Cálculo Diferencial e Integral I

Faculdade de Engenharia, Arquiteturas e Urbanismo – FEAU

Prof. Dr. Sergio Pilling

Parte 3 – Técnicas de integração: Substituição trigonométrica

1) Introdução.

As substituições trigonométricas podem servir para transformar integrais que envolvam $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$ e $\sqrt{x^2-a^2}$ em integrais que podemos calcular diretamente.

Três substituições básicas

As substituições mais comuns são $x = a \operatorname{tg} \theta$, $x = a \operatorname{sen} \theta$ e $x = a \sec \theta$. Elas vêm dos triângulos retângulos de referência da Figura 8.2.

Com $x = a \operatorname{tg} \theta$,

$$a^2 + x^2 = a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \theta = a^2(1 + \operatorname{tg}^2 \theta) = a^2 \sec^2 \theta$$

Com $x = a \operatorname{sen} \theta$,

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta = a^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta) = a^2 \cos^2 \theta$$

Com $x = a \sec \theta$,

$$x^2 - a^2 = a^2 \sec^2 \theta - a^2 = a^2(\sec^2 \theta - 1) = a^2 \operatorname{tg}^2 \theta$$

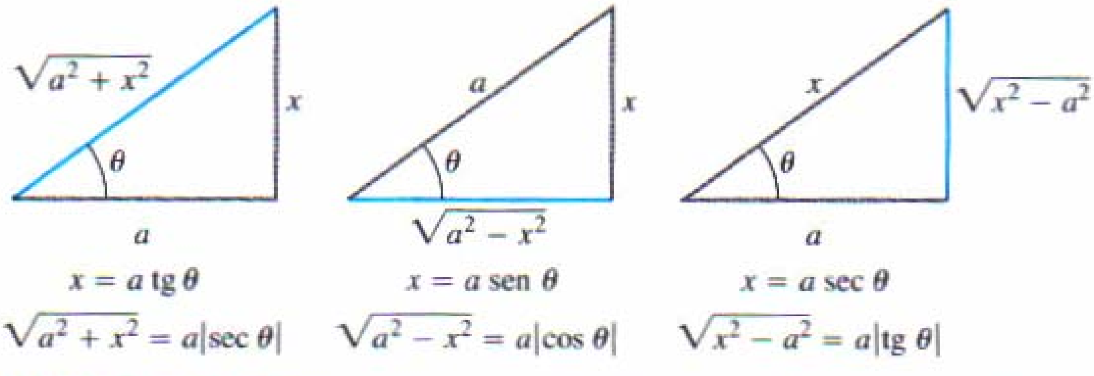


FIGURA 8.2 Triângulos de referência para as três substituições básicas; eles ajudam a identificar os lados x e a para cada substituição.

Desejamos que toda substituição usada em uma integração seja reversível, de maneira que possamos voltar para a variável original posteriormente. Por exemplo, se $x = a \operatorname{tg} \theta$, queremos poder estabelecer que $\theta = \operatorname{tg}^{-1}(x/a)$ após a integração ter ocorrido. Se $x = a \operatorname{sen} \theta$, queremos poder estabelecer que $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(x/a)$ no final, o mesmo valendo para $x = a \sec \theta$.

Como já vimos na Seção 1.6, nessas substituições as funções têm inversas somente para valores selecionados de θ (Figura 8.3). Para reversibilidade,

$$x = a \operatorname{tg} \theta \quad \text{exige } \theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{com} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$x = a \operatorname{sen} \theta \quad \text{exige } \theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{com} \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$x = a \sec \theta \quad \text{exige } \theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{com} \quad \begin{cases} 0 \le \theta < \frac{\pi}{2} & \text{se } \frac{x}{a} \ge 1 \\ \frac{\pi}{2} < \theta \le \pi & \text{se } \frac{x}{a} \le -1 \end{cases}$$

Para simplificar os cálculos com a substituição $x = a \sec \theta$, restringiremos seu uso a integrais nas quais $x/a \ge 1$. Isso colocará θ em $[0, \pi/2)$ e tornará $\operatorname{tg} \theta \ge 0$. Teremos, então, $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta} = |a \operatorname{tg} \theta| = a \operatorname{tg} \theta$, livre de valores absolutos, desde que $a > 0$.

