Parte 1 – Movimento em 2 ou 3 dimensões

Nesta aula, continuaremos a estudar a parte da física que analisa o movimento, mas agora podem ser em duas ou três dimensões.

1 - Posição e Deslocamento

A localização de uma partícula pode ser especificada através do vetor posição $\vec{r}$, um vetor que liga um ponto de referência (em geral a origem de um sistema de referência) à partícula. Sendo:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

onde $x\hat{i}$, $y\hat{j}$, $z\hat{k}$ são as componentes vetoriais de $\vec{r}$ e x, y, z são as componentes escalares, as quais fornecem a localização da partícula ao longo dos eixos de coordenadas em relação à origem. A figura ao lado, mostra uma partícula cujo vetor posição é:

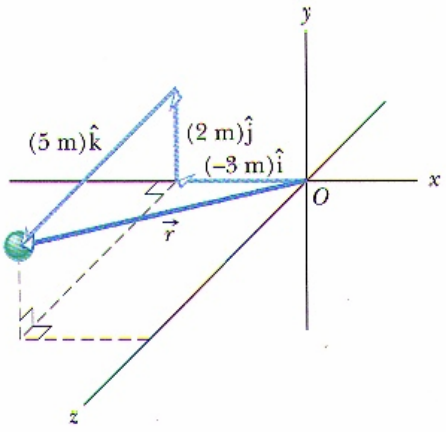

FIG. 4-1 O vetor posição $\vec{r}$ de uma partícula é a soma vetorial de suas componentes vetoriais.

$$\vec{r} = (-3\text{ m})\hat{i} + (2\text{ m})\hat{j} + (5\text{ m})\hat{k} \qquad (4.1)$$

e cujas coordenadas retangulares são (-3m, 2m, 5m). Ao longo do eixo x a partícula está a 3m da origem, no sentido contrário ao do vetor unitário $\hat{i}$. Ao longo do eixo y, ela está a 2m da origem, no sentido do vetor unitário $\hat{j}$. Ao longo do eixo z ela está a 5 m da origem, no sentido do vetor unitário $\hat{k}$.

Quando uma partícula se move, seu vetor posição varia de tal forma que sempre liga o ponto de referência (origem) à partícula. Se o vetor posição varia (de $\vec{r}_1$

para $\vec{r}_2$, digamos durante um certo intervalo de tempo), o deslocamento da partícula, $\Delta\vec{r}$, durante esse intervalo de tempo é dado por:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \qquad (4.2)$$

Usando a notação de vetores unitários da equação 4.1, podemos escrever esse deslocamento como:

$$\Delta\vec{r} = (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})$$

ou como

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}, \qquad (4.3)$$

onde as coordenadas (x_1, y_1, z_1) correspondem ao vetor $\vec{r}_1$ e as coordenadas (x_2, y_2, z_2) correspondem ao vetor posição $\vec{r}_2$. Podemos também escrever o vetor deslocamento substituindo ($x_2 - x_1$) por Δx, ($y_2 - y_1$) por Δy e ($z_2 - z_1$) por Δz:

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}. \qquad (4\text{-}4)$$

Exemplo 4-1

Na Fig. 4-2 o vetor posição de uma partícula é inicialmente

$$\vec{r}_1 = (-3{,}0\text{ m})\hat{i} + (2{,}0\text{ m})\hat{j} + (5{,}0\text{ m})\hat{k}$$

e depois passa a ser

$$\vec{r}_2 = (9{,}0\text{ m})\hat{i} + (2{,}0\text{ m})\hat{j} + (8{,}0\text{ m})\hat{k}.$$

Qual é o deslocamento da partícula $\Delta\vec{r}$ de $\vec{r}_1$ para $\vec{r}_2$?

IDÉIA-CHAVE O deslocamento $\Delta\vec{r}$ é obtido subtraindo o vetor posição inicial $\vec{r}_1$ do vetor posição final $\vec{r}_2$.

Cálculo: A subtração nos dá

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ &= [9{,}0 - (-3{,}0)]\hat{i} + [2{,}0 - 2{,}0]\hat{j} + [8{,}0 - 5{,}0]\hat{k} \\ &= (12\text{ m})\hat{i} + (3{,}0\text{ m})\hat{k}.\end{aligned}$$

(Resposta)

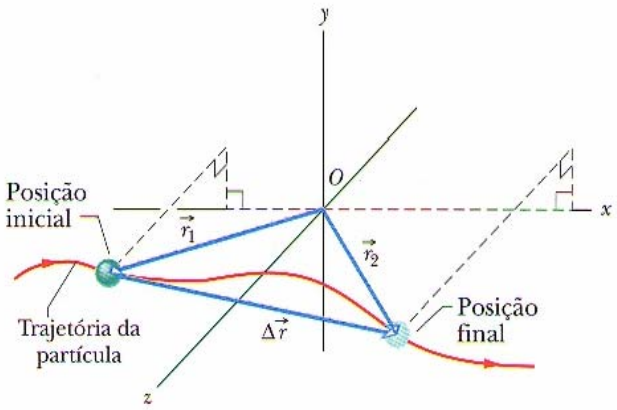

FIG. 4-2 O deslocamento $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ vai da extremidade do vetor correspondente à posição inicial, $\vec{r}_1$, até a extremidade do vetor correspondente à posição final, $\vec{r}_2$.

O vetor deslocamento é paralelo ao plano *xz* porque a componente *y* é nula.

Exemplo 4-2

Um coelho atravessa um estacionamento, no qual, por alguma razão, um conjunto de eixos coordenados foi desenhado. As coordenadas da posição do coelho, em metros, em função do tempo t, em segundos, são dadas por

$$x = -0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28 \qquad (4\text{-}5)$$

e

$$y = 0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30. \qquad (4\text{-}6)$$

(a) No instante $t = 15$ s, qual é o vetor posição $\vec{r}$ do coelho na notação de vetores unitários e na notação módulo-ângulo?

IDÉIA-CHAVE As coordenadas x e y da posição do coelho, dadas pelas Eqs. 4-5 e 4-6, são as componentes escalares do vetor posição $\vec{r}$ do coelho.

Cálculos: Podemos escrever

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}. \qquad (4\text{-}7)$$

(Escrevemos $\vec{r}(t)$ em vez de $\vec{r}$ porque as componentes são funções de t e, portanto, $\vec{r}$ também é função de t.)

Em $t = 15$ s, as componentes escalares são

$$x = (-0{,}31)(15)^2 + (7{,}2)(15) + 28 = 66 \text{ m}$$

e

$$y = (0{,}22)(15)^2 - (9{,}1)(15) + 30 = -57 \text{ m},$$

e portanto

$$\vec{r} = (66 \text{ m})\hat{i} - (57 \text{ m})\hat{j}, \qquad \text{(Resposta)}$$

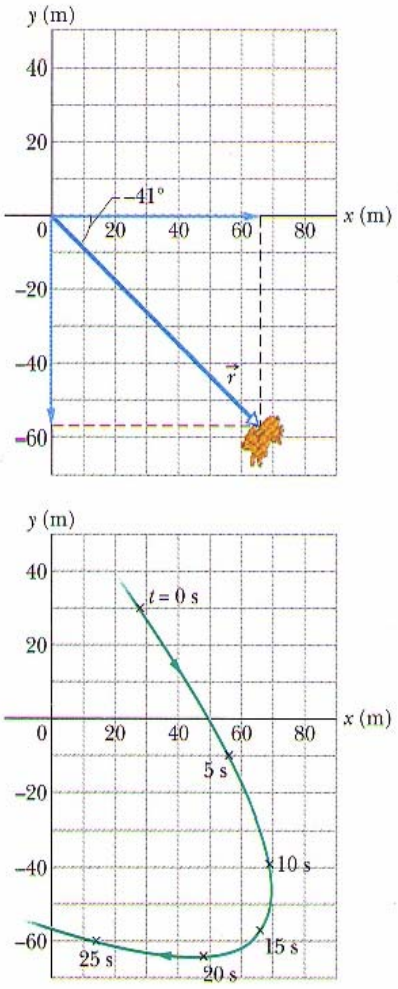

FIG. 4-3 (*a*) O vetor posição de um coelho, $\vec{r}$, no instante $t = 15$ s. As componentes escalares de $\vec{r}$ são mostradas ao longo dos eixos. (*b*) A trajetória do coelho e sua posição para cinco valores de t.

