclinação do disco circumprimário. Nesse caso, os torques viscosos dominam sobre os torques de maré devido à alta inclinação. Os torques ressonantes não são eficazes para remover momento angular do disco e, então, uma grande quantidade de gás permanece no disco, diminuindo consideravelmente a acreção de matéria no buraco negro primário. Podemos verificar ainda que, os discos desalinhados em sistemas binários podem ser significativamente estendidos comparados aos casos de discos coplares ou ainda com discos em inclinações maiores.

Figura 19 Residual entre as taxas de acreção do BNSM primário com e sem o secundário.



FONTE: A autora

5.1.4 Disco Circumprimário em Contra-Rotação

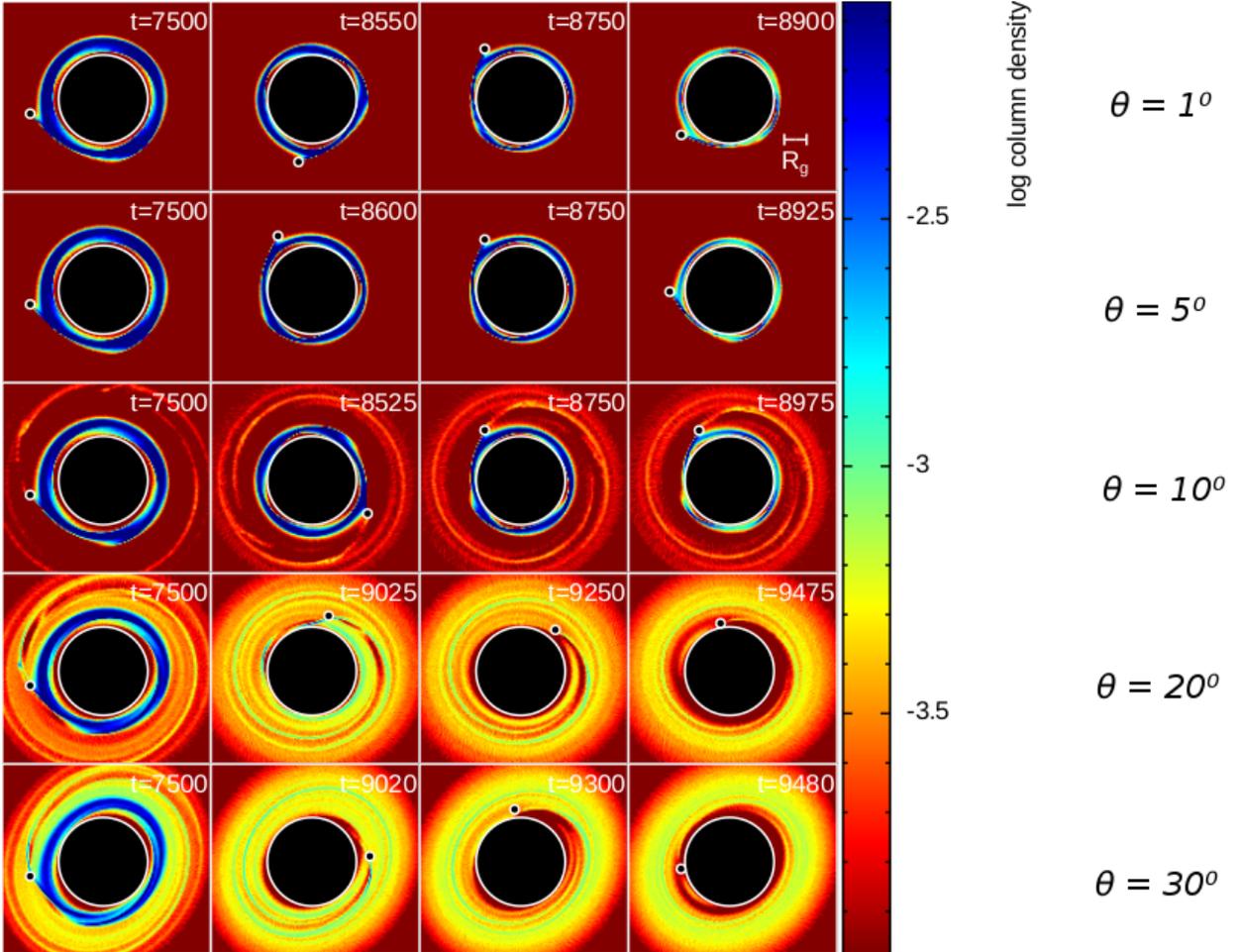
Nessa seção, são apresentados os resultados numéricos para um disco em contra-rotação, ($\theta = 180$ graus). A Figura 21 mostra as taxas de acreção de massa para os buracos negros primário e secundário em função do tempo. Discos com inclinações $\theta = 180$ graus não apresentaram nenhum tipo de pico nas taxas de acréscimo. No caso de um disco contra-rotante, os torques de maré se reduzem a zero, porque os torques viscosos dominam sobre os torques gravitacionais da binária. Estes resultados estão em condordância com o trabalho analítico realizado por [Lubow, Martin e Nixon \(2015\)](#).

A Figura 22 apresenta os *snapshots* da evolução de um sistema disco-binária contra-rotacionando na presença de um *gap* com o gás movendo-se diretamente nele. Nestes tipos de sistemas, existe um cancelamento do momento angular que leva à acreção de gás em uma escala de tempo dinâmica. Então o gás precisa apenas se mover até o *gap* criado e não diretamente no buraco negro primário. Neste caso, como o gás não cai em direção ao buraco negro central, a fusão do sistema acontece no vácuo ([MILOSAVLJEVIĆ; PHINNEY, 2005](#)), como podemos ver no último painel da Figura 22 (no tempo $t = 9480$ em unidades do código).

5.1.5 Discos de Acreção Espessos

A espessura do disco pode afetar a quantidade de gás ejetada para fora da órbita do buraco negro secundário. Para investigar se um disco mais espesso apenas antes da fusão da binária mostra alguma evidência eletromagnética, desempenhamos simulações

Figura 20 *Snapshots* da densidade de coluna (em escala logarítmica) usando simulações com $N_{part} = 5 \times 10^5$. Cada linha indica a evolução de um sistema disco-binária desalinhado à 1, 5, 10, 20 e 30 graus, respectivamente. O segundo e o quarto painéis (em cada fileira) correspondem aos dois tempos em que ocorrem os maiores picos nas taxas de acreção do buraco negro primário. Os BNSMs são representados por círculos com tamanhos correspondendo aos raios de acreção das componentes primária ($R_{acc,p} = 2$) e secundária ($R_{acc,s} = 0,2$). O tempo de evolução do sistema (em unidades do código) é mostrado no canto superior direito. A unidade do código adotada para o comprimento é o raio gravitacional $R_g = GM_p/c^2$, onde $M_p = 10^8 M_\odot$ é a massa do buraco negro primário.

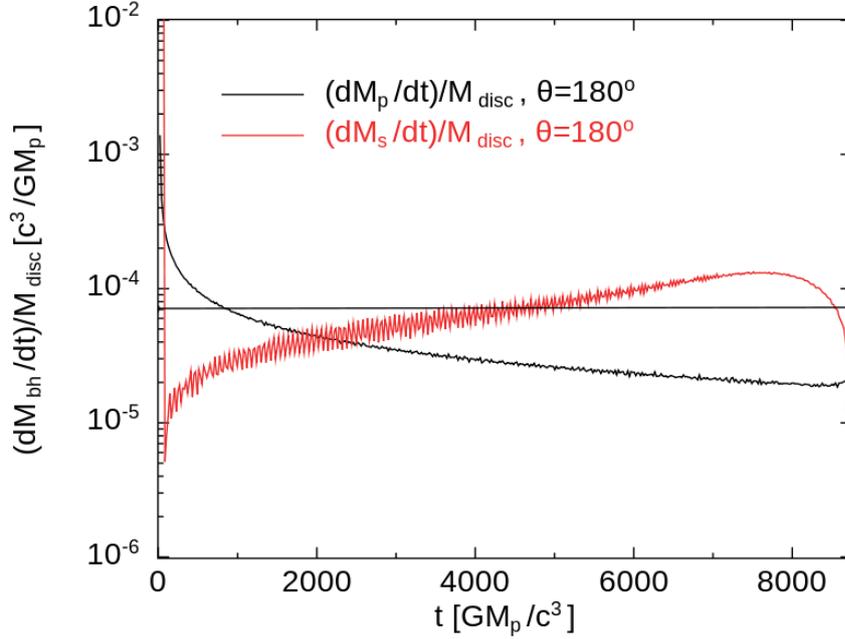


FONTE: A autora

aumentando a razão de aspecto do disco. Nestas simulações, usamos ângulos de inclinação com 1 e 5 graus, $H/R = 0,05$, número de partículas SPH de 5×10^5 e as mesmas condições iniciais mostradas na Seção 5.1.1.

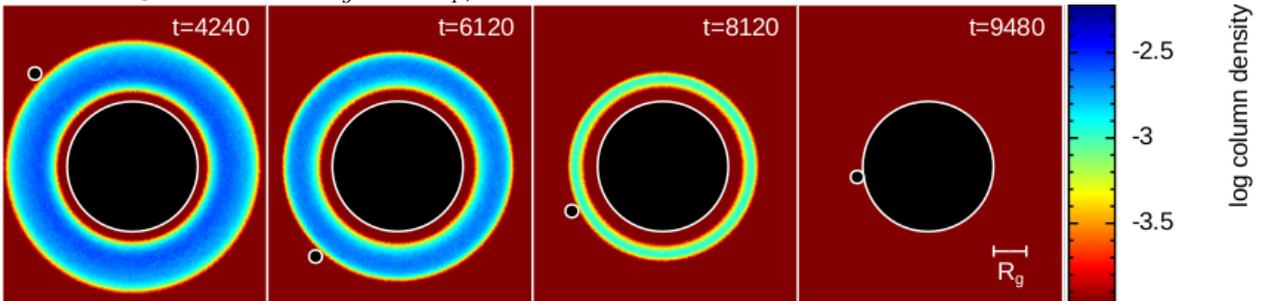
As Figuras 23 e 24 mostram as taxas de acreção dos buracos negros primário e secundário para um disco mais espesso, com diferentes ângulos de inclinação, normalizados pela massa do disco inicial. Em ambas as figuras, não vemos qualquer efeito da compressão forçada, independente do ângulo de inclinação. Toda a massa é engolida antes que ela possa ser comprimida (esmagada) pelo buraco negro secundário. Estes resultados estão de acordo com simulações realizadas por Cerioli, Lodato e Price (2016) para o mesmo

Figura 21 Taxas de acreção de massa dos buracos negros primário (linha preta) e secundário (linha vermelha) com um disco circumprimário inclinado à 180 graus. A linha horizontal preta representa o limite de Eddington.