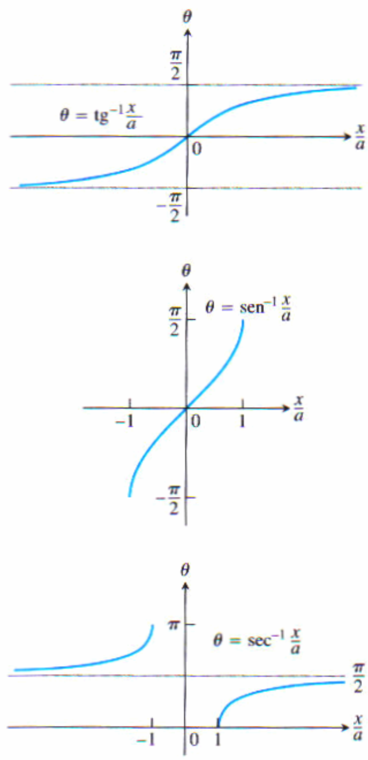


FIGURA 8.3 O arco tangente, o arco seno e o arco secante de x/a, representados graficamente como funções de x/a.

EXEMPLO 1 Usando a substituição $x = a \operatorname{tg} \theta$

Calcule

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}$$

SOLUÇÃO Determinamos

$$x = 2 \operatorname{tg} \theta, \qquad dx = 2 \sec^2 \theta \, d\theta, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$4 + x^2 = 4 + 4 \operatorname{tg}^2 \theta = 4(1 + \operatorname{tg}^2 \theta) = 4 \sec^2 \theta$$

Então

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}} = \int \frac{2 \sec^2 \theta \, d\theta}{\sqrt{4 \sec^2 \theta}} = \int \frac{\sec^2 \theta \, d\theta}{|\sec \theta|} \qquad \sqrt{\sec^2 \theta} = |\sec \theta|$$

$$= \int \sec \theta \, d\theta \qquad \sec \theta > 0 \text{ para } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$= \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C$$

$$= \ln \left| \frac{\sqrt{4 + x^2}}{2} + \frac{x}{2} \right| + C \qquad \text{Da Figura 8.4.}$$

$$= \ln |\sqrt{4 + x^2} + x| + C' \qquad \text{Considerando } C' = C - \ln 2$$

Note como expressamos $\ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta|$ em termos de x: desenhamos um triângulo de referência para a substituição original $x = 2 \operatorname{tg} \theta$ (Figura 8.4) e lemos as relações trigonométricas no triângulo.

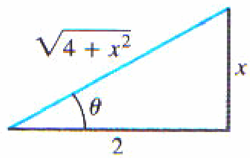


FIGURA 8.4 Triângulo de referência para $x = 2 \operatorname{tg} \theta$ (Exemplo 1):

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{x}{2}$$

e

$$\sec \theta = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{2}$$

EXEMPLO 2 Usando a substituição $x = a \text{ sen } \theta$

Calcule

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{9 - x^2}}$$

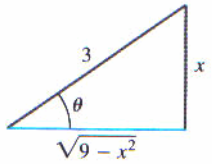


FIGURA 8.5 Triângulo de referência para $x = 3 \text{ sen } \theta$ (Exemplo 2):

$$\text{sen } \theta = \frac{x}{3}$$

e

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3}$$

SOLUÇÃO Determinamos

$$x = 3 \text{ sen } \theta, \qquad dx = 3 \cos \theta\, d\theta, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$9 - x^2 = 9 - 9 \text{ sen}^2 \theta = 9(1 - \text{sen}^2 \theta) = 9 \cos^2 \theta$$

Então

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{9 - x^2}} &= \int \frac{9 \text{ sen}^2 \theta \cdot 3 \cos \theta\, d\theta}{|3 \cos \theta|} \\
&= 9 \int \text{sen}^2 \theta\, d\theta && \cos \theta > 0 \text{ para } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\
&= 9 \int \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\, d\theta \\
&= \frac{9}{2}\left(\theta - \frac{\text{sen } 2\theta}{2}\right) + C \\
&= \frac{9}{2}(\theta - \text{sen } \theta \cos \theta) + C && \text{sen } 2\theta = 2 \text{ sen } \theta \cos \theta \\
&= \frac{9}{2}\left(\text{sen}^{-1} \frac{x}{3} - \frac{x}{3} \cdot \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3}\right) + C && \text{Figura 8.5} \\
&= \frac{9}{2} \text{ sen}^{-1} \frac{x}{3} - \frac{x}{2}\sqrt{9 - x^2} + C
\end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Usando a substituição $x = a \sec \theta$