que está desenhado na Fig. 4-3*a*. Para obter o módulo e o ângulo de $\vec{r}$, usamos a Eq. 3-6:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(66 \text{ m})^2 + (-57 \text{ m})^2}$$
$$= 87 \text{ m}, \qquad \text{(Resposta)}$$

e

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\left(\frac{-57 \text{ m}}{66 \text{ m}}\right) = -41°.$$

(Resposta)

Verificação: Embora $\theta = 139°$ possua a mesma tangente que $-41°$, os sinais das componentes de $\vec{r}$ indicam que o ângulo desejado é $139° - 180° = -41°$.

(b) Trace o gráfico da trajetória do coelho de $t = 0$ a $t = 25$ s.

Plotagem: Podemos repetir a parte (a) para vários valores de t e plotar os resultados. A Fig. 4-3*b* mostra os pontos do gráfico para cinco valores de t e a curva que liga esses pontos. Podemos também plotar a curva em uma calculadora gráfica a partir das Eqs. 4-5 e 4-6.

2 - Velocidade Média e Velocidade Instantânea

Se uma partícula se move de um ponto para outro, podemos estar interessados em saber com que rapidez ela se move, definindo assim as velocidades média e instantânea. No caso de um movimento 2D ou 3D devemos considerar essas grandezas como vetores e usar a notação vetorial.

Se uma partícula sofre um deslocamento $\Delta\vec{r}$ em um intervalo de tempo Δt, sua velocidade média $\vec{v}_{méd}$ é dada por:

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{intervalo de tempo}},$$

ou

$$\vec{v}_{méd} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \qquad (4\text{-}8)$$

$$\vec{v}_{méd} = \frac{\Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k}. \qquad (4\text{-}9)$$

Assim, por exemplo, se a partícula do exemplo 4-1 se move da posição inicial para outra posição em 2,0 s, ou seja,

$$\vec{r}_1 = (-3{,}0\text{ m})\hat{i} + (2{,}0\text{ m})\hat{j} + (5{,}0\text{ m})\hat{k} \quad \text{e} \quad \vec{r}_2 = (9{,}0\text{ m})\hat{i} + (2{,}0\text{ m})\hat{j} + (8{,}0\text{ m})\hat{k}$$

$$\Delta x = 12\text{ m}, \quad \Delta y = 0\text{ m} \quad \text{e} \quad \Delta z = 3\text{m}$$

a velocidade média durante esse movimento é:

$$\vec{v}_{méd} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(12\text{ m})\hat{i} + (3{,}0\text{ m})\hat{k}}{2{,}0\text{ s}} = (6{,}0\text{ m/s})\hat{i} + (1{,}5\text{ m/s})\hat{k}.$$

Logo, a velocidade média tem uma componente de 6,0 m/s em relação ao eixo x e uma componente 1,5 m/s em relação ao eixo z.

Novamente aqui, quando falamos da velocidade de uma par´ticula, nos referimos à velocidade instantânea, que é o limite da velocidade média, quando $\Delta t \rightarrow 0$. Assim, usando a linguagem do cálculo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (4\text{-}10)$$

A figura 4-4 mostra a trajetória de uma partícula que se move no plano xy. Quando a partícula se desloca para a direita ao longo da curva, o vetor posição gira para a direita. Durante o intervalo de tempo Δt o vetor posição muda de $\vec{r}_1$ para $\vec{r}_2$ e o deslocamento da partícula é $\Delta\vec{r}$. Para determinar a velocidade instatânea da partícula no instante t_1 (instante em que a partícula se encontra na posição 1), reduzimos o intervalo de tempo Δt nas vizinhanças de t_1, fazendo-o tender a zero. No limite $\Delta t \rightarrow 0$ temos $\vec{v}_{méd} \rightarrow \vec{v}$ e, o que é mais importante, $\vec{v}_{méd}$ assume a direção da reta tangente. Assim, $\vec{v}$ também assume essa direção:

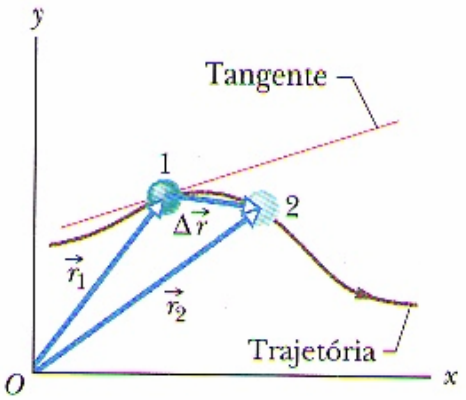

FIG. 4-4 O deslocamento $\Delta\vec{r}$ de uma partícula durante um intervalo de tempo Δt, da posição 1, com vetor posição $\vec{r}_1$ no instante t_1, até a posição 2, com vetor posição $\vec{r}_2$ no instante t_2. A figura mostra também a tangente à trajetória da partícula na posição 1.

A direção da velocidade instantânea $\vec{v}$ de uma partícula é sempre tangente à trajetória da partícula na posição da partícula.

Para escrever a equação 4-10 na forma de vetores unitários, usamos a expressão para $\vec{r}$ dada pela 4-1:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}.$$

que pode ser simplificada se escrevemos como:

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}, \qquad (4\text{-}11)$$

onde as componentes escalares de $\vec{v}$ são:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad \text{e} \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \qquad (4\text{-}12)$$

A figura 4-5 mostra o vetor velocidade $\vec{v}$ e suas componentes escalares x e y. Note que $\vec{v}$ é tangente à trajetória da partícula na posição da partícula.

Atenção: quando o vetor posição é desenhado, como nas figuras 4-1 e 4-4, ele é uma seta que se estende de um ponto a outro. Entretanto, quando um vetor velocidade é desenhado, como na figura 4-5, ele não vai de um ponto ao outro. Em vez disso, sua orientação coincide com a do movimento instantâneo de uma partícula localizada na sua origem, e seu comprimento (que representa o módulo da velocidade) pode ser desenhado em qualquer escala.

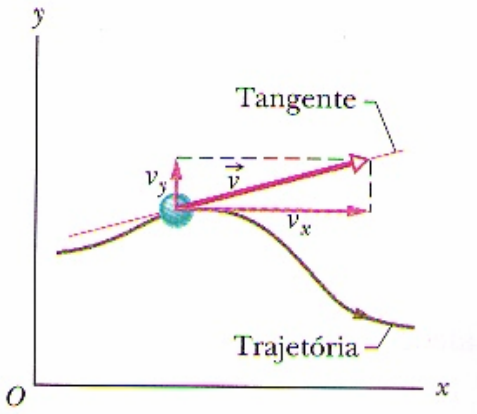

FIG. 4-5 A velocidade $\vec{v}$ de uma partícula e as componentes escalares de $\vec{v}$.

Exemplo 4-3

Determine a velocidade $\vec{v}$ do coelho do Exemplo 4-2 no instante $t = 15$ s.

$$x = -0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28$$

Sendo: $$y = 0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30.$$

…plo 4-2 no instante $t = 15$ s.