FONTE: A autora

Figura 22 *Snapshots* da densidade de coluna (em escala logarítmica) usando simulações com $N_{part} = 5 \times 10^5$. A figura indica a evolução de um disco circumprimário inclinado à 180 graus. A unidade do código assumida para o comprimento é o raio gravitacional do buraco negro primário $R_g = GM_p/c^2$.



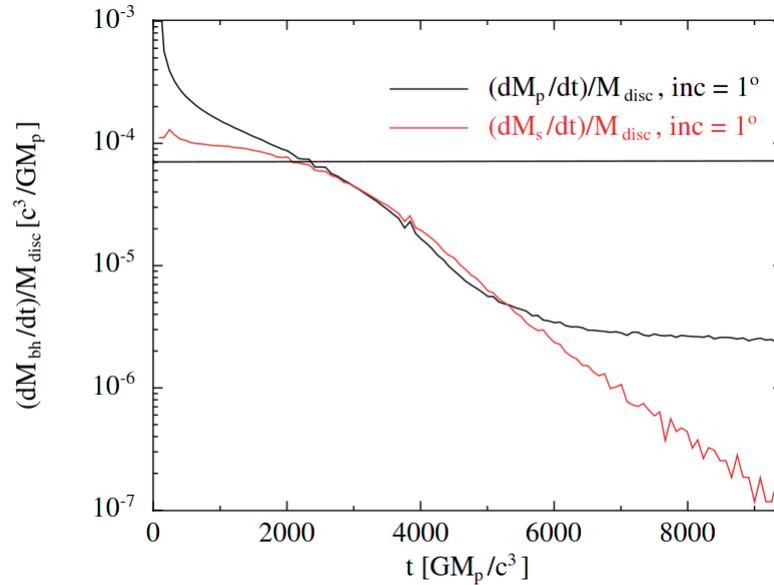
FONTE: A autora

valor de H/R .

5.1.6 Contrapartidas Eletromagnéticas da Fusão de Binárias de BNSMs

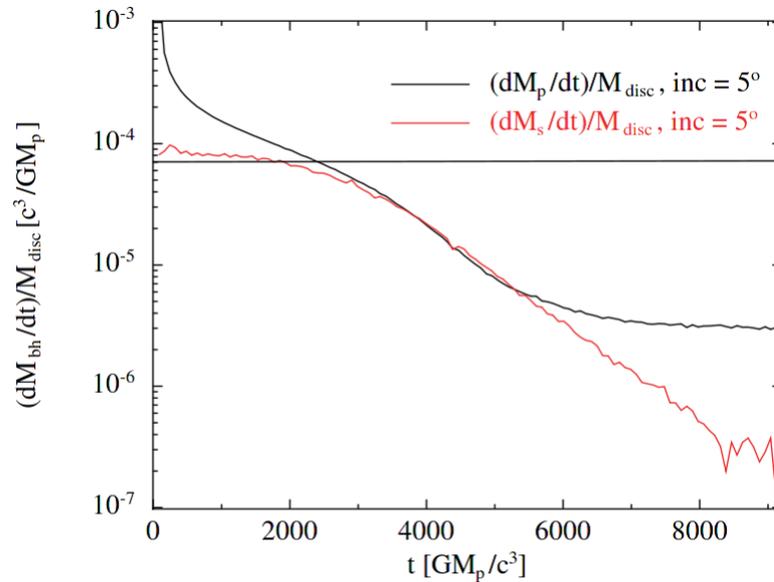
A evolução de um disco de acreção durante a coalescência de uma binária de BNSMs, em um núcleo galáctico, está sujeita a alguns tipos de mecanismos responsáveis pelas contrapartidas eletromagnéticas. O mecanismo conhecido como *snowplough*, pode levar a um aumento na luminosidade bolométrica da binária próxima à fusão. Este mecanismo pode ser detectado combinando com o sinal das ondas gravitacionais. A densidade

Figura 23 Taxas de acreção para o primário e secundário como função do tempo (em unidades do código) para um disco espesso com $H/R = 0,05$, inclinado a 1 grau.



FONTE: A autora

Figura 24 Taxas de acreção para o primário e secundário como função do tempo (em unidades do código) para um disco espesso com $H/R = 0,05$, inclinado a 5 graus.



FONTE: A autora

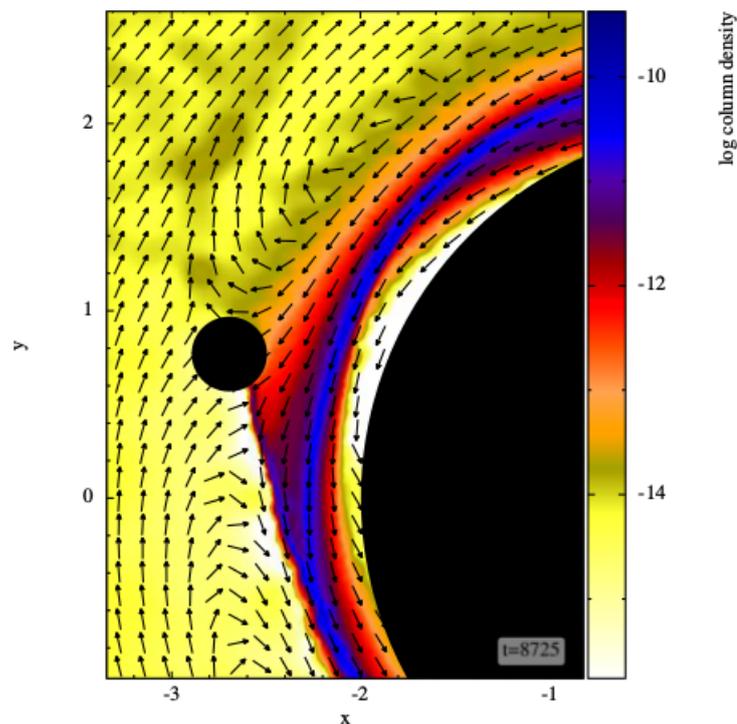
da região do disco entre os buracos negros primário e secundário pode aumentar significativamente antes da fusão, já que os buracos negros se mantêm ligados quando a radiação gravitacional torna-se o processo dominante para a aproximação do sistema. Quando isso acontece, a componente secundária esgota rapidamente o disco interno para o buraco negro central. Então, o aumento na densidade do disco interno pode levar ao aumento na

luminosidade.

O fenômeno *squeezing* é causado pela compressão do gás no disco interno quando o buraco negro secundário espirala em direção à primária. Este fenômeno causa um aumento nas taxas de acreção que sempre excedem a taxa de Eddington. Simulações recentes mostraram que com a diminuição da separação da binária, a taxa de acreção da secundária aproxima-se do valor da taxa de acreção da componente central. Como a fusão acontece, existe um intenso pico na taxa da \dot{M}_p , que atinge um valor máximo quase duas ordens de magnitude acima do valor quiescente (CERIOLI; LODATO; PRICE, 2016).

Tanto o mecanismo *squeezing* quanto o *snowplough* podem não ocorrer por dois principais fatores: devido às trajetórias *horseshoe* e a sistemas desalinhados. Baruteau, Ramirez-Ruiz e Masset (2012a) mostraram que, quando a escala de tempo que mantém a binária ligada, dominada pelo regime das ondas gravitacionais, torna-se menor que o tempo de deriva do disco, os elementos do fluido no disco interno são canalizados para o disco externo por órbitas *horseshoe* (ver Figura 25).

Figura 25 Órbitas *horseshoe*, com as setas indicando as velocidades das partículas no sistema de referência co-rotacionando com o buraco negro secundário.



FONTE: Cerioli, Lodato e Price (2016)

Outro fator que pode levar à inexistência dos mecanismos que fornecem as contrapartidas eletromagnéticas em discos gasosos, surge por meio de sistemas disco-binária desalinhados. Estudos analíticos anteriores mostraram que altas inclinações (> 30 graus) acarretam no decaimento significativo dos torques de maré pela componente secundária no disco. Isso acontece devido à ineficácia dos torques de maré com o aumento do ân-

gulo de inclinação, fazendo com que a luminosidade do sistema não ultrapasse a taxa de Eddington (LUBOW; MARTIN; NIXON, 2015).

Nos resultados numéricos apresentados neste capítulo, observamos algumas restrições nos mecanismos que levam ao aumento das taxas de acreção dos buracos negros. O mecanismo *snowplough* foi encontrado em discos de acreção com inclinações menores que 10 graus produzindo um aumento em luminosidade excedendo a taxa de Eddington; chegando a cerca de $\dot{M}_p \simeq 29,6M_{\odot}/\text{ano}$ e $\dot{M}_p \simeq 6,58M_{Edd}$ durante o segundo pico de maior acreção (para um disco inclinado a 10 graus). Enquanto, o mecanismo *squeezing* foi nitidamente observado quando sistemas estão inclinados a 1 e 5 graus. Além da constatação das previsões analíticas feitas por Lubow, Martin e Nixon (2015) de que não ocorrem qualquer tipo de mecanismo, que leva as possíveis assinaturas eletromagnéticas, próximo a completa fusão da binária em discos em contra-rotação ($\theta = 180$ graus). Os resultados mostrados aqui indicam a presença de possíveis sinais eletromagnéticos em combinação com os sinais da radiação gravitacional para futuros detectores espaciais (ver mais detalhes na próxima seção). Além de sugerir diretamente a observação de BNSMs nos centros das galáxias.

5.2 Taxas de Evento Esperadas

Nesta etapa do trabalho, realizamos uma estimativa do número esperado de coalescências por ano para os detectores espaciais de ondas gravitacionais LISA e gLISA, com a possibilidade de uma assinatura eletromagnética nos últimos estágios antes da fusão da binária.

5.2.1 Cenário Astrofísico

5.2.1.1 Formação das Binárias de BNSMs

A evolução dos BNSMs nos centros das galáxias pode ter sido originada a partir de buracos negros de massas estelares ou intermediárias, conhecidos como sementes de buracos negros massivos. Sementes com massas da ordem de $\sim 10 - 10^3 M_{\odot}$ podem ter começado como remanescentes das estrelas primordiais ou do colapso de aglomerados estelares densos (EBISUZAKI et al., 2001; MADAU; REES, 2001; MATSUBAYASHI; SHINKAI; EBISUZAKI, 2004; DEVECCHI; VOLONTERI, 2009).

