Cálculo Diferencial e Integral I

Faculdade de Engenharia, Arquiteturas e Urbanismo – FEAU

Prof. Dr. Sergio Pilling

Parte 3 – Técnicas de integração: Integração por partes

1) Introdução.

Existem diversas técnicas para se resolver integrais, entre elas estão: a substituição, completando quadrado, eliminado raiz, fração imprópria, integração por partes, substituição trigonométrica, entre outras. Cada uma dessas técnicas permite facilitar a resolução de uma certa família de integrais. Com o tempo um estudante astuto perceberá quando se deve utilizar cada técnica para facilitar o cálculo de cada tipo de integral.

Nesta aula, estudaremos uma das técnicas de integral mais utilizadas a de integração por partes. As deferentes técnicas de integração possibilitam escrever integrais complicadas em uma forma mais simples que possa ser reconhecida (integrais básicas) como as da tabela abaixo.

TABELA Fórmulas de integração básica

1. $\int du = u + C$
2. $\int k\,du = ku + C$ (qualquer número k)
3. $\int (du + dv) = \int du + \int dv$
4. $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
5. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
6. $\int \text{sen}\,u\,du = -\cos u + C$
7. $\int \cos u\,du = \text{sen}\,u + C$
8. $\int \sec^2 u\,du = \text{tg}\,u + C$
9. $\int \text{cosec}^2 u\,du = -\text{cotg}\,u + C$
10. $\int \sec u\,\text{tg}\,u\,du = \sec u + C$
11. $\int \text{cosec}\,u\,\text{cotg}\,u\,du = -\text{cosec}\,u + C$
12. $\int \text{tg}\,u\,du = -\ln|\cos u| + C = \ln|\sec u| + C$
13. $\int \text{cotg}\,u\,du = \ln|\text{sen}\,u| + C = -\ln|\text{cosec}\,u| + C$
14. $\int e^u\,du = e^u + C$
15. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$
16. $\int \text{senh}\,u\,du = \cosh u + C$
17. $\int \cosh u\,du = \text{senh}\,u + C$
18. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \text{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
19. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\,\text{tg}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
20. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C$
21. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \text{senh}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \quad (a > 0)$
22. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \quad (u > a > 0)$

2) Integração por partes.

Uma vez que

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

e

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

é evidente que

$$\int x \cdot x\,dx \neq \int x\,dx \cdot \int x\,dx$$

Em outras palavras, a integral de um produto geralmente *não* é o produto das integrais individuais:

$$\int f(x)g(x)\,dx \text{ não é igual a } \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$$

Integração por partes é uma técnica para simplificar integrais da forma

$$\int f(x)g(x)\,dx$$

na qual f pode ser derivada repetidamente e g pode ser integrada repetidamente sem dificuldade. A integral

$$\int xe^x\,dx$$

é uma integral desse tipo porque $f(x) = x$ pode ser derivada duas vezes para se tornar zero e $g(x) = e^x$ pode ser integrada repetidamente sem dificuldade. A integração por partes também se aplica a integrais como

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

na qual cada parte do integrando aparece novamente após repetidas derivações ou integrações.

Nesta seção, descreveremos a integração por partes e mostraremos como aplicá-la.

Regra do produto na forma de integral

Se f e g são funções deriváveis de x, a regra do produto diz que

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Em termos de integrais indefinidas, essa equação se torna

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\,dx = \int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\,dx$$

ou

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

Rearranjando os termos dessa última equação, temos

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\,dx - \int f'(x)g(x)\,dx$$

o que leva à **fórmula da integração por partes**.

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \qquad (1)$$

Às vezes é mais fácil lembrar a fórmula se a escrevemos na forma diferencial. Sejam $u = f(x)$ e $v = g(x)$. Então, $du = f'(x)\,dx$ e $dv = g'(x)\,dx$. Usando a regra da substituição, a fórmula da integração por partes se torna

Fórmula da integração por partes

$$\int u\,dv = uv - \underbrace{\int v\,du}_{\textbf{Função Primitiva + Cte.}} \qquad (2)$$

Fórmula da integração por partes para integrais definidas

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{u}\underbrace{g'(x)\,dx}_{dv} = \underbrace{\underbrace{f(x)}_{u}\underbrace{g(x)}_{v}\Big]_a^b}_{\substack{\text{Número}\\ f(b)g(b)-f(a)g(a)}} - \underbrace{\int_a^b \underbrace{f'(x)\,dx}_{du}\;\underbrace{g(x)}_{v}}_{\text{Número}} \qquad (3)$$

3) Exemplos da técnica de integração por partes em integrais indefinidas

EXEMPLO 1 Usando a integração por partes

Determine

$$\int x \cos x \, dx$$

SOLUÇÃO Usamos a fórmula $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ com

$$u = x, \qquad dv = \cos x \, dx$$

$$du = dx \qquad v = \operatorname{sen} x$$

A primitiva mais simples de $\cos x$.