IDÉIA-CHAVE Podemos determinar $\vec{v}$ calculando as derivadas das componentes do vetor posição do coelho.

Cálculos: Aplicando a parte da Eq. 4-12 correspondente a v_x à Eq. 4-5, descobrimos que a componente x de $\vec{v}$ é

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(-0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28)$$
$$= -0{,}62t + 7{,}2. \qquad (4\text{-}13)$$

Em $t = 15$ s, isso nos dá $v_x = -2{,}1$ m/s. Da mesma forma, aplicando a parte da Eq. 4-12 correspondente a v_y à Eq. 4-6, descobrimos que a componente y é

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30)$$
$$= 0{,}44t - 9{,}1. \qquad (4\text{-}14)$$

Em $t = 15$ s, isso nos dá $v_y = -2{,}5$ m/s. Assim, de acordo com a Eq. 4-11,

$$\vec{v} = (-2{,}1 \text{ m/s})\hat{i} + (-2{,}5 \text{ m/s})\hat{j}, \quad \text{(Resposta)}$$

que está desenhada na Fig. 4-6, tangente à trajetória do coelho e no sentido em que ele está se movendo em $t = 15$ s.

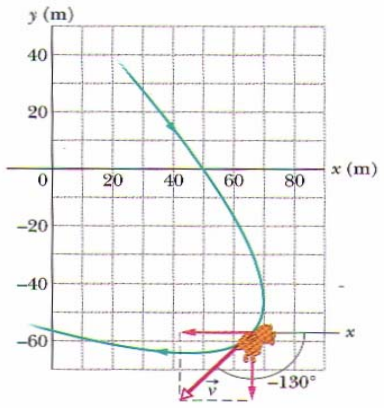

FIG. 4-6 A velocidade $\vec{v}$ do coelho em $t = 15$ s.

Para obter o módulo e o ângulo de $\vec{v}$, podemos usar uma calculadora ou escrever, de acordo com a Eq. 3-6,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-2{,}1 \text{ m/s})^2 + (-2{,}5 \text{ m/s})^2}$$
$$= 3{,}3 \text{ m/s} \qquad \text{(Resposta)}$$

e $$\theta = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1}\left(\frac{-2{,}5 \text{ m/s}}{-2{,}1 \text{ m/s}}\right)$$
$$= \tan^{-1} 1{,}19 = -130°. \qquad \text{(Resposta)}$$

Verificação: O ângulo é $-130°$ ou $-130° + 180° = 50°$?

3 – Aceleração Média e Aceleração Instantânea

Quando a velocidade de uma partícula varia de $\vec{v}_1$ para $\vec{v}_2$ em um intervalo de tempo Δt, sua aceleração média $\vec{a}_{méd}$ durante o intervalo Δt é:

$$\text{aceleração média} = \frac{\text{variação de velocidade}}{\text{intervalo de tempo}},$$

ou

$$\vec{a}_{méd} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \qquad (4\text{-}15)$$

Quando $\Delta t \rightarrow 0$ no entorno de um certo instante, $\vec{a}_{méd}$ tende para a aceleração instantânea (ou simplesmente aceleração) $\vec{a}$ neste instante, ou seja:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \qquad (4\text{-}16)$$

Se o módulo ou a orientação da velocidade varia (ou ambos variam), a partícula possui aceleração.

Em termos dos vetores unitários:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k})$$
$$= \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}.$$

ou ainda:

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}, \qquad (4\text{-}17)$$

onde as componentes escalares de $\vec{a}$ são:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad \text{e} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}. \qquad (4\text{-}18)$$

A figura 4-7 mostra o vetor aceleração $\vec{a}$ e suas componentes escalares para uma partícula que se move em duas dimensões.

Atenção: quando o vetor aceleração é desenhado, como nas figuras 4-7, ele não se estende de um ponto a outro. Em vez disso, sua orientação coincide com a da variação instantânea movimento instantâneo de uma partícula localizada na sua origem, e seu comprimento (que representa o módulo da aceleração) pode ser desenhado em qualquer escala.

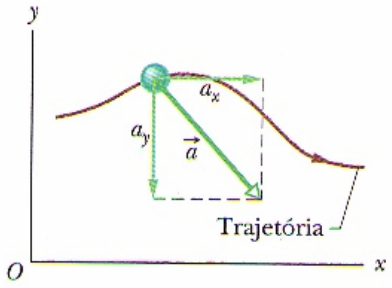

FIG. 4-7 A aceleração $\vec{a}$ de uma partícula e as componentes escalares de $\vec{a}$.

Exemplo 4-4

Para o coelho dos Exemplos 4-2 e 4-3, determine a aceleração $\vec{a}$ no instante $t = 15$ s.

IDÉIA-CHAVE Podemos determinar a aceleração $\vec{a}$ calculando as derivadas das componentes da velocidade do coelho.

Cálculos: Aplicando a parte da Eq. 4-18 correspondente a a_x à Eq. 4-13, descobrimos que a componente x de $\vec{a}$ é

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(-0{,}62t + 7{,}2) = -0{,}62 \text{ m/s}^2.$$

Analogamente, aplicando a parte da Eq. 4-18 correspondente a a_y à Eq. 4-14 descobrimos que a componente y é

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(0{,}44t - 9{,}1) = 0{,}44 \text{ m/s}^2.$$

Vemos que essa aceleração não varia com o tempo (é constante), pois a variável tempo t não aparece na expressão das componentes da aceleração. De acordo com a Eq. 4-17,

$$\vec{a} = (-0{,}62 \text{ m/s}^2)\hat{i} + (0{,}44 \text{ m/s}^2)\hat{j}, \quad \text{(Resposta)}$$

que é mostrada superposta à trajetória do coelho na Fig. 4-8.

Para obter o módulo e o ângulo de $\vec{a}$, novamente podemos usar uma calculadora ou a Eq. 3-6. No caso do módulo, temos:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-0{,}62 \text{ m/s}^2)^2 + (0{,}44 \text{ m/s}^2)^2}$$
$$= 0{,}76 \text{ m/s}^2. \quad \text{(Resposta)}$$

No caso do ângulo, temos:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{a_y}{a_x} = \tan^{-1}\left(\frac{0{,}44 \text{ m/s}^2}{-0{,}62 \text{ m/s}^2}\right) = -35°.$$

Entretanto, esse ângulo, que é o resultado fornecido por uma calculadora, indica que a orientação de $\vec{a}$ é para a direita e para baixo na Fig. 4-8. Porém, sabemos pelas componentes x e y que a orientação de $\vec{a}$ é para a esquerda e para cima. Para determinar o outro ângulo que possui a mesma tangente que $-35°$, mas não é mostrado pela calculadora, somamos 180°:

$$-35° + 180° = 145°. \quad \text{(Resposta)}$$

Este novo resultado *é* compatível com as componentes de $\vec{a}$. Observe que $\vec{a}$ tem o mesmo módulo e a mesma orientação para qualquer instante de tempo, já que a aceleração do coelho é constante.

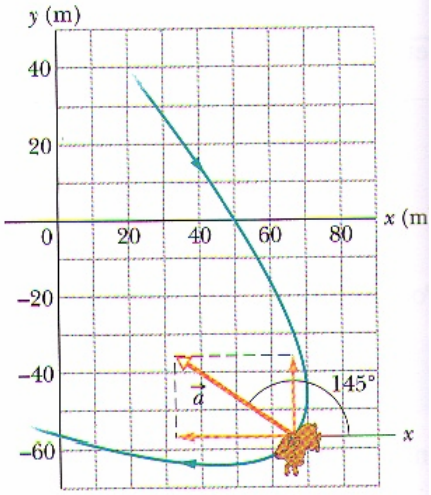

FIG. 4-8 A aceleração $\vec{a}$ do coelho em $t = 15$ s. O coelho possui essa mesma aceleração em todos os pontos de sua trajetória.