Filloux et al. (2010) encontraram, a partir de simulações cosmológicas, que sementes de buracos negros com $10^2 M_{\odot}$ são capazes de crescer pela acreção de gás e fusão. Este canal de evolução pode ter produzido BNSMs com faixa de massa de cerca de $\sim 10^6 - 10^9 M_{\odot}$, atualmente observados nos centros das galáxias.

Filloux et al. (2011) derivaram a partir daquelas simulações a taxa de coalescência por unidade de volume e por intervalo de massa. Os autores encontraram que BNSMs

podem ter massas muito maiores que $10^9 M_{\odot}$ devido à centenas de experiências de fusão ao longo dos seus históricos de evolução.

Neste trabalho, consideramos um cenário similar àquele modelado numericamente por [Filloux et al. \(2010\)](#) para o crescimento hierárquico dos BNSMs em AGNs. No entanto, estendemos essa investigação para binárias de BNSMs circundados por discos de gás formados da interação binária-nuvem. Além disso, consideramos que estes sistemas disco-binária são desalinhados com diferentes ângulos de inclinação. Na próxima seção, descreveremos os resultados numéricos de algumas simulações encontradas na literatura, assumindo cenários que envolvem a formação de discos inclinados.

5.2.1.2 Formação dos Discos de Acreção Inclinados

Como descrito anteriormente (Seção 5.1), consideramos que uma binária de BNSMs é circundada por um disco de acreção viscoso e que os planos orbitais do disco e da binária podem ser desalinhados. No entanto, vamos assumir agora que, os discos inclinados são formados por episódios de acreção de matéria orientados aleatoriamente proveniente de nuvens de gás.

Estudos têm investigado quais mecanismos podem formar discos de acreção circundando binárias e como acontecem os processos de abastecimento nas diferentes escalas de evolução ([PRINGLE, 1992](#); [PRINGLE, 1997](#)). Estas investigações têm sido sustentadas por simulações numéricas que modelam cenários entre a interação da nuvem com a binária.

[Nixon et al. \(2012\)](#) mostraram que eventos de acreção orientados aleatoriamente em um buraco negro rotacionando podem provavelmente formar um disco de acreção. A probabilidade do ângulo de inclinação entre o disco e a binária permanecer na faixa de $45^{\circ} \lesssim \theta \lesssim 135^{\circ}$ é cerca de 70% dos casos. Os autores enfatizaram que naqueles ângulos, os discos podem quebrar ou serem despedaçados (*tear*), como mostraram em suas simulações.

[Dunhill et al. \(2014\)](#) encontraram resultados a partir de simulações numéricas que mostram nuvens com diferentes direções interagindo com binárias de BNSMs e que estas interações influenciam no desalinhamento entre os planos orbitais do disco de gás formado e da binária. Os autores mostraram que em todas as simulações, os discos sempre tendiam à inclinação inicial da nuvem.

Resultados similares a esses também foram encontrados por [Goicovic et al. \(2016\)](#) e [Goicovic et al. \(2017\)](#). Estes autores exploraram diferentes distâncias do pericentro e inclinações relativas, encontrando que para todos os sistemas nuvem-binária inicialmente alinhados houve a formação de discos circunprimário ou circunsecundário, com inclinações finais próximas de 3 e 6 graus, respectivamente, sendo que os discos circumbinários, tendiam a manter a orientação inicial da nuvem.

Assumindo os resultados encontrados destas simulações numéricas, da queda de

gás com orientação aleatória em binárias de BNSMs, como apresentadas por [Dunhill et al. \(2014\)](#), [Goicovic et al. \(2016\)](#) e [Goicovic et al. \(2017\)](#), e considerando a estimativa obtida por [Nixon et al. \(2012\)](#) para discos com altas inclinações, estimamos a probabilidade de discos inclinados serem formados por pequenos e médios ângulos (4, 5, 6, 10 e 20 graus), dado pelo ângulo sólido fracional. Na próxima seção, apresentaremos o cálculo para a estimativa das taxas de eventos esperadas para os detectores espaciais LISA/gLISA.

5.2.2 Estimando as Taxas de Eventos

Para estimar a taxa de detecção esperada dos BNSMs em fusão, circundados por discos inclinados, precisamos responder algumas questões fundamentais relacionadas a esses sistemas. Qual é a probabilidade de episódios de acreção de gás com orientação aleatória formarem discos inclinados em pequenos ângulos? Daqueles discos inclinados que foram formados, qual é a faixa de ângulos esperada para eles?

Para responder a estas questões nossa investigação é baseada i) nas simulações da interação entre nuvem e binária ([DUNHILL et al., 2014](#); [GOICOVIC et al., 2016](#); [GOICOVIC et al., 2017](#)); ii) na probabilidade encontrada por [Nixon et al. \(2012\)](#) para altas inclinações, uma vez que o estudo destes autores está relacionado ao modo de acreção dos BNSMs; iii) nos resultados obtidos previamente, neste trabalho, que mostraram que o efeito *snowplough* em planos orbitais disco-binária desalinhados até 10 graus leva a um aumento na luminosidade excedendo o limite de Eddington ([PEREIRA et al., 2019a](#)) e por fim, iv) na nossa estimativa da probabilidade de originar discos de acreção com baixas inclinações (≤ 20 graus).

Estas considerações nos darão a estimativa do número de eventos esperados por binárias de BNSMs circundados por discos inclinados para os detectores LISA/gLISA. Mostraremos também quantos destes eventos podem ser esperados com possíveis contrapartidas eletromagnéticas antes da fusão para sistemas com pequenas inclinações, como encontrado anteriormente por [Pereira et al. \(2019a\)](#).

Utilizaremos a expressão a seguir para calcular a taxa de eventos por intervalo de frequência *ringdown* ([FILLOUX et al., 2011](#)), dada por:

$$\frac{dR}{d\ln(f_{rd})} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{f(M, z)}{1+z} \left(\frac{f_{inc}}{0,7} \right) \frac{dM}{d\ln(f_{rd})} \frac{dV}{dz} dz, \quad (5.2)$$

onde $z_2 = z_{max}(f_{rd})$ e $z_1 = z_{min}(f_{rd})$ são os limites de integração, $f(M, z)$ é uma função da massa do BNSM resultante da fusão em diferentes redshifts, f_{inc} é a fração de sistemas disco-binária inclinados que nós escalamos para uma $f_{inc}/0,7$ (segundo a estimativa feita por [Nixon et al. \(2012\)](#)) e dV é o elemento de volume comóvel dado por

$$dV = \frac{4\pi c}{H_0} \frac{r^2(z)}{\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_m(1+z)^3}} dz, \quad (5.3)$$

onde $r(z)$ é a distância comóvel e os valores adotados para os parâmetros cosmológicos são: $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ para o parâmetro de Hubble, $\Omega_\Lambda = 0,7$ para o parâmetro da densidade de energia escura e $\Omega_m = 0,3$ para o parâmetro da densidade de matéria.

Consideramos os seguintes parâmetros para os detectores espaciais: i) razão sinal ruído igual 10 para LISA e gLISA (TINTO; ARAÚJO, 2016), ii) densidades espectrais que descrevem a sensibilidade do detector, iii) eficiência da onda gravitacional $\epsilon = 0,01$ e iv) a banda de frequência projetada para cada detector: LISA $\sim 10^{-5} - 10^{-1} \text{ Hz}$ e gLISA $\sim 10^{-4} - 10 \text{ Hz}$. Para os buracos negros, supomos o redshift inicial para formação dos BNSMs em $z_i = 20$ (seguindo a simulação numérica realizada por Filloux et al. (2010)) e variamos o parâmetro spin $a = 0, 1; 0, 5; 0, 9$.

Para calcular as taxas de detecção assumimos somente a fase ringdown do processo de coalescência da binária. Visto que, esta fase descreve o resultado final da fusão da binária. A relação entre a massa do BNSM e a frequência *ringdown* (em Hz) é dada por

$$f_{rd} = \frac{1,2 \cdot 10^4}{1+z} \left(\frac{M_{bh}}{M_\odot} \right)^{-1} f(a), \quad (5.4)$$

sendo $a = cJ/GM_{bh}^2$ o parâmetro spin e $f(a)$ uma função que depende do spin do buraco negro dado por

$$f(a) = \left[\frac{100}{37} - \frac{63}{37}(1-a)^{0,3} \right]. \quad (5.5)$$

Em geral, qualquer buraco negro tem algum spin e se este buraco negro é circundado por um disco gasoso, então o plano do disco pode estar inclinado com relação ao spin do buraco negro (efeito Lense-Thirring). Se um disco é assumido razoavelmente espesso e possui os seguintes parâmetros: razão de aspecto do disco $H/R = 0,1$, parâmetro de viscosidade $\alpha = 0,1$ e um valor baixo para o spin $a = 0,1$; ele pode satisfazer a seguinte condição a fim de evitar qualquer tipo de efeito que possa causar sua quebra ou rompimento (NIXON et al., 2012):

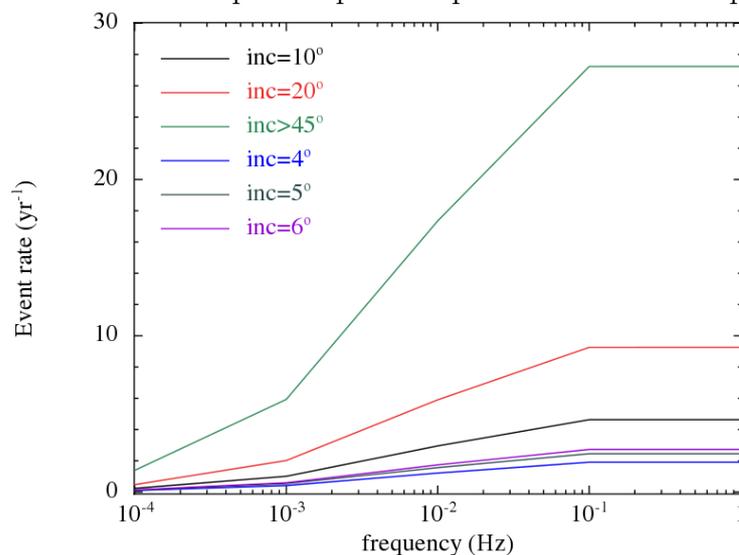
$$|\text{sen}\theta| \lesssim \frac{H}{R} \frac{3\alpha}{4a}. \quad (5.6)$$

Um disco com estes parâmetros pode estar inclinado a cerca de 4 graus. De maneira geral, a probabilidade de discos se formarem com este ângulo, independente dos valores dos parâmetros considerados, assumindo eventos de acreção de matéria aleatoriamente orientados, é próximo de 7%, dado pelo ângulo sólido fracional. Assim sendo, a probabilidade de sistemas desalinhados serem encontrados a pequenas inclinações $1^\circ \lesssim \theta \lesssim 20^\circ$ é cerca de 2% – 34% (ver Tabela 4).