Calcule

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 - 4}} \qquad x > \frac{2}{5}$$

SOLUÇÃO Primeiro reescrevemos o radical como

$$\sqrt{25x^2 - 4} = \sqrt{25\left(x^2 - \frac{4}{25}\right)}$$
$$= 5\sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2}$$

para colocar o radicando na forma $x^2 - a^2$. Então, substituímos

$$x = \frac{2}{5}\sec\theta, \qquad dx = \frac{2}{5}\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}\sec^2\theta - \frac{4}{25}$$
$$= \frac{4}{25}(\sec^2\theta - 1) = \frac{4}{25}\mathrm{tg}^2\,\theta$$

$$\sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2}{5}|\mathrm{tg}\,\theta| = \frac{2}{5}\mathrm{tg}\,\theta \qquad \begin{array}{l}\mathrm{tg}\,\theta > 0 \text{ para} \\ 0 < \theta < \pi/2\end{array}$$

Com essas substituições, temos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 - 4}} = \int \frac{dx}{5\sqrt{x^2 - (4/25)}} = \int \frac{(2/5)\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta}{5\cdot(2/5)\,\mathrm{tg}\,\theta}$$
$$= \frac{1}{5}\int \sec\theta\,d\theta = \frac{1}{5}\ln|\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta| + C$$
$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5x}{2} + \frac{\sqrt{25x^2 - 4}}{2}\right| + C \qquad \text{Figura 8.6}$$

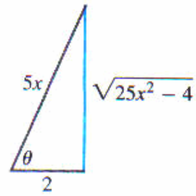


FIGURA 8.6 Se $x = (2/5)\sec\theta$, $0 \le \theta < \pi/2$, então $\theta = \sec^{-1}(5x/2)$ e podemos ler os valores de outras funções trigonométricas de θ nesse triângulo retângulo (Exemplo 3).

Uma substituição trigonométrica, às vezes, pode nos ajudar a calcular uma integral que contenha uma potência inteira de um binômio quadrático, como no próximo exemplo.

EXEMPLO 4 Determinando o volume de um sólido de revolução

Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região delimitada pela curva $y = 4\,(x^2 + 4)$, pelo eixo x e pelas retas $x = 0$ e $x = 2$.

SOLUÇÃO Esboçamos a região (Figura 8.7) e usamos o método do disco:

$$V = \int_0^2 \pi [R(x)]^2\, dx = 16\pi \int_0^2 \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} \qquad R(x) = \frac{4}{x^2 + 4}$$

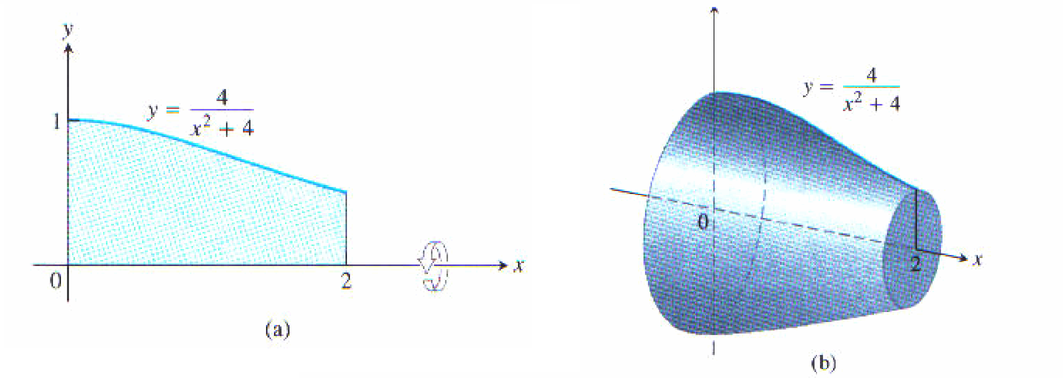


FIGURA 8.7 A região (a) e o sólido (b) do Exemplo 4.

Para calcular a integral, determinamos

$$x = 2\,\mathrm{tg}\,\theta, \qquad dx = 2\sec^2\theta\, d\theta, \qquad \theta = \mathrm{tg}^{-1}\frac{x}{2}$$

$$x^2 + 4 = 4\,\mathrm{tg}^2\theta + 4 = 4(\mathrm{tg}^2\theta + 1) = 4\sec^2\theta$$

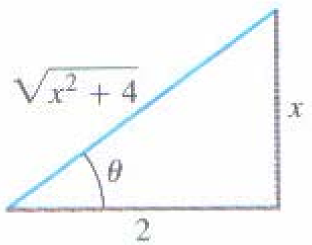


FIGURA 8.8 Triângulo de referência para $x = 2\,\mathrm{tg}\,\theta$ (Exemplo 4).