Exemplo 4-5

Uma partícula cuja velocidade é $\vec{v}_0 = -2{,}0\hat{i} + 4{,}0\hat{j}$ (em metros por segundo) em $t = 0$ sofre uma aceleração constante $\vec{a}$, de módulo $a = 3{,}0\ m/s^2$, que faz um ângulo $\theta = 130°$ com o semi-eixo x positivo. Qual é a velocidade $\vec{v}$ da partícula em $t = 5{,}0$ s?

IDÉIA-CHAVE Como a aceleração é constante, a Eq. 2-11 ($v = v_0 + at$) pode ser usada, mas devemos aplicá-la separadamente ao movimento paralelo ao eixo x e para o movimento paralelo ao eixo y.

Cálculos: Determinamos as componentes da velocidade, v_x e v_y, a partir das equações

$$v_x = v_{0x} + a_x t \quad \text{e} \quad v_y = v_{0y} + a_y t.$$

Nessas equações, v_{0x} (= −2,0 m/s) e v_{0y} (= 4,0 m/s) são as componentes x e y de $\vec{v}_0$ e a_x e a_y são as componentes x e y de $\vec{a}$. Para determinar a_x e a_y podemos decompor $\vec{a}$ usando uma calculadora ou com o auxílio da Eq. 3-5:

$$a_x = a\cos\theta = (3{,}0\ m/s^2)(\cos 130°) = -1{,}93\ m/s^2,$$
$$a_y = a\,\text{sen}\,\theta = (3{,}0\ m/s^2)(\text{sen}\ 130°) = +2{,}30\ m/s^2.$$

Quando esses valores são inseridos nas equações de v_x e v_y, descobrimos que no instante $t = 5{,}0$ s

$$v_x = -2{,}0\ m/s + (-1{,}93\ m/s^2)(5{,}0\ s) = -11{,}65\ m/s,$$
$$v_y = 4{,}0\ m/s + (2{,}30\ m/s^2)(5{,}0\ s) = 15{,}50\ m/s.$$

Assim, em $t = 5{,}0$ s temos, depois de arredondar,

$$\vec{v} = (-12\ m/s)\hat{i} + (16\ m/s)\hat{j}. \quad \text{(Resposta)}$$

Usando uma calculadora ou a Eq. 3-6 descobrimos que o módulo e o ângulo de $\vec{v}$ são:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 19{,}4 \approx 19\ m/s \quad \text{(Resposta)}$$

e

$$\theta = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = 127° \approx 130°. \quad \text{(Resposta)}$$

Verificação: Que resultado a sua calculadora fornece, 127° ou −53°? Desenhe o vetor $\vec{v}$ com suas componentes para verificar qual dos dois ângulos é mais razoável.

4 – Movimento de Projéteis

Vamos considerar a seguir, um caso especial de movimento bidimensional: Uma partícula que se move em um plano vertical com velocidade inicial $\vec{v}_0$ e com uma aceleração constante, igual a aceleração de queda livre $\vec{g}$, dirigida para baixo. Uma partícula que se move desta forma é chamada projétil (o que significa que é projetada ou lançada), e seu movimento é chamado de movimento balístico. Um projétil pode ser uma bola de tênis ou de pingue-pongue, mas não um avião ou um pato. Muitos esportes envolvem os movimentos balísticos de uma bola; jogadores e técnicos estão sempre procurando controlar esses movimentos para obter o máximo de vantagem. O jogador que descobriu a rebatida em Z na raquetebol na década de 70, por exemplo, vencia os jogos com facilidade porque a trajetória peculiar da bola no fundo da quadra surpreendia os adversários.

Nesta parte da matéria, estudaremos o movimento de projéteis ignorando os efeitos do ar.

O projétil é lançado com uma velocidade inicial $\vec{v}_0$ que pode ser descrita como:

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}. \qquad (4\text{-}19)$$

As componentes v_{0x} e v_{0y} podem ser calculadas se conhecermos o ângulo θ_0 entre $\vec{v}_0$ e o semi-eixo x positivo:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta \quad \text{e} \quad v_{0y} = v_0 sen\,\theta \qquad (4\text{-}20)$$

Durante o movimento bidimensional, o vetor $\vec{r}$ e a velocidade $\vec{v}$ do projétil mudam constantemente, mas o vetor aceleração $\vec{a}$ é constante e está sempre dirigido verticalmente para baixo. **O projétil não possui aceleração horizontal.**

O movimento de projéteis, como na figura 4-9 e 4-10, parece complicado, mas temos seguinte propriedade simplificadora (demonstrada experimentalmente):

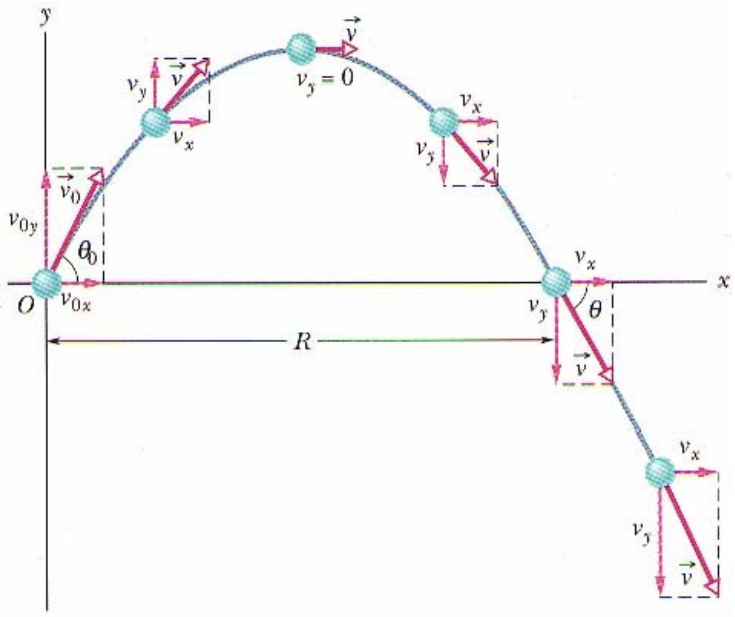

FIG. 4-10 Trajetória de um projétil que é lançado em $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ com uma velocidade inicial $\vec{v}_0$. São mostradas a velocidade inicial e as velocidades em vários pontos ao longo da trajetória, juntamente com suas componentes. Observe que a componente horizontal da velocidade permanece constante, mas a componente vertical muda continuamente. O *alcance R* é a distância horizontal percorrida pelo projétil *quando retorna à altura do lançamento*.

No movimento de projéteis, o movimento horizontal e o movimento vertical são independentes, ou seja, um não afeta o outro.

Esta propriedade permite decompor um problema que envolve um movimento bidimensional em dois problemas unidimensionais independentes e mais fáceis de serem resolvidos, um para o movimento horizontal (com aceleração nula) e outro para o movimento vertical (com aceleração constante para baixo). Apresentamos a seguir dois experimentos que mostram que o movimento vertical e horizontal são realmente independentes.

DUAS BOLAS DE GOLFE

A figura é uma fotografia estroboscópica de duas bolas de golfe, uma que simplesmente se deixou cair e outra que é lançada horizontamente por uma mola. As bolas de golfe têm o mesmo movimento vertical: ambas percorrem a mesma distância vertical no mesmo intervalo de tempo. O fato de uma bola estar se movendo horizontalmente enquanto está caindo não afeta o seu movimento vertical, ou seja, os movimentos horizontal e vertical são independentes.