5.2.3 Número de Eventos e Probabilidade de Discos Inclinados

A Figura 26 mostra a taxa de evento total por ano como uma função da banda de frequência LISA (em Hz). Sistemas disco-binária desalinhados formados por episódios de acreção e fusões hierárquicas podem ser fontes promissoras para a detecção de onda gravitacional. Encontramos cerca de 28 eventos por ano para sistemas inclinados entre 45 a 135 graus durante a missão LISA, enquanto sistemas desalinhados a 20 graus podem produzir até 10 eventos por ano. No entanto, sistemas inclinados em 4, 5, 6 e 10 graus podem ser capazes de gerar entre 2 a 5 eventos por ano. BNSMs desalinhados em ângulos ≤ 10 graus podem levar a uma possível contrapartida eletromagnética antes do *burst* de radiação gravitacional como obtido anteriormente (PEREIRA et al., 2019a).

Figura 26 Taxa de evento total esperada por ano para a banda de frequência LISA.

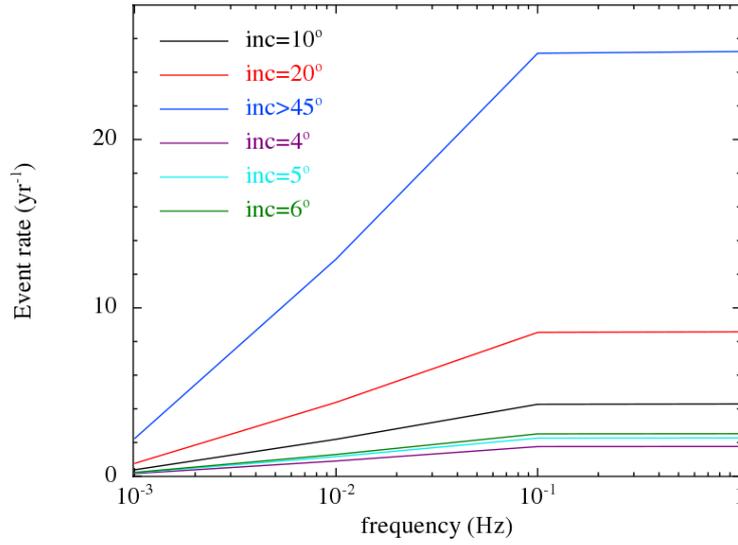


FONTE: A autora

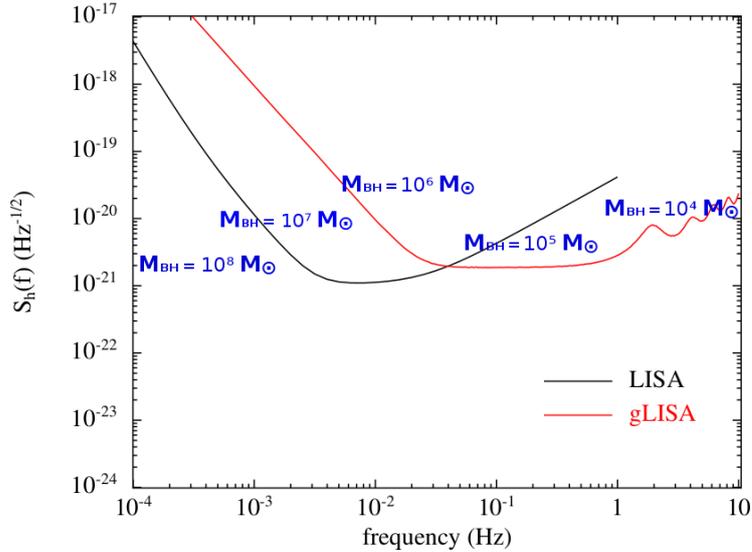
A Figura 27 mostra as taxas de coalescência para uma proposta de detector espacial geostacionário, chamado gLISA. O gráfico mostra a taxa de evento total por ano para a banda de frequência gLISA (em Hz). A melhor sensibilidade deste detector é aproximadamente entre $3 \times 10^{-2} - 1$ Hz, que é complementar à banda de frequência do LISA. As taxas de fusão são muito similares àsquelas encontradas para o LISA. O detector gLISA poderá observar cerca de 2 a 3 eventos por ano de sistemas coalescendo desalinhados em 4, 5, 6 e 10 graus, enquanto BNSMs desalinhados em 20 graus poderão produzir 4 eventos por ano e sistemas altamente inclinados (> 45 graus) poderão fornecer taxas da ordem de 23 a 26 eventos por ano.

Fontes multi-mensageiras como binárias de BNSMs circundadas por um disco de acreção são esperados pelos futuros detectores espaciais. A Figura 28 mostra as faixas de massas que poderão ser observadas pelos detectores LISA e gLISA, de acordo com atual sensibilidade destes detectores.

Figura 27 Taxa de evento total por ano para a banda de frequência do detector gLISA.



FONTE: A autora

 Figura 28 Sensibilidade como uma função da frequência para os detectores LISA e gLISA, com as faixas de massa promissoras para cada intervalo de frequência *ringdown*.


FONTE: A autora

A Tabela 4 mostra o número de eventos observáveis para detectores espaciais assumindo diferentes parâmetros: spin do BNSM, ângulo de inclinação, probabilidade de formar discos desalinhados, taxas de eventos por ano para o LISA/gLISA e a possibilidade de um precursor eletromagnético. A probabilidade para a formação de discos desalinhados com respeito ao vetor momento angular da binária de BNSMs com inclinações em 4, 5 e 6 graus é da ordem de 7% – 10%. Nestes casos, o número de eventos esperado para o LISA/gLISA é cerca de 2 – 3 eventos por ano com uma possível contrapartida eletromagnética nos últimos dias antecedendo a fusão.

A probabilidade de originar sistemas inclinados em 10 graus é cerca de 17% e a

Tabela 4 Taxas de evento esperadas para os detectores espaciais. A primeira coluna mostra o parâmetro spin, a segunda coluna mostra a inclinação entre os planos orbitais do disco e da binária, a terceira mostra a probabilidade de discos inclinados, as quarta e quinta colunas mostram o número de eventos esperado por ano para o LISA e gLISA, respectivamente, e a sexta coluna mostra a possibilidade de um precursor eletromagnético. Para ambos os detectores, usamos $\epsilon = 0,01$ e $\text{SNR}=10$.

<i>Spin</i>	<i>Inclinação</i>	<i>Prob.</i>	<i>LISA (yr⁻¹)</i>	<i>gLISA (yr⁻¹)</i>	<i>Cont. Ele.</i>
0,1	$\theta=4^\circ$	7%	2,00	1,66	Sim
0,5	$\theta=4^\circ$	7%	1,91	1,76	Sim
0,9	$\theta=4^\circ$	7%	1,78	1,82	Sim
0,1	$\theta=5^\circ$	9%	2,56	2,13	Sim
0,5	$\theta=5^\circ$	9%	2,45	2,27	Sim
0,9	$\theta=5^\circ$	9%	2,29	2,34	Sim
0,1	$\theta=6^\circ$	10%	2,84	2,37	Sim
0,5	$\theta=6^\circ$	10%	2,72	2,52	Sim
0,9	$\theta=6^\circ$	10%	2,54	2,59	Sim
0,1	$\theta=10^\circ$	17%	4,83	4,02	Sim
0,5	$\theta=10^\circ$	17%	4,63	4,28	Sim
0,9	$\theta=10^\circ$	17%	4,32	4,41	Sim
0,1	$\theta=20^\circ$	34%	9,66	8,05	Incerto
0,5	$\theta=20^\circ$	34%	9,26	8,57	Incerto
0,9	$\theta=20^\circ$	34%	8,65	8,82	Incerto
0,1	$45^\circ \lesssim \theta \lesssim 135^\circ$	70%	28,41	23,70	Não
0,5	$45^\circ \lesssim \theta \lesssim 135^\circ$	70%	27,23	25,22	Não
0,9	$45^\circ \lesssim \theta \lesssim 135^\circ$	70%	25,43	26,00	Não

taxa de coalescência estimada para os interferômetros LISA/gLISA pode se aproximar de 5 eventos por ano. Neste caso, o sistema poderá também emitir um sinal eletromagnético prévio ao *burst* de radiação gravitacional. Com inclinações de 4, 5, 6 e 10 graus, o aumento em luminosidade pode exceder a taxa de Eddington, levando a uma possível assinatura eletromagnética. A chance de formar sistemas disco-binária inclinados em 20 graus é maior, cerca de 34% e o número de eventos de ondas gravitacionais pode alcançar de 8 a 9 eventos por ano com o LISA e o gLISA. Como destacado por [Nixon et al. \(2012\)](#) a possibilidade de surgir sistemas com altas inclinações (> 45 graus) é da ordem de 70% e as taxas esperadas para estes sistemas coalescendo estão entre 25 e 28 eventos por ano. Neste caso, não é esperada qualquer evidência eletromagnética, porque discos altamente inclinados podem quebrar ou romper muito antes da fusão da binária.

Mostramos ainda na Tabela 4, a variação do parâmetro spin em diferentes inclinações. Encontramos que para buracos negros rotacionando rapidamente existe um declínio nas taxas de evento em relação aos BNSMs rotacionando lentamente, quando detectados pelo LISA. A diferença entre as taxas em sistemas inclinados em 4, 5, 6 e 10 graus é modesta, no entanto para altas inclinações (> 45 graus) as taxas variam por até 3 eventos por ano. No caso das taxas calculadas para o detector gLISA, a mudança no parâmetro spin em diferentes inclinações mostra um aumento nas taxas diretamente proporcional ao spin.