(Figura 8.8) Com essas substituições:

$$V = 16\pi \int_0^2 \frac{dx}{(x^2 + 4)^2}$$

$$= 16\pi \int_0^{\pi/4} \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{(4\sec^2\theta)^2} \qquad \theta = 0 \text{ quando } x = 0; \; \theta = \pi/4 \text{ quando } x = 2$$

$$= 16\pi \int_0^{\pi/4} \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{16\sec^4\theta} = \pi \int_0^{\pi/4} 2\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \pi \int_0^{\pi/4} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta = \pi \left[\theta + \frac{\mathrm{sen}\, 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4} \qquad 2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$$

$$= \pi \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right] \approx 4{,}04$$

EXEMPLO 5 Determinando a área de uma elipse

Determine a área delimitada pela elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

SOLUÇÃO Como a elipse é simétrica em relação aos dois eixos, a área total A é quatro vezes a área no primeiro quadrante (Figura 8.9). Determinando $y \geq 0$ na equação da elipse, temos

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}$$

ou

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad 0 \leq x \leq a$$

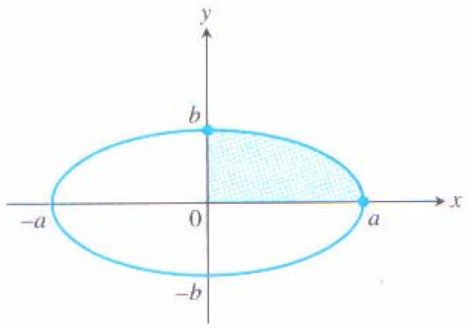


FIGURA 8.9 A elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ do Exemplo 5.

A área da elipse é

$$\begin{aligned}
A &= 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx \\
&= 4\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2} a\cos\theta \cdot a\cos\theta\, d\theta && x = a\,\mathrm{sen}\,\theta,\ dx = a\cos\theta\, d\theta, \\
& && \theta = 0 \text{ quando } x = 0; \\
& && \theta = \pi/2 \text{ quando } x = a \\
&= 4ab\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta \\
&= 4ab\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\, d\theta \\
&= 2ab\left[\theta + \frac{\mathrm{sen}\, 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} \\
&= 2ab\left[\frac{\pi}{2} + 0 - 0\right] = \pi ab
\end{aligned}$$

Se $a = b = r$, concluímos que a área de um círculo com raio r é πr^2.

EXERCICIOS

Substituições trigonométricas básicas

Calcule as integrais dos exercícios 1–8.

1. $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{9+y^2}}$

2. $\displaystyle\int \frac{3\,dy}{\sqrt{1+9y^2}}$

3. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{4+x^2}$

4. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{8+2x^2}$

5. $\displaystyle\int_{0}^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

6. $\displaystyle\int_{0}^{1/2\sqrt{2}} \frac{2\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

7. $\displaystyle\int \sqrt{25-t^2}\,dt$

8. $\displaystyle\int \sqrt{1-9t^2}\,dt$

Resposta dos exercícios impares:

1. $\ln\left|\sqrt{9+y^2}+y\right|+C$ 3. $\pi/4$ 5. $\pi/6$

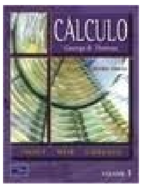
7. $\dfrac{25}{2}\,\mathrm{sen}^{-1}\left(\dfrac{t}{5}\right)+\dfrac{t\sqrt{25-t^2}}{2}+C$

Aplicações

1. Determine a área da região no primeiro quadrante que é delimitada pelos eixos coordenados e pela curva $y=\sqrt{9-x^2}/3$.

2. Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região do primeiro quadrante delimitada pelos eixos de coordenadas, pela curva $y = 2/(1+x^2)$ e pela reta $x = 1$.

Livro texto:



Thomas G. B., Finney R. L., Weir M. D., Giordano F. R., Cálculo, Vol. 1, Editora Pearson, Ed. 10 ou 11 – Addison Wesley, São Paulo.

Notas de aula disponíveis em: http://www1.univap.br/~spilling