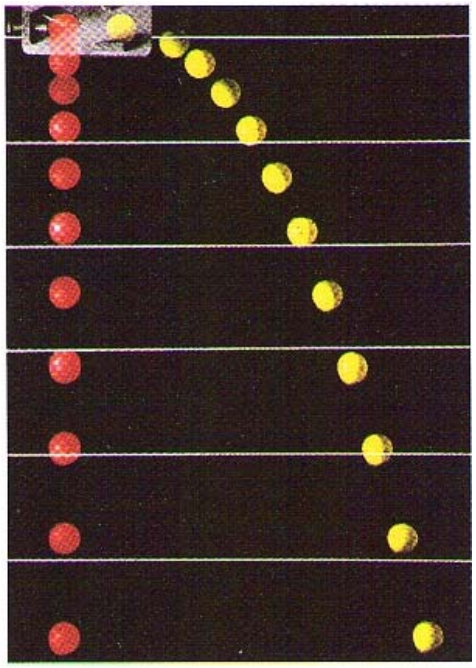

FIG. 4-11 Uma bola é deixada cair a partir do repouso no mesmo instante que outra bola é lançada horizontalmente para a direita. Os movimentos verticais das duas bolas são iguais. *Fonte:* Richard Megna/ Fundamental Photographs.

5 – Análise do Movimento de um Projétil

Movimento Horizontal

Como não existe aceleração na direção horizontal, a componente horizontal v_x da velocidade de um projétil permanece inalterada e igual ao seu valor inicial v_{0x} durante toda a trajetória. Em qualquer instante t, o deslocamento horizontal do projétil em relação à posição inicial, $x - x_0$, é dado por

$$x - x_0 = v_{0x}t.$$

Como $v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$, temos:

$$x - x_0 = (v_0 \cos \theta_0)t. \qquad (4\text{-}21)$$

Movimento Vertical

O movimento vertical é o movimento de queda livre. Neste, a aceleração é constante. Assim:

$$y - y_0 = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$
$$= (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2, \qquad (4\text{-}22)$$

onde a componente vertical da velocidade inicial v_{oy}, é substituída pela expressão equivalente $v_0 sen\theta_0$.

$$v_y = v_0 \operatorname{sen} \theta_0 - gt \qquad (4\text{-}23)$$
$$v_y^2 = (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \qquad (4\text{-}24)$$

Como mostram a figura 4-10 e a equação 4-23, a componente vertical da velocidade se comporta exatamente como a de uma bola lançada verticalmente para cima. Inicialmente ela está dirigida para cima e seu módulo diminui continuamente até se anular, o que determina a altura máxima da trajetória. Em seguida a componente vertical da velocidade muda de sentido e seu módulo passa a aumentar com o tempo.

Equação da Trajetória

A equação do caminho percorrido pelo projétil, é a equação de sua trajetória. Ela pode ser obtida eliminando o tempo t, nas equações 4-21 e 4-22. Explicitando t na equação 4-21 e substituindo o resultado na eq. 4-22, obtemos, após algumas manipulações algébricas:

$$y = (\tan \theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \theta_0)^2} \quad \text{(trajetória).} \qquad (4\text{-}25)$$

Esta é a equação da trajetória mostrada na figura 4-10. Ao deduzi-la, para simplificar, fizemos $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ nas eq 4-21 e 4-22. como g, θ_0 e v_0 são constantes, a eq. 4-25 é da forma $y = ax + bx^2$, onde a e b são constantes. Como esta equação é uma parábola, a trajetória é parabólica.

Alcance Horizontal

O alcance horizontal R de um projétil é a distância horizontal percorrida pelo projétil até voltar a sua altura inicial (altura de lançamento). Figura 4-10. Para determinar o alcance R, fazemos $x = x_0 = R$ na equação 4-21 e $y - y_0 = 0$ na eq. 4-22, obtendo:

$$R = (v_0 \cos \theta_0)t$$

$$0 = (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Eliminando t nessas duas equações, obtemos:

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \operatorname{sen} \theta_0 \cos \theta_0.$$

E usando a identidade: $sen2\theta_0 = 2sen\theta_0 \cos\theta_0$, obtemos:

$$R = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta_0. \qquad (4\text{-}26)$$

Obs. Esta equação não fornece a distância horizontal percorrida pelo projétil quando a altura final é diferente da altura de lançamento.

Observe que R na eq. 4-26 atinge valor máximo para sen $2\theta_0 = 1$, que corresponde a $2\theta_0 = = 90^0$ ou $\theta_0 = 45^0$.

Entretanto, quando a altura final é diferente da altura do lançamento, como acontece no arremesso de peso, lançamento de disco e basquetebol, a distancia horizontal máxima não é atingida para um ângulo de lançamento de 45º

Exemplo 4-7

A Fig. 4-16 mostra um navio pirata a 560 m de um forte que protege a entrada de um porto. Um canhão de defesa, situado ao nível do mar, dispara balas com uma velocidade inicial $v_0 = 82$ m/s.

(a) Com que ângulo θ_0 em relação à horizontal as balas devem ser disparadas para acertar o navio?

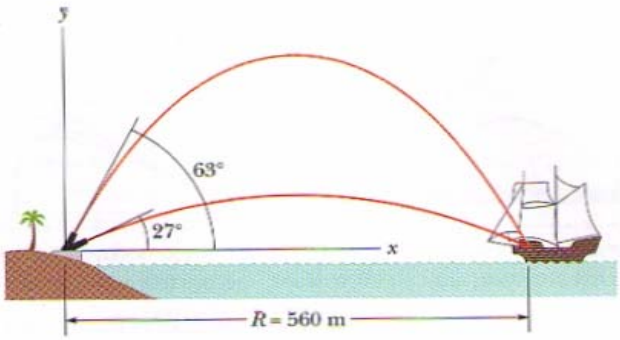

FIG. 4-16 Um navio pirata sendo atacado.

IDÉIAS-CHAVE (1) Uma bala disparada pelo canhão é um projétil. Estamos interessados em uma equação que relacione o ângulo de lançamento θ_0 ao deslocamento horizontal da bala entre o canhão e o navio. (2) Como o canhão e o navio estão na mesma altura, o deslocamento horizontal é igual ao alcance.

Cálculos: Podemos relacionar o ângulo de lançamento θ_0 ao alcance R através da Eq. 4-26, $R = (v_0^2/g)\operatorname{sen} 2\theta_0$, que pode ser escrita na forma

$$\theta_0 = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{gR}{v_0^2} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{(9{,}8\ \text{m/s}^2)(560\ \text{m})}{(82\ \text{m/s})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1} 0{,}816. \qquad (4\text{-}31)$$

Uma solução de $\operatorname{sen}^{-1} 0{,}816$ (54,7°) é a fornecida pelas calculadoras; subtraindo-a de 180°, obtemos a outra solução (125,3°). Assim, a Eq. 4-31 nos dá

$$\theta_0 = 27° \quad \text{e} \quad \theta_0 = 63°. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é o alcance máximo das balas de canhão?

Cálculos: Como vimos anteriormente, o alcance máximo corresponde a um ângulo de elevação θ_0 de 45°. Assim,

$$R = \frac{v_0^2}{g}\operatorname{sen} 2\theta_0 = \frac{(82\ \text{m/s})^2}{9{,}8\ \text{m/s}^2}\operatorname{sen}(2 \times 45°)$$

$$= 686\ \text{m} \approx 690\ \text{m}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Quando o navio pirata se afasta do porto, a diferença entre os dois ângulos de elevação que permitem acertar o navio diminui até que eles se tornam iguais entre si e iguais a $\theta = 45°$ quando o navio está a 690 m de distância. Para distâncias maiores é impossível acertar o navio.