Considerações Finais

Nesta tese, apresentamos os resultados numéricos das taxas de acreção a partir de um disco de gás desalinhado com o plano orbital de um sistema binário de BNSMs. As simulações realizadas durante o estágio de doutorado-sanduiche no Departamento de Física Teórica da Universidade de Milão permitiram inferir possíveis contrapartidas eletromagnéticas de um par de BNSMs próximo à fusão emitindo ondas gravitacionais. Assumimos uma binária com razão de massa de $q = 10^{-3}$, um disco fino com a razão $H/R = 0,01$ e uma massa do disco interna da ordem de $\sim 1M_{\odot}$. A escolha da razão de aspecto do disco foi baseada no trabalho de [Tazzari e Lodato \(2015\)](#). Estes autores estimaram a massa do disco antes da fusão encontrando que para um BNSM primário com $10^8 M_{\odot}$, a massa interna do disco em desacoplamento é da ordem de $1M_{\odot}$. Desse modo, espera-se que binárias coalescendo tenham discos finos.

Encontramos que discos inclinados com ângulos de 1, 5 e 10 graus fazem as taxas de acreção exceder a taxa de Eddington entre os tempos $t \simeq 8500 - 8975$, isto é, próximo ao tempo de fusão da binária $\tau_{og} \simeq 9476$, em unidade do código. Por outro lado, discos circumprimários inclinados entre 20 e 30 graus mostraram um pico muito menos pronunciado nas taxas de acreção (ver Figura 17) e discos com inclinações em 180 graus não mostraram nenhum aumento nas taxas (ver Figura 21). A massa interna do disco é rapidamente acretada apenas antes da fusão, levando a um rápido aumento na taxa de acreção de massa acima do limite de Eddington. Estes resultados mostram que o efeito *snowplough* é importante para inclinações até 10 graus.

Taxas de acreção dos BNSMs secundários com discos inclinados em 1 e 5 graus apresentaram duplos picos confirmando o fenômeno *squeezing* em tempos iniciais da evolução da binária. O buraco negro companheiro rapidamente migra em direção ao BNSM central varrendo o gás no disco interno. Discos com ângulos maiores que 5 graus não apresentam qualquer aumento pronunciado nas taxas do secundário durante a evolução da binária (ver Figura 18) e se apresentam mais estendidos do que aqueles com inclinações menores que 5 graus (ver Figura 20).

Nossos resultados concordam com o trabalho analítico de [Lubow, Martin e Nixon \(2015\)](#), que obtiveram um decréscimo nos torques de maré ressonante com o aumento do ângulo de inclinação; comparamos também nossas simulações com os resultados dos precursores eletromagnéticos estudados por [Cerioli, Lodato e Price \(2016\)](#) e encontramos um aumento em luminosidade para inclinações menores ou iguais a 10 graus, excedendo a taxa de Eddington. Além disso, identificamos a presença do mecanismo *squeezing* (para 1 e 5 graus) durante a migração do secundário, tal como encontrado por [Cerioli, Lodato e Price \(2016\)](#) para sistemas disco-binária alinhados.

Realizamos simulações para discos mais espessos ($H/R = 0,05$) motivados na investigação de assinaturas eletromagnéticas antecedendo a fusão da binária. Encontramos que nenhum efeito acontece, independente do ângulo de inclinação (ver Figuras 23 e 24). Estes resultados estão de acordo com o trabalho numérico realizado por Baruteau, Ramirez-Ruiz e Masset (2012a). Estes autores encontraram que o efeito *snowplough* não acontece para discos mais espessos. Uma pequena fração da energia liberada durante a fusão pode aquecer o gás, produzindo apenas um *afterglow* eletromagnético (MILOSA-VLJEVIĆ; PHINNEY, 2005).

Embora tenhamos investigado por meio de simulações de baixa resolução a migração da componente secundária via emissão de ondas gravitacionais em direção à primária, nossos resultados estão completamente de acordo com estudos anteriores. Uma investigação em alta resolução pode aumentar as taxas de acreção de massa para pequenas inclinações.

Concluimos também que nossos resultados podem ser aplicados às contrapartidas eletromagnéticas de fusões de buracos negros com massas estelares. Neste caso, se mesmo uma pequena fração de gás permanece no disco, as taxas de acreção produzidas quando o disco de gás é empurrado no buraco negro primário, pelo decaimento do secundário, durante a fusão, levam à picos de acreção comparáveis ou excedendo a taxa de Eddington. A assinatura eletromagnética pode ocorrer em menos de 8 dias antes da fusão final da binária.

Um cenário onde fusões de binárias de buracos negros com massas estelares, dirigida pela radiação gravitacional, produzindo um sinal eletromagnético já tem sido sugerido por Mink e King (2017). Estes autores argumentaram que o cenário acontece se um disco de acreção de baixa massa sobrevive até a coalescência. Além disso, eles propuseram que o disco responde a alguns processos das fases evolucionárias (tais como perda de massa repentina e recuo da onda gravitacional) dentro de algumas horas da fusão. O sinal eletromagnético poderá surgir em raios-X, talvez se estendendo para o infravermelho e durar pelo menos algumas horas.

Quanto à estimativa das taxas de evento por ano para os detectores LISA/gLISA com a possibilidade de uma contrapartida eletromagnética antes da fusão da binária, assumimos a binária de BNSMs circundada por um disco de acreção e consideramos que o disco e a binária estão desalinhados. Concentramos em um modelo onde o disco de gás é formado por eventos de acreção de material com orientação aleatória a partir de nuvens de gás, seguindo as simulações numéricas de Dunhill et al. (2014), Goicovic et al. (2016), Goicovic et al. (2017). Cada disco de acreção está associado a um ângulo de inclinação diferente. Estimamos a probabilidade para a formação de discos gasosos inclinados em ângulos menores que 20 graus baseado nos trabalhos de Nixon et al. (2012) e Nixon, King e Price (2013). Nixon e colaboradores calcularam que os desalinhamentos originais do disco com relação ao spin do buraco negro estão entre $45^\circ \lesssim \theta \lesssim 135^\circ$, em 70% dos

episódios de acreção aleatoriamente orientados.

Encontramos que a probabilidade para a formação de discos inclinados até 6 graus é da ordem de 10%, enquanto inclinações em 10 e 20 graus chegam a 17% e 34%, respectivamente. Estas probabilidades estão diretamente relacionadas com o resultado final das taxas de eventos esperadas por ano para os interferômetros LISA/gLISA. Encontramos taxas muito similares para ambos detectores. Para a banda de frequência do LISA, obtemos que a taxa de evento total para sistemas com inclinações em 4, 5, 6 e 10 graus é da ordem de 2 a 5 eventos por ano, enquanto sistemas disco-binária inclinados a 20 graus podem alcançar até 10 eventos por ano e sistemas inclinados entre 45 e 135 graus podem fornecer cerca de 28 eventos por ano.

Para a banda de frequência do gLISA, o número total de fusões para sistemas com ângulos em 4, 5, 6 e 10 graus é da ordem de 2 a 3 eventos por ano, enquanto BNSMs desalinhados em 10 graus são capazes de produzir 4 eventos por ano e sistemas altamente inclinados podem fornecer entre 23 e 26 eventos por ano. Os planos orbitais do disco e binária desalinhados em 4, 5, 6 e 10 graus podem fornecer um possível sinal eletromagnético antecendo o burst de ondas gravitacionais, seguindo os resultados fornecidos por [Pereira et al. \(2019a\)](#). Apesar da taxa de evento para sistemas inclinados em pequenos ângulos ser baixa, existe uma grande possibilidade dos LISA/gLISA detectarem todos os eventos previstos com este modelo dado o constante avanço da sensibilidade deles.

Nossas estimativas das taxas de eventos para sistemas altamente desalinhados (acima de 45 graus) são mais otimistas que as taxas obtidas por [Filloux et al. \(2011\)](#). Filloux e colaboradores encontraram cerca de 16 eventos por ano para o LISA, assumindo que o crescimento dos BNSMs ocorrem devido ao acréscimo de massa e múltiplas fusões, mas eles não consideram discos de acreção inclinados circundando os buracos negros. Nossos resultados para sistemas entre $45^\circ \lesssim \theta \lesssim 135^\circ$ são ainda mais promissores que aqueles obtidos por [Tinto et al. \(2013\)](#). Eles assumiram o mesmo modelo de formação de [Filloux et al. \(2010\)](#) e encontraram cerca de 18 eventos por ano para o LISA e gLISA.

Embora sistemas com altas inclinações não mostrem indícios de contrapartidas eletromagnéticas, a detecção das ondas gravitacionais destes sistemas pode fornecer informações importantes sobre os mecanismos físicos que levam à quebra e ao rompimento dos discos com altos ângulos de inclinação. Neste cenário, o efeito Bardeen-Petterson parece não ser tão eficiente (para haver uma transição suave das partes alinhada e desalinhada do disco), e o resultado de um disco quebrado ou rompido parece ser inevitável para sistemas com inclinações acima de 30 graus ([NEALON; PRICE; NIXON, 2015](#)).

As estimativas obtidas neste trabalho prevêm um número otimista de eventos esperado em altos ângulos para os detectores espaciais LISA/gLISA e a possibilidade de um cenário promissor para a primeira evidência de uma relação entre uma fusão de BNSMs e uma assinatura eletromagnética para sistemas em pequenas inclinações. As missões LISA e gLISA podem contribuir significativamente para a astrofísica, discernindo

os diferentes cenários evolucionários que levam à formação dos BNSMs.

• Perspectivas Futuras

Discos de acreção circundando buracos negros em rotação estão sujeitos a formação de *warps*. A dinâmica de acreção a partir de um disco *warped* pode estabelecer um papel fundamental nestes casos, já que ele regula o histórico do spin do BNSM e, como uma consequência, a sua própria capacidade de crescer rapidamente. Um dos casos mais bem estudados até hoje é o do disco *warped* da NGC 4258. Alguns trabalhos sugerem que a formação deste disco *warped* aconteceu devido à precessão Lense-Thirring (LENSE; THIRRING, 1918) com o BNSM ($\sim 3,7 \times 10^7 M_\odot$) rotacionando desalinhado, no núcleo da NGC 4258.

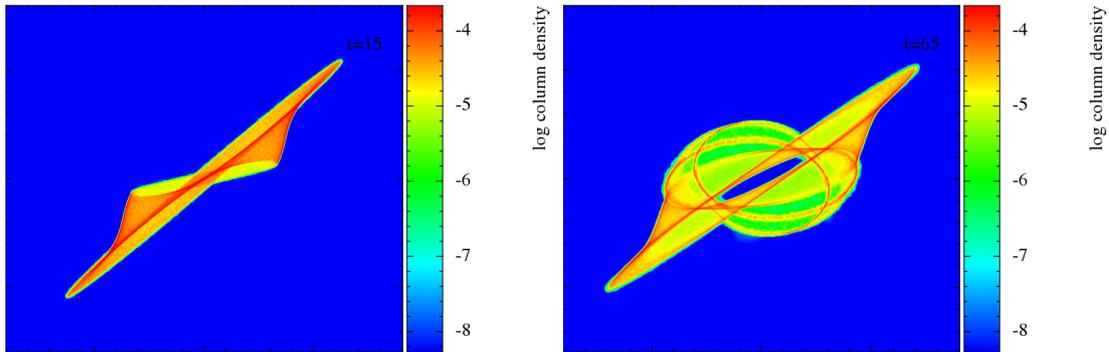
Martin (2008) usou modelos analíticos para sugerir a presença do disco *warped* pela precessão Lense-Thirring. A autora mostrou que tais modelos ajustam bem a forma do disco para várias combinações do raio de *warping* e para as configurações do disco e do BNSM. No entanto, modelos construídos por Trzeźniewski et al. (2011) mostram que o disco maser da NGC 4258 se ajusta melhor a altos ângulos de inclinação, maiores que 60 graus.

Em um trabalho em fase de desenvolvimento, estamos executando simulações numéricas com o código PHANTOM, variando o ângulo de inclinação do disco para diferentes valores do parâmetro spin do BNSM, a fim de investigar se a precessão Lense-Thirring seria eficiente para a formação do *warping* em NGC 4258 e sugerir possíveis mecanismos físicos que possam ter levado à formação dos braços espirais anômalos desta galáxia. Nosso modelo de disco é baseado nas condições iniciais sugeridas por Martin (2008) e os resultados preliminares têm mostrado que discos como aquele de NGC 4258 são de fato *warped*, em que houve uma quebra ou rompimento (para todos os ângulos simulados) formando anéis precessionando em torno do BNSM central em um tempo $t = 65GM_{bn}/c^3$, como mostrado na Figura 29. Sugerimos que a formação dos braços anômalos daquela galáxia possa ter surgido de anéis de gás remanescentes da evolução inicial da NGC 4258. No caso desta galáxia espiral, podemos ver diretamente a relação do parâmetro spin do BNSM central com a evolução da galáxia.

Nos trabalhos futuros, queremos estender ainda mais todo este conteúdo sobre a física dos discos de acreção, parâmetros (massa e spin) dos buracos negros, relação do BNSM central com sua galáxia hospedeira e a emissão das ondas gravitacionais. Os próximos objetivos serão:

i) Investigar o Efeito Bardeen-Petterson em discos inclinados e determinar os ângulos de inclinação críticos que contribuem para o rápido crescimento ou, em certas situações, anulam quase que totalmente o acréscimo de matéria em BNSMs nos centros das galáxias (ou no caso da componente primária de uma binária), pelo surgimento de *gaps* durante a

Figura 29 Snapshots da densidade de coluna em escala logarítmica. O disco apresenta um ângulo de 45 graus com relação ao spin ($a = 0,5$) do BNSM. O tempo em unidades do código é mostrado no canto superior direito. Na imagem à esquerda, vemos em um tempo $t = 15GM_{bn}/c$ a formação do warp no disco e na imagem à direita em $t = 65GM_{bn}/c^3$ observamos os vários anéis se formando devido à alta inclinação.



FONTE: A autora

evolução do buraco negro.

ii) Verificar a evolução do spin dos BNSMs, e conseqüentemente seu rápido crescimento em massa, proveniente do gás aleatoriamente distribuído na galáxia hospedeira, levando em consideração eventos de acreção orientados aleatoriamente no BNSM central e a física de acreção de AGNs. Cenários como este podem nos ajudar a explicar a distribuição da direção de jatos observados em galáxias Seyfert, já que a direção do parâmetro spin evolui de acordo com a queda do gás no BNSM nuclear.

iii) Modelar os discos de acreção viscosos e determinar os parâmetros de viscosidade Shakura-Sunyaev e a razão de aspecto do disco. Os modelos utilizarão como condições iniciais BNSMs com massas de $10^7 - 10^9 M_{\odot}$, variando o parâmetro spin. Este estudo permitirá verificar o modo de abastecimento no BNSM no núcleo de uma galáxia (ou em uma binária) e como acontece o crescimento dessas fontes nos casos de acreção super- ou sub-Eddington.

Referências

- ABBOTT, B. P. et al. GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence. Physical Review Letters, v. 116, n. 24, p. 241103, jun. 2016.
- ABBOTT, B. P. et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. Physical Review Letters, v. 116, n. 6, p. 061102, fev. 2016.
- ABBOTT, B. P. et al. GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. Physical Review Letters, v. 119, n. 16, p. 161101, out. 2017.
- AJITH, P. et al. Template bank for gravitational waveforms from coalescing binary black holes: Nonspinning binaries. Phys. Rev. D, v. 77, n. 10, p. 104017, maio 2008.
- AJITH, P. et al. Inspiral-Merger-Ringdown Waveforms for Black-Hole Binaries with Nonprecessing Spins. Physical Review Letters, v. 106, n. 24, p. 241101, jun. 2011.
- AMARO-SEOANE, P. et al. Low-frequency gravitational-wave science with eLISA/NGO. Classical and Quantum Gravity, v. 29, n. 12, p. 124016, jun. 2012.
- ARMITAGE, P. J.; NATARAJAN, P. Accretion during the Merger of Supermassive Black Holes. ApJ, v. 567, p. L9–L12, mar. 2002.
- ARTYMOWICZ, P. On the Wave Excitation and a Generalized Torque Formula for Lindblad Resonances Excited by External Potential. ApJ, v. 419, p. 155, dez. 1993.
- ARTYMOWICZ, P.; LUBOW, S. H. Dynamics of binary-disk interaction. 1: Resonances and disk gap sizes. ApJ, v. 421, p. 651–667, fev. 1994.
- ARTYMOWICZ, P.; LUBOW, S. H. Mass Flow through Gaps in Circumbinary Disks. ApJ, v. 467, p. L77, ago. 1996.
- BACKER, D. C.; JAFFE, A. H.; LOMMEN, A. N. Massive Black Holes, Gravitational Waves and Pulsars. Coevolution of Black Holes and Galaxies, p. 438, 2004.
- BARDEEN, J. M.; PETERSON, J. A. The Lense-Thirring Effect and Accretion Disks around Kerr Black Holes. ApJ, v. 195, p. L65, jan. 1975.
- BARUTEAU, C.; RAMIREZ-RUIZ, E.; MASSET, F. No snowplough mechanism during the rapid hardening of supermassive black hole binaries. MNRAS, v. 423, p. L65–L69, 2012.
- BARUTEAU, C.; RAMIREZ-RUIZ, E.; MASSET, F. No snowplough mechanism during the rapid hardening of supermassive black hole binaries. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, v. 423, p. L65–L69, jun. 2012.
- BEGELMAN, M. C.; BLANDFORD, R. D.; REES, M. J. Massive black hole binaries in active galactic nuclei. Nature, v. 287, p. 307–309, set. 1980.

- CERIOLO, A. Gas accretion during the gravitational decay of supermassive black hole binaries. 152 p. Dissertação (Mestrado em Física) — *Università degli Studi di Milano* (UNIMI), Milão, 2015.
- CERIOLO, A.; LODATO, G.; PRICE, D. J. Gas squeezing during the merger of a supermassive black hole binary. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, v. 457, p. 939–948, mar. 2016.
- CHANDRASEKHAR, S. Dynamical Friction. I. General Considerations: the Coefficient of Dynamical Friction. ApJ, v. 97, p. 255, mar. 1943.
- CREIGHTON, J. D. E.; ANDERSON, W. G. Gravitational-Wave Physics and Astronomy: An Introduction to Theory, Experiment and Data Analysis. [S.l.]: Weinheim, Germany: Wiley-VCH, 2011.
- DEVECCHI, B.; VOLONTERI, M. Formation of the First Nuclear Clusters and Massive Black Holes at High Redshift. ApJ, v. 694, p. 302–313, mar. 2009.
- D’INVERNO, R. A. Introducing Einstein’s relativity. [S.l.: s.n.], 1992.
- DUNHILL, A. C. et al. Misaligned accretion on to supermassive black hole binaries. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, v. 445, p. 2285–2296, dez. 2014.
- EBISUZAKI, T. et al. Missing Link Found? The “Runaway” Path to Supermassive Black Holes. ApJ, v. 562, p. L19–L22, nov. 2001.
- FERRARESE, L.; MERRITT, D. A Fundamental Relation between Supermassive Black Holes and Their Host Galaxies. ApJ, v. 539, p. L9–L12, ago. 2000.
- FILLOUX, C. et al. Evolution of Supermassive Black Holes from Cosmological Simulations. International Journal of Modern Physics D, v. 19, p. 1233–1240, 2010.
- FILLOUX, C. et al. Coalescence Rate of Supermassive Black Hole Binaries Derived from Cosmological Simulations: Detection Rates for LISA and et. International Journal of Modern Physics D, v. 20, p. 2399–2417, 2011.
- FLANAGAN, E. E.; HUGHES, S. A. Measuring gravitational waves from binary black hole coalescences: I. signal to noise for inspiral, merger, and ringdown. Physic Review D, v. 57, p. 4535–4565, 1998.
- GOICOVIC, F. G. et al. Infalling clouds on to supermassive black hole binaries ? i. formation of discs, accretion and gas dynamics. MNRAS, v. 455, p. 1989–2003, 2016.
- GOICOVIC, F. G. et al. Infalling clouds on to supermassive black hole binaries ? ii. binary evolution and the final parsec problem. MNRAS, v. 472, p. 514–531, 2017.
- GOLDREICH, P.; TREMAINE, S. The excitation of density waves at the lindblad and corotation resonances by an external potential. Astrophysical Journal, v. 233, p. 857–871, 1979.
- HAYASAKI, K.; SAITO, H.; MINESHIGE, S. Binary black hole accretion flows from a misaligned circumbinary disk. Publ. Astron. Soc. Japan, v. 65, p. 86, 2013.
- HOBBS, G. et al. The international pulsar timing array project: using pulsars as a gravitational wave detector. Classical and Quantum Gravity, v. 27, n. 8, p. 084013, 2010.