Exemplo 4-9 Aumente sua capacidade

Uma bola de golfe é lançada no instante $t = 0$, como mostra a Fig. 4-18*a*. A Fig. 4-18*b* mostra o ângulo θ entre a direção do movimento da bola e o semi-eixo x positivo em função do tempo t. A bola se choca com o solo no instante $t = 6{,}00$ s. Determine o módulo v_0 da velocidade de lançamento da bola, a altura $(y - y_0)$ do ponto em que a bola atinge o solo em relação ao ponto de lançamento e a direção do movimento da bola no momento em que atinge o solo.

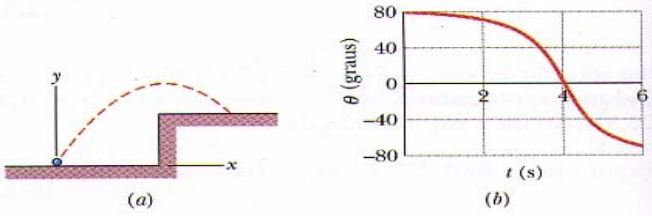

FIG. 4-18 (*a*) Trajetória de uma bola de golfe lançada em um terreno mais elevado. (*b*) Gráfico do ângulo θ entre a direção do movimento da bola e o semi-eixo x positivo em função do tempo t.

IDÉIAS-CHAVE (1) Como a bala se comporta como um projétil, as componentes horizontal e vertical do movimento podem ser analisadas separadamente. (2) A componente horizontal do movimento da bola, $v_x = v_0 \cos\theta_0$, não varia com o tempo. (3) A componente vertical do movimento da bola, v_y, *varia* com o tempo e se anula quando a bola atinge a altura máxima. (4) A direção do movimento da bola em qualquer instante é o ângulo do vetor velocidade $\vec{v}$ nesse instante. Esse ângulo é dado por $\tan\theta = v_x/v_y$, com as componentes da velocidade calculadas para esse instante.

Cálculos: Quando a bola atinge a altura máxima, $v_y = 0$. Assim, a direção da velocidade $\vec{v}$ é horizontal, ou seja, $\theta = 0°$. Observando o gráfico, vemos que isso acontece no instante $t = 0{,}4$ s. Vemos também que o ângulo de lançamento θ_0 (o ângulo no instante $t = 0$) é 80°. Usando a Eq. 4-23, $v_y = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - gt$, com $t = 4{,}0$ s, $g = 9{,}8$ m/s² e $v_y = 0$, obtemos

$$v_0 = 39{,}80 \approx 40\ \text{m/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

A bola se choca com o solo no instante $t = 6{,}00$ s. Usando a Eq. 4-22, $y - y_0 = (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)t - gt^2/2$, com $t = 6{,}00$ s, obtemos

$$y - y_0 = 58{,}77\ \text{m} \approx 59\ \text{m}. \qquad \text{(Resposta)}$$

No momento em que a bola se choca com o solo, sua velocidade horizontal v_x ainda é $v_0 \cos\theta_0$; substituindo v_0 e θ_0 por seus valores, obtemos $v_x = 6{,}911$ m/s. Para determinar a velocidade vertical nesse instante usamos a Eq. 4-23, $v_y = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - gt$, com $t = 6{,}00$ s, o que nos dá $v_y = -19{,}60$ m/s. Assim, o ângulo da direção do movimento da bola com a horizontal no momento em que se choca com o solo é

$$\theta = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1}\frac{-19{,}60\ \text{m/s}}{6{,}911\ \text{m/s}} \approx -71°. \qquad \text{(Resposta)}$$

Exemplo 4-6 Aumente sua capacidade

Na Fig. 4-15 um avião de salvamento voa a 198 km/h (= 55,0 m/s), a uma altura constante de 500 m, rumo a um ponto diretamente acima da vítima de um naufrágio, para deixar cair uma balsa.

(a) Qual deve ser o ângulo ϕ da linha de visada do piloto para a vítima no instante em que o piloto deixa cair a balsa?

IDÉIAS-CHAVE Depois de liberada, a balsa é um projétil; assim, seus movimentos horizontal e vertical podem ser examinados separadamente (não é preciso levar em conta a forma da trajetória).

Cálculos: Na Fig. 4-15 vemos que ϕ é dado por

$$\phi = \tan^{-1}\frac{x}{h}, \qquad (4\text{-}27)$$

onde x é a coordenada horizontal da vítima (e da balsa ao chegar à água) e $h = 500$ m. Podemos calcular x com o auxílio da Eq. 4-21:

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t. \qquad (4\text{-}28)$$

Sabemos que $x_0 = 0$ porque a origem foi colocada no ponto de lançamento. Como a balsa é *deixada cair* e não lançada do avião, sua velocidade inicial $\vec{v}_0$ é igual à velocidade do avião. Assim, sabemos também que a velocidade inicial tem módulo $v_0 = 55{,}0$ m/s e ângulo $\theta_0 = 0°$ (medido em relação ao semi-eixo x positivo). Entretanto, não conhecemos o tempo t que a balsa leva para percorrer a distância do avião até a vítima.

Para determinar o valor de t, temos que considerar o movimento *vertical* e, mais especificamente, a Eq. 4-22:

$$y - y_0 = (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2. \qquad (4\text{-}29)$$

onde o deslocamento vertical $y - y_0$ da balsa é -500 m (o valor negativo indica que a balsa se move *para baixo*). Assim,

$$-500\text{ m} = (55{,}0\text{ m/s})(\operatorname{sen} 0°)t - \tfrac{1}{2}(9{,}8\text{ m/s}^2)t^2.$$

Resolvendo esta equação, obtemos $t = 10{,}1$. Substituindo este valor na Eq. 4-28, temos:

$$x - 0 = (55{,}0\text{ m/s})(\cos 0°)(10{,}1\text{ s}),$$

ou

$$x = 555{,}5\text{ m}.$$

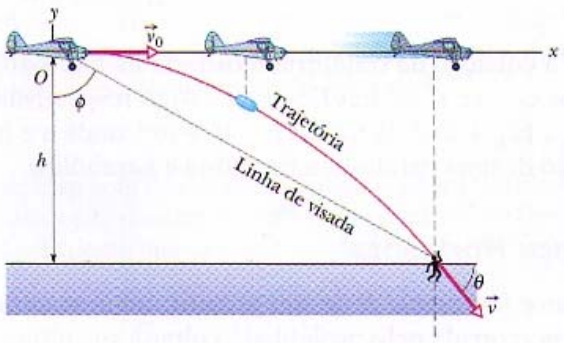

FIG. 4-15 Um avião lança uma balsa enquanto se desloca com velocidade constante em um vôo horizontal. Durante a queda a velocidade horizontal da balsa permanece igual à velocidade do avião.

Nesse caso, a Eq. 4-27 nos dá

$$\phi = \tan^{-1}\frac{555{,}5\text{ m}}{500\text{ m}} = 48{,}0°. \quad \text{(Resposta)}$$

(b) No momento em que a balsa atinge a água, qual é sua velocidade $\vec{v}$ em termos dos vetores unitários e na notação módulo-ângulo?

IDÉIAS-CHAVE (1) As componentes horizontal e vertical da velocidade da balsa são independentes. (2) A componente v_x não muda em relação ao valor inicial $v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$, pois não existe uma aceleração horizontal. (3) A componente v_y muda em relação ao valor inicial $v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0$, pois existe uma aceleração vertical.