- HULSE, R. A.; TAYLOR, J. H. Discovery of a pulsar in a binary system. The Astrophysical Journal, v. 195, p. L51–L53, 1975.
- IVANOV, P. B.; IGUMENSHCHEV, I. V.; NOVIKOV, I. D. Hydrodynamics of black hole-accretion disk collision. The Astrophysical Journal, v. 507, p. 131–144, 1998.
- IVANOV, P. B.; PAPALOIZOU, J. C. B.; POLNAREV, A. G. The evolution of a supermassive binary caused by an accretion disc. MNRAS, v. 307, p. 79–90, 1999.
- LENSE, J.; THIRRING, H. Über den einfluß der eigenrotation der zentralkörper auf die bewegung der planeten und monde nach der einsteinschen gravitationstheorie. Physikalische Zeitschrift, v. 19, p. 156, 1918.
- LIN, D. N. C.; PAPALOUZOU, J. On the tidal interaction between protoplanets and the protoplanetary disk. iii - orbital migration of protoplanets. Astrophysical Journal, v. 309, p. 846–857, 1986.
- LODATO, G. Classical disc physics. New Astron. Rev., v. 52, p. 21–41, jun. 2008.
- LODATO, G. et al. Black hole mergers: can gas discs solve the 'final parsec' problem? MNRAS, v. 298, n. 3, p. 21, 2009.
- LODATO, G.; PRICE, D. J. On the diffusive propagation of warps in thin accretion discs. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, v. 405, p. 1212–1226, jun. 2010.
- LODATO, G.; PRINGLE, J. E. Warp diffusion in accretion discs: a numerical investigation. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, v. 381, p. 1287–1300, nov. 2007.
- LUBOW, S. H.; MARTIN, R. G.; NIXON, C. Tidal Torques on Misaligned Disks in Binary Systems. ApJ, v. 800, p. 96, fev. 2015.
- LUBOW, S. H.; OGILVIE, G. I. On the Tilting of Protostellar Disks by Resonant Tidal Effects. ApJ, v. 538, p. 326–340, jul. 2000.
- MADAU, P.; REES, M. J. Massive Black Holes as Population III Remnants. ApJ, v. 551, p. L27–L30, abr. 2001.
- MADDISON, S. T.; MURRAY, J. R.; MONAGHAN, J. J. SPH simulations of accretion disks and narrow rings. Publ. Astron. Soc. Australia, v. 13, p. 66–70, jan. 1996.
- MARTIN, R. G. The warped disc of ngc 4258. MNRAS, v. 387, n. 2, p. 830–838, 2008.
- MATSUBAYASHI, T.; SHINKAI, H.; EBISUZAKI, T. Gravitational waves from merging intermediate-mass black holes. The Astrophysical Journal, v. 614, n. 2, p. 864–868, 2004.
- MAYER, L. et al. Rapid formation of supermassive black hole binaries in galaxy mergers with gas. Science, v. 316, n. 5833, p. 1874–1877, 2007.
- MILOSAVLJEVIĆ, M.; PHINNEY, E. S. The afterglow of massive black hole coalescence. Astrophysical Journal Letters, v. 622, p. L93–L96, 2005.
- MINK, S. E. de; KING, A. Electromagnetic signals following stellar-mass black hole mergers. Apj, v. 839, p. L7, 2017.

- MONAGHAN, J. J. Smoothed particle hydrodynamics. Annual Review of Astronomy and Astrophysics, v. 30, p. 543–574, 1992.
- MORRIS, J. P.; MONAGHAN, J. J. A switch to reduce sph viscosity. Journal of Computational Physics, v. 136, p. 41–50, 1997.
- MURRAY, J. R. SPH simulations of tidally unstable accretion discs in cataclysmic variables. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, v. 279, p. 402–414, mar. 1996.
- NEALON, R.; PRICE, D.; NIXON, C. J. On the bardeen petterson effect in black hole accretion discs. MNRAS, v. 448, p. 1526–1540, 2015.
- NIXON, C.; KING, A.; PRICE, D. Tearing up the disc: misaligned accretion on to a binary. MNRAS, v. 434, p. 1946–1954, 2013.
- NIXON, C. et al. Tearing up the disk: how black holes accrete. Apj, v. 757, p. L24, 2012.
- OGILVIE, G. I. The non-linear fluid dynamics of a warped accretion disc. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, v. 304, p. 557–578, abr. 1999.
- OHME, F. Analytical meets numerical relativity: status of complete gravitational waveform models for binary black holes. Classical and Quantum Gravity, v. 29, n. 12, p. 124002, 2012.
- PACHECO, J. A. F. Gravitational waves from compact objects. Research in Astronomy and Astrophysics, v. 10, n. 11, p. 1071–1099, 2010.
- PAPALOIZOU, J. C. B.; PRINGLE, J. E. The time-dependence of non-planar accretion discs. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, v. 202, p. 1181–1194, mar. 1983.
- PEREIRA, F. A. Coalescência de buracos negros desde os estelares aos supermassivos: horizontes dedetectabilidade e taxas de eventos. 77 p. Dissertação (Mestrado em Astrofísica) — Instituto Nacional das Pesquisas Espaciais (INPE), Brasil, 2015.
- PEREIRA, F. A. C. et al. Misaligned snowplough effect and the electromagnetic counterpart to black hole binary mergers. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, v. 484, p. 31–38, mar. 2019.
- PEREIRA, F. A. C. et al. Multi-messenger observations of supermassive black holes binary mergers. Astronomische Nachrichten, v. 340, p. 54–56, 2019.
- PETERS, P. C. Gravitational radiation and the motion of two point masses. Physical Review, v. 136, p. 1224–1232, 1964.
- PETERS, P. C.; MATHEWS, J. Gravitational radiation from point masses in a keplerian orbit. Physical Review, v. 131, p. 435–440, 1963.
- PRICE, D. J. splash: An Interactive Visualisation Tool for Smoothed Particle Hydrodynamics Simulations. Publ. Astron. Soc. Australia, v. 24, p. 159–173, out. 2007.
- PRICE, D. J. Modelling discontinuities and kelvin helmholtz instabilities in sph. Journal of Computational Physics, v. 227, p. 10040–10057, 2008.

- PRICE, D. J. Smoothed particle hydrodynamics and magnetohydrodynamics. J. Comp. Phys., v. 231, p. 759–794, fev. 2012.
- PRICE, D. J.; FEDERRATH, C. A comparison between grid and particle methods on the statistics of driven, supersonic, isothermal turbulence. MNRAS, v. 406, p. 1659–1674, 2010.
- PRICE, D. J.; MONAGHAN, J. J. An energy-conserving formalism for adaptive gravitational force softening in smoothed particle hydrodynamics and n-body codes. MNRAS, v. 374, p. 1347–1358, 2007.
- PRICE, D. J. et al. Phantom: A Smoothed Particle Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics Code for Astrophysics. Publ. Astron. Soc. Australia, v. 35, p. e031, set. 2018.
- PRINGLE, J. E. A simple approach to the evolution of twisted accretion discs. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, v. 258, p. 811–818, out. 1992.
- PRINGLE, J. E. Self-induced warping of accretion discs - Non-linear evolution and application to AGN. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, v. 292, p. 136, nov. 1997.
- REINES, A. E. et al. A Candidate Massive Black Hole in the Low-metallicity Dwarf Galaxy Pair Mrk 709. ApJ, v. 787, p. L30, jun. 2014.
- SATHYAPRAKASH, B. S.; SCHUTZ, B. F. Physics, astrophysics and cosmology with gravitational waves. Living Reviews in Relativity, v. 12, n. 2, p. 1–141, 2009.
- SESANA, A. Insights into the astrophysics of supermassive black hole binaries from pulsar timing observations. Classical and Quantum Gravity, v. 30, n. 22, p. 224014, 2013.
- SHAKURA, N. I.; SUNYAEV, R. A. Black holes in binary systems. Observational appearance. A&A, v. 24, p. 337–355, 1973.
- SPRINGEL, V.; HERNQUIST, L. Cosmological smoothed particle hydrodynamics simulations: the entropy equation. MNRAS, v. 333, p. 649–664, 2002.
- TANAKA, H.; TAKEUCHI, T.; WARD, W. R. Three-dimensional interaction between a planet and an isothermal gaseous disk. i. corotation and lindblad torques and planet migration. Astrophysical Journal, v. 565, p. 1257–1274, 2002.
- TAZZARI, M.; LODATO, G. Estimating the fossil disc mass during supermassive black hole mergers: the importance of torque implementation. MNRAS, v. 449, p. 1118–1128, 2015.
- THORNE, K. Three hundred years of gravitation. [S.l.]: Cambridge: Cambridge University Press, 1987. 330-458 p.
- TINTO, M.; ARAÚJO, J. C. N. de. Coherent observations of gravitational radiation with lisa and gliga. Review of Scientific Instruments, v. 94, p. 081101, 2016.
- TINTO, M. et al. Searching for gravitational waves with a geostationary interferometer. Astroparticle Physics, v. 48, p. 50–60, ago. 2013.

TINTO, M. et al. glisa: geosynchronous laser interferometer space antenna concepts with off-the-shelf satellites. Review of Scientific Instruments, v. 86, p. 014501, 2015.

TRZEŚNIEWSKI, T. et al. The flare model for x-ray variability of ngc 4258. A&A, v. 530, p. A136, 2011.

WARD, W. R. Horseshoe orbit drag. In Lunar and Planetary Science Conference, v. 22, p. 1463, 1991.

WARD, W. R. Protoplanet migration by nebula tides. Icarus, v. 126, p. 261–281, 1997.

Apêndice

Testes numéricos

A maioria dos testes numéricos feitos pelo código PHANTOM utilizam o kernel spline cúbico com o parâmetro $h_{fac} = 1, 2$, sendo h_{fac} o fator de proporcionalidade que especifica o parâmetro h em termos do espaçamento médio das partículas local (PRICE, 2012; PRICE et al., 2018).

Discos de acreção

O método SPH tem sido extensivamente utilizado por estudos de discos de acreção, desde os estudos pioneiros de Artymowicz e Lubow (1994), Artymowicz e Lubow (1996), Murray (1996) e Maddison, Murray e Monaghan (1996), sendo mostrados como utilizar o termo da viscosidade artificial para imitar a viscosidade do disco Shakura e Sunyaev (1973).

Calibração da viscosidade do disco

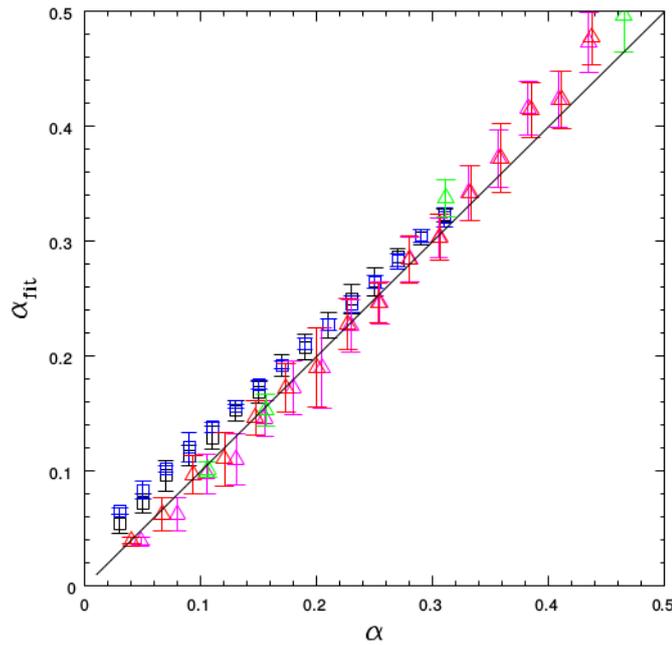
O teste numérico mais simples é calibrar a viscosidade do disco medindo a taxa de difusão da densidade de superfície do disco. A Figura 30 mostra os resultados de um extensivo estudo desenvolvido por Lodato e Price (2010). Para esta investigação os autores estabeleceram um disco de raios interno e externo com $R_{in} = 0,5$ e $R_{ext} = 10$, respectivamente, com perfil de densidade de superfície na forma:

$$\Sigma = \Sigma_0 R^{-p} \left(1 - \sqrt{\frac{R_{in}}{R}} \right),$$

e uma equação de estado localmente isotérmica $c_s = c_{s,0} R^{-q}$. Para um disco resolvido uniformemente são assumidos $p = 3/2$ e $q = 3/4$, ou seja, a razão h/H é aproximadamente constante (LODATO; PRICE, 2010), dando um valor constante do parâmetro α de Shakura e Sunyaev (1973) de acordo com a equação (4.98). Price et al. (2018) realizaram o teste de calibração da viscosidade do disco estabelecendo o parâmetro $c_{s,0}$ de tal modo que a razão de aspecto do disco possui o valor de $H/R = 0,02$ em $R = 1$. Price et al. (2018) usaram um número de 2 milhões de partículas, com vários cálculos adicionais usando 20 milhões de partículas. Em unidades do código, os autores executaram simulações em um tempo $t = 1000$. Price e colaboradores mediram a taxa de difusão ajustando a evolução da densidade de superfície obtida do PHANTOM com os resultados de um "ring code" resolvendo a equação de difusão em 1D padrão para discos de acreção (PRINGLE, 1992). Para mais detalhes do procedimento de ajuste recomendamos uma leitura no trabalho de Lodato e Price (2010). Price et al. (2018) usaram a iteração Newton-Raphson

para encontrar um erro mínimo entre o código 1D e o perfil da densidade de superfície do PHANTOM no final da simulação, que fornece o melhor ajuste (α_{fit}) e barras de erro.

Figura 30 Calibração da viscosidade do disco no código PHANTOM, comparando o valor de entrada do parâmetro α de Shakura-Sunyaev da equação (4.98) (eixo x) com a taxa de difusão medida da densidade de superfície ajustando ao código 1D (eixo y). Os triângulos indicam simulações com a viscosidade do disco calculada usando a viscosidade artificial, enquanto os quadrados representam as simulações usando a viscosidade física. As simulações representadas pelos triângulos verde, ciano e vermelho usam 20 milhões de partículas.



FONTE: Lodato e Price (2010)

A Figura 30 mostra que as taxas de difusão medidas concordam com os valores esperados para dentro das barras de erro. A exceção é para discos de baixas viscosidades com viscosidade física, onde a contribuição da viscosidade artificial torna-se significativa. Os triângulos na Figura 30 mostram os resultados com a viscosidade do disco computada da viscosidade artificial, enquanto os quadrados representam simulações com a viscosidade física estabelecida de acordo com a equação $\nu_a = \alpha_{SS} c_s^a H_a$.

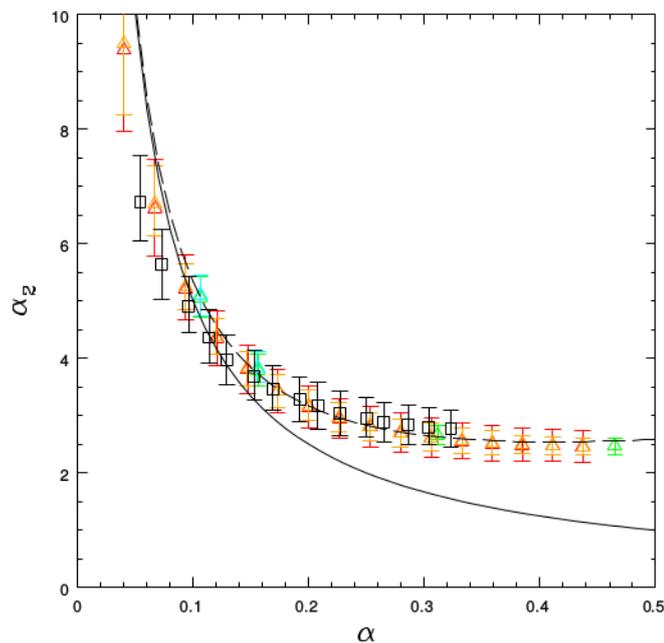
Este teste demonstra que a implementação da viscosidade do disco no PHANTOM trabalha, e também a tradução do termo da viscosidade artificial acordando com a equação (4.98) está correta.

Difusão Warp

Um teste mais rigoroso da física do disco envolve a dinâmica dos discos warped. Trabalhos analíticos como os de Papaloizou e Pringle (1983), Pringle (1992) e Ogilvie (1999) que fornecem expressões análticas para a taxa de difusão de warps em discos para

valores não-lineares para tanta a viscosidade do disco e a amplitude warp. Esta teoria se aplica no regime difuso onde a viscosidade do disco excede a razão de aspecto do disco, $\alpha > H/R$. Para $\alpha \lesssim H/R$ a propagação warp é do tipo onda e não existe nenhuma teoria não-linear equivalente. O código PHANTOM surgiu para simular discos warped com o trabalho pioneiro de [Lodato e Price \(2010\)](#) projetado para testar a teoria de Ogilvie (1999) em simulações 3D. A Figura 31 mostra os resultados deste estudo, apresentando a taxa de difusão warp como uma função da viscosidade do disco.

Figura 31 A taxa de difusão warp como uma função da viscosidade do disco, mostrando resultados do PHANTOM comparados à teoria não-linear de Ogilvie (1999). A previsão linear $\alpha_2 = 1/(2\alpha)$ é mostrada pela linha sólida.



FONTE: [Lodato e Price \(2010\)](#)

Conservação

Uma vez que as equações de movimento foram derivadas da Lagrangiana usando somente a soma da densidade, é claro que as simetrias na Lagrangiana, serão refletidas como propriedades de conservação nas equações de movimento: covariância Galileana, conservação do momento linear (devido a invariância à translações), conservação do momento angular (por causa da invariância à rotação), energia (porque a Hamiltoniana é independente do tempo) e a entropia (visto que as equações foram derivadas sob uma restrição da entropia constante).

As vantagens para a astrofísica da conservação simultânea dos momentos linear e angular é crucial. Na abordagem Euleriana, a conservação do momento angular pode somente ser alcançada usando uma grade correspondendo a geometria do sistema e então somente quando o fluxo está bem alinhado com a grade. Para o SPH, a conservação do

momento angular é independente da geometria, significando que problemas envolvendo dinâmica orbital complicada são especialmente bastante adequada para simulação SPH. Um exemplo é o estudo de discos de acreção warped realizado por [Lodato e Price \(2010\)](#), onde uma verificação detalhada das previsões da teoria dos discos- α foi possível porque a dinâmica orbital é a mesma independentemente da inclinação do plano orbital e também porque somente a fonte de dissipação de momento angular é um termo de viscosidade α explicitamente adicionado.

As desvantagens da conservação são menos óbvias, mas reduz-se ao fato de que o método SPH é muito robusto. Os erros em um cálculo são refletidos na distribuição de partículas, que se torna ruidosa ([PRICE, 2012](#)).

Estado de energia mínimo ou a "grade" em SPH

O Hamiltoniano também fornece ao SPH uma vantagem muito significativa sobre outros métodos de partículas garantindo que o arranjo de partículas minimize a Lagrangeana, implicando na existência de um "estado de energia mínimo" para as partículas. Um arranjo de partículas livre de ruído e estável é um indicador muito importante da precisão das soluções SPH, visto que o arranjo das partículas é semelhante à "grade" em outros métodos Lagrangianos.

Para entendermos melhor, podemos estudar o que acontece em um arranjo de partículas inicialmente aleatório, isto é, com uma pressão constante. Com a formulação Hamiltoniana a força não desaparece apesar da pressão ser constante, levando para uma repulsão mútua entre as partículas e assim um rápido ajuste da distribuição aleatória das partículas. As restrições na distribuição das partículas impostas pela natureza Hamiltoniana do sistema significa que esta redistribuição das partículas ocorre automaticamente em SPH, ao contrário nos métodos de grade Lagrangiano onde a grade pode tornar-se distorcida arbitrariamente. A desvantagem é que isto significa que existe inevitavelmente algum movimento das partículas que tem o potencial para oprimir pequenas perturbações. Portanto, este movimento não é em nenhum sentido aleatório e é a razão porque o SPH é capaz de manter um bom arranjo de partículas ao longo da evolução de processos dinâmicos bastante complicados sem a necessidade da regularização explícita da grade ou procedimentos de redistribuição ([PRICE, 2012](#)).

Resolução

A característica chave do SPH é que a resolução é automaticamente estabelecida onde a matéria se concentra, uma consequência direta de ter as equações em partículas Lagrangianas de massas fixadas. Para a astrofísica esta é uma grande vantagem, já que significa que o SPH é muito adequado para simular problemas envolvendo colapso gravitacional, tais como formação estelar e formação de estrutura cosmológica, uma vez que

esforços computacionais é automaticamente colocado em objetos densos colapsando. A exigência da resolução ser mais alta onde se concentra maior quantidade de massa pode também ser uma desvantagem dependendo da questão. Um exemplo para essa situação é uma comparação entre o SPH e um código baseado em grade (por exemplo, o código FLASH) em simulações de turbulência supersônica no meio interestelar (Price Federrath 2010). Neste caso, o código SPH é uma escolha mais eficiente, devido a uma diferença de uma ordem de magnitude em custo computacional do que quando utilizando o código baseado em grade. Entretanto, o principal ponto é que a alta resolução é necessária em ambos os métodos para obter respostas similares.