Cálculos: Quando a balsa atinge a água,

$$v_x = v_0 \cos\theta_0 = (55{,}0\text{ m/s})(\cos 0°) = 55{,}0\text{ m/s}.$$

Usando a Eq. 4-23 e o tempo de queda da balsa $t = 10{,}1$ s, descobrimos que quando a balsa atinge a água

$$\begin{aligned} v_y &= v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - gt \qquad (4\text{-}30)\\ &= (55{,}0\text{ m/s})(\operatorname{sen} 0°) - (9{,}8\text{ m/s}^2)(10{,}1\text{ s})\\ &= -99{,}0\text{ m/s}. \end{aligned}$$

Assim, no momento em que a balsa atinge a água, sua velocidade é

$$\vec{v} = (55{,}0\text{ m/s})\hat{i} - (99{,}0\text{ m/s})\hat{j}. \quad \text{(Resposta)}$$

Usando a Eq. 3-6 como guia, descobrimos que o módulo e o ângulo de $\vec{v}$ são

$$v = 113\text{ m/s} \quad \text{e} \quad \theta = -60{,}9°. \quad \text{(Resposta)}$$

O efeito do Ar!

Até agora, supusemos que o ar não exerce efeito algum sobre o movimento de um projétil. Entretanto, em muitas situações a diferença entre a trajetória calculada dessa forma e a trajetória real do projétil pode ser muito grande, já que o ar resiste (se opõe) ao movimento. A Fig. 4-14, por exemplo, mostra as trajetórias de duas bolas de beisebol que deixam o bastão fazendo um ângulo de 60° com a horizontal, com uma velocidade inicial de 44,7 m/s. A trajetória I (de uma bola de verdade) foi calculada para as condições normais de jogo, levando em conta a resistência do ar. A trajetória II (de uma bola em condições ideais) é a trajetória que a bola seguiria no vácuo.

TABELA 4-1

Trajetórias de Duas Bolas de Beisebol*

	Trajetória I (Ar)	Trajetória II (Vácuo)
Alcance	98,5 m	177 m
Altura máxima	53,0 m	76,8 m
Tempo de percurso	6,6 s	7,9 s

*Veja a Fig. 4-14. O ângulo de lançamento é de 60° e a velocidade de lançamento é de 44,7 m/s.

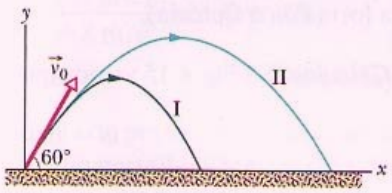

FIG. 4-14 (I) Trajetória teórica de uma bola, levando em conta a resistência do ar. (II) Trajetória que a bola seguiria no vácuo, calculada usando as equações deste capítulo. Os dados correspondentes estão na Tabela 4-1. (Adaptada de "The Trajectory of a Fly Ball," Peter J. Brancazio, *The Physics Teacher*, January 1985.)

Exercício proposto

1.

Na Fig. 4-44 uma bola é arremessada para o alto de um edifício, caindo 4,00 s depois a uma altura h = 20,0 m acima da altura de lançamento. A trajetória da bola no final tem uma inclinação $\theta = 60°$ em relação à horizontal. (a) Determine a distância horizontal d coberta pela bola

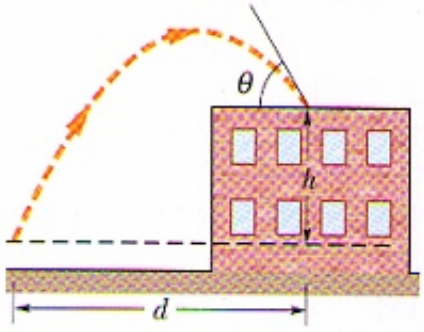

FIG. 4-44

Quais são (b) o módulo e (c) o ângulo (em relação à horizontal) da velocidade inicial da bola?

6 – Movimento Circular Uniforme

Uma partícula está em movimento circular uniforme se descreve uma circunferência ou um arco de circunferência com velocidade escalar constante (uniforme). Embora a velocidade escalar não varie, o movimento é acelerado porque a velocidade muda de direção.

A figura 4-19 mostra a relação entre os vetores velocidade e aceleração em várias posições durante o movimento circular uniforme.

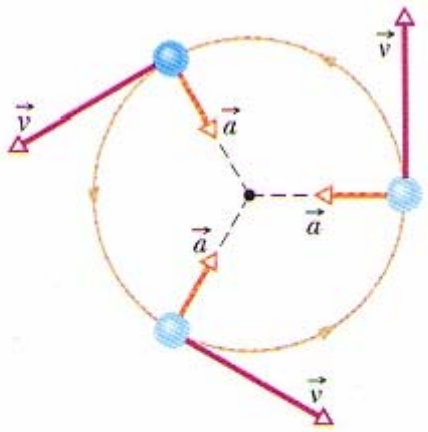

FIG. 4-19 Os vetores velocidade e aceleração de uma partícula em movimento circular uniforme.

➔ O módulo dos dois vetores permanece constante durante o movimento, mas a orientação varia continuamente.

➔ A velocidade está sempre na direção tangente à circunferência e tem o mesmo sentido que o movimento.

➔ A aceleração está sempre na direção radial e aponta para o centro do círculo. Por essa razão, a aceleração associada ao movimento circular uniforme é chamada de centrípeta ("que busca o centro").

Como será demonstrado a seguir, o módulo dessa aceleração centrípeta $\vec{a}$ é:

$$a = \frac{v^2}{r} \quad \text{(aceleração centrípeta)}, \qquad (4\text{-}34)$$

onde r é o raio da circunferência e v é a velocidade da partícula.

Durante essa aceleração com velocidade escalar constante a partícula percorre a circunferência completa (uma distância igual a $2\pi r$) em um intervalo de tempo dado por:

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad \text{(período)}. \qquad (4\text{-}35)$$

O parâmetro T é chamado período de revolução ou, simplesmente, período.

***Período é o tempo que uma partícula leva para completar uma volta em uma trajetória fechada*.**

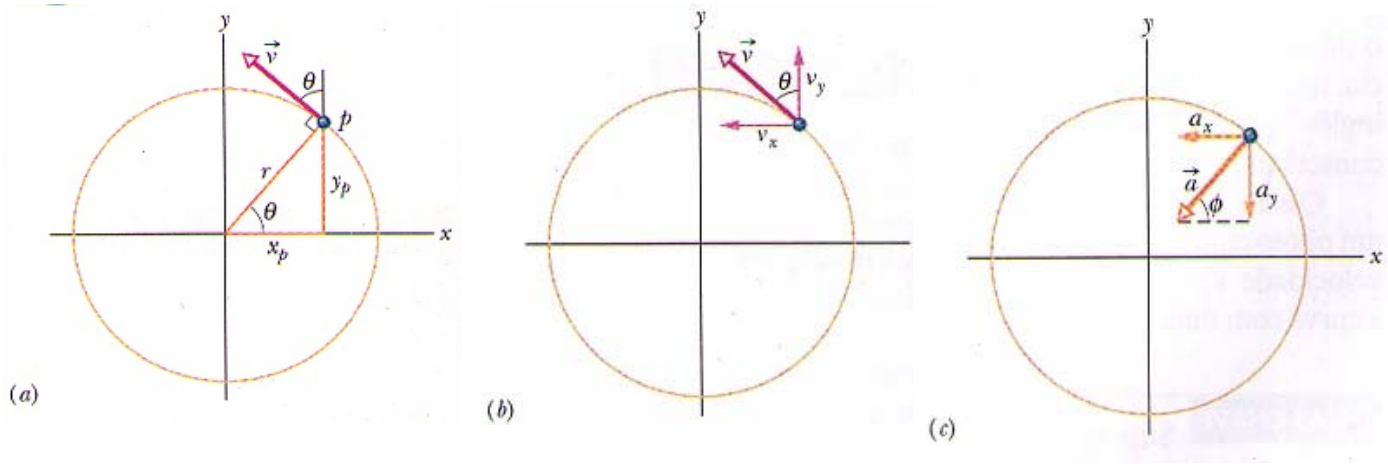

Fig. 4-20 Uma partícula p em movimento circular uniforme no sentido anti-horario. a) posição e velocidade $\vec{v}$ da partícula em um certo instante de tempo. b) velocidade $\vec{v}$ e suas componentes projetadas em relação aos eixos . c) aceleração $\vec{a}$ e suas componentes projetadas em relação aos eixos.

Para determinar o módulo e a orientação da aceleração no caso do movimento circular uniforme, considere a figura 4-20. Na figura 4-20*a* a partícula p se move com velocidade escalar constante *v* enquanto percorre uma circunferência de raio *r*. No instatnte mostrado, p possui coordenadas x_p e y_p.

$\vec{v}$ é sempre tangente a trajetória da partícula na posição considerada. Isso significa que, na figura, $\vec{v}$ é perpendicular a uma reta *r* que liga o centro da circunferência à posição da partícula. Nesse caso, o ângulo θ que $\vec{v}$ faz com a reta vertical passando pelo ponto *p* é igual ao ângulo θ que o raio *r* faz com o eixo *x*.

As componentes escalares de $\vec{v}$ aparecem na figura 4-20b. Assim, $\vec{v}$ pode ser escrita em termos dessas componentes, como:

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = (-v \operatorname{sen}\theta)\hat{i} + (v\cos\theta)\hat{j}. \qquad (4\text{-}36)$$

Vemos que $sen\theta = \frac{y_p}{r}$ e $\cos\theta = \frac{x_p}{r}$.

$$\vec{v} = \left(-\frac{vy_p}{r}\right)\hat{i} + \left(\frac{vx_p}{r}\right)\hat{j}. \qquad (4\text{-}37)$$

Sendo a aceleração, a taxa de variação temporal da velocidade e lembrando que tanto ***o raio r quanto a velocidade escalar v são constantes***, podemos escrever:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-\frac{v}{r}\frac{dy_p}{dt}\right)\hat{i} + \left(\frac{v}{r}\frac{dx_p}{dt}\right)\hat{j}. \qquad (4\text{-}38)$$

De acordo com a figura, $v_x = -v \operatorname{sen} \theta$ e $v_y = v \cos \theta$. sendo a primeira, a componente x e a segunda, a componente y da velocidade. Desta forma:

$$\vec{a} = \left(-\frac{v^2}{r}\cos\theta\right)\hat{i} + \left(-\frac{v^2}{r}\operatorname{sen}\theta\right)\hat{j}. \qquad (4\text{-}39)$$

Assim, o módulo da aceleração será dado por:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r}\sqrt{(\cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2} = \frac{v^2}{r}\sqrt{1} = \frac{v^2}{r},$$

Para determinar a orientação de $\vec{a}$, temos que encontrar o ângulo ϕ :

$$\tan\phi = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-(v^2/r)\operatorname{sen}\theta}{-(v^2/r)\cos\theta} = \tan\theta$$

Significando que $\vec{a}$ aponta na direção do raio r da figura 4-20a, no sentido do centro da circunferência, como queríamos demonstrar.

Exemplo 4-10

Os pilotos de caça se preocupam quando têm que fazer curvas muito fechadas. Como o corpo do piloto fica submetido à aceleração centrípeta, com a cabeça mais próxima do centro de curvatura, a pressão sanguínea no cérebro diminui, o que pode levar à perda das funções cerebrais.

Os sinais de perigo são vários. Quando a aceleração centrípeta é de $2g$ ou $3g$, o piloto se sente pesado. Por volta de $4g$ a visão do piloto passa para preto e branco e se reduz à "visão de túnel". Se a aceleração é mantida ou aumentada o piloto deixa de enxergar e, logo depois, perde a consciência, uma situação conhecida como g-LOC, da expressão em inglês "g-induced loss of consciousness", ou seja, "perda de consciência induzida por g".

Qual é o módulo da aceleração, em unidades de g, para um piloto cuja aeronave inicia uma curva horizontal com uma velocidade $\vec{v}_i = (400\hat{i} + 500\hat{j})$ m/s e, 24,0 s mais tarde, termina a curva com uma velocidade $\vec{v}_f = (400\hat{i} + 500\hat{j})$ m/s?

IDÉIAS-CHAVE Supomos que o avião executa a curva com um movimento circular uniforme. Nesse caso, o módulo da aceleração centrípeta é dado pela Eq. 4-34 ($a = v^2/R$), onde R é o raio da curva. O tempo necessário para descrever uma circunferência completa é o período dado pela Eq. 4-35 ($T = 2\pi R/v$).

Cálculos: Como não conhecemos o raio R, vamos explicitar R na Eq. 4-35 e substituí-lo pelo seu valor na Eq. 4-34. O resultado é o seguinte:

$$a = \frac{2\pi v}{T}.$$

Nesta equação, v é o módulo (constante) da velocidade durante a curva. Vamos substituir as componentes da velocidade inicial na Eq. 3-6:

$$v = \sqrt{(400\text{ m/s})^2 + (500\text{ m/s})^2} = 640{,}31\text{ m/s}.$$

Para determinar o período T do movimento, observamos que a velocidade final é igual ao negativo da velocidade inicial. Isso significa que a aeronave termina a curva no lado oposto da circunferência e completou metade de uma circunferência em 24,0 s. Assim, levaria $T = 48{,}0$ s para descrever uma circunferência completa. Substituindo esses valores na equação de a, obtemos

$$a = \frac{2\pi(640{,}31\text{ m/s})}{48{,}0\text{ s}} = 83{,}81\text{ m/s}^2 \approx 8{,}6g. \text{ (Resposta)}$$

Exercícios propostos.

1.

Um satélite se move em uma órbita circular, 640 km acima da superfície da Terra, com um período de 98,0 min. Quais são (a) a velocidade e (b) o módulo da aceleração centrípeta do satélite?

2.

Qual é o módulo da aceleração de um velocista que corre a 10 m/s ao fazer uma curva com 25 m de raio?

3.

Quando uma grande estrela se torna uma *supernova* seu núcleo pode ser tão comprimido que ela se transforma em uma *estrela de nêutrons*, com um raio de cerca de 20 km. Se uma estrela de nêutrons completa uma revolução a cada segundo, (a) qual é o módulo da velocidade de uma partícula situada no equador da estrela e (b) qual é o módulo da aceleração centrípeta da partícula? (c) Se a estrela de nêutrons gira mais depressa, as respostas dos itens (a) e (b) aumentam, diminuem ou permanecem as mesmas?

4.

Em um parque de diversões uma mulher passeia em uma roda-gigante com 15 m de raio, completando cinco voltas em torno do eixo horizontal a cada minuto. Quais são (a) o período do movimento, (b) o módulo e (c) o sentido de sua aceleração centrípeta no ponto mais alto, e (d) o módulo e (e) o sentido de sua aceleração centrípeta no ponto mais baixo?

Referencias:

- Física do Movimento: observar, medir, compreender. Autora: *Maria Matos. Editora: PUC-Rio.*
- Livro: fundamentos da Física – Volume 1: Halliday, Resnick & Walker - Editora LTC.
- Notas de Aula na disciplina Mecânica Newtoniana A – Coordenadora e autora das apostilas: Maria Oswald Machado de Mattos. - http://www.fis.puc-rio.br/mariaoswald_ing.php.