Então,

$$\int x \cos x \, dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C$$

Obs. Para esse método funcionar, devemos fazer a substituição certa para as funcoes u e v. Veja discussão a seguir:

Vamos examinar as opções disponíveis para u e dv no Exemplo 1.

EXEMPLO 2 Exemplo 1 revisto

Para aplicar a integração por partes a

$$\int x \cos x \, dx = \int u \, dv$$

temos quatro opções possíveis:

1. $u = 1$ e $dv = x \cos x \, dx$
2. $u = x$ e $dv = \cos x \, dx$
3. $u = x \cos x$ e $dv = dx$
4. $u = \cos x$ e $dv = x \, dx$

Vamos examinar uma por uma.

A primeira opção não serve, porque ainda não sabemos como integrar $dv = x \cos x \, dx$ para obter v.

A opção 2 funciona bem, como vimos no Exemplo 1.

A opção 3 leva a

$$u = x\cos x, \qquad dv = dx$$

$$du = (\cos x - x \operatorname{sen} x)\, dx, \qquad v = x$$

e à nova integral

$$\int v \, du = \int (x \cos x - x^2 \operatorname{sen} x)\, dx$$

Essa integral é pior que a inicial.

A opção 4 leva a

$$u = \cos x, \qquad dv = x\,dx$$

$$du = -\operatorname{sen} x \, dx, \qquad v = x^2/2$$

e à nova integral

$$\int v \, du = -\int \frac{x^2}{2} \operatorname{sen} x \, dx$$

Essa integral também é pior que a inicial.

O objetivo da integração por partes é passar de uma integral $\int u\,dv$ que não sabemos como calcular para uma integral $\int v\,du$ que podemos calcular. Geralmente, escolhemos dv primeiro sendo a parte do integrando, incluindo dx, que sabemos integrar de maneira imediata; u é a parte restante. Lembre-se de que a integração por partes nem sempre funciona.

EXEMPLO 3 Integral do logaritmo natural

Calcule

$$\int \ln x\,dx$$

SOLUÇÃO Uma vez que $\int \ln x\,dx$ pode ser escrita como $\int \ln x \cdot 1\,dx$, usamos a fórmula $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ com

$u = \ln x$ simplificada quando derivada $dv = dx$ Fácil de integrar.

$du = \dfrac{1}{x}\,dx,$ $v = x$ Primitiva mais simples.

Então

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

Às vezes, precisamos utilizar a integração por partes mais de uma vez.

EXEMPLO 4 Uso repetido da integração por partes

Calcule

$$\int x^2 e^x\,dx$$

SOLUÇÃO Com $u = x^2$, $dv = e^x\,dx$, $du = 2x\,dx$ e $v = e^x$, temos

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx$$

A nova integral é menos complicada que a original porque o expoente em x é reduzido em um. Para calcular a integral à direita, integramos por partes novamente com $u = x$, $dv = e^x\,dx$. Então, $du = dx$, $v = e^x$ e

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

Logo,

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

A técnica do Exemplo 4 funciona para qualquer integral $\int x^n e^x\,dx$ na qual n seja um inteiro positivo, porque derivar x^n acabará nos levando a zero e integrar e^x é fácil.

EXEMPLO 5

Calcule

$$\int e^x \cos x \, dx$$

SOLUÇÃO Sejam $u = e^x$ e $dv = \cos x \, dx$. Então, $du = e^x \, dx$, $v = \operatorname{sen} x$ e

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

A segunda integral é como a primeira, exceto pelo fato de que tem sen x no lugar de cos x. Para calculá-la, usamos a integração por partes com

$$u = e^x, \qquad dv = \operatorname{sen} x \, dx, \qquad v = -\cos x, \qquad du = e^x \, dx$$

Então

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \left(-e^x \cos x - \int (-\cos x)(e^x \, dx)\right)$$

$$= e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx$$

A integral desconhecida agora aparece dos dois lados da equação. Adicionando a integral aos dois lados, temos

$$2\int e^x \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x + C_1$$

Dividindo por 2 e renomeando a constante da integração, temos

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x}{2} + C$$

Exemplo

Calcule $\int x \ln x \, dx$.

Solução:

Fazendo $u = \ln x$ e $dv = x \, dx$

temos $du = \frac{1}{x} dx$ e $v = \frac{1}{2}x^2$

Portanto,

$$\int x \ln x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C = \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 1) + C$$

Fórmulas de Redução

A integração por partes pode ser usada para obter as **fórmulas de redução** para integrais. Estas fórmulas expressam uma integral com potência de função em termos de uma integral que envolve uma potência mais baixa daquela função. Por exemplo, se n for um inteiro positivo e $n \geq 2$, então a integração por partes pode ser usada para obter as fórmulas de redução.

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\operatorname{sen}x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx$$

Exemplo

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}x\cos x + \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}x\cos x + C$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\cos x\operatorname{sen}x + \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}x\cos x + C$$

Exemplo

Calcule $\int \cos^4 x\,dx$

Solução. A partir de (2),com n=4

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}\cos^3 x\operatorname{sen}x + \frac{3}{4}\int \cos^2 x\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\cos^3 x\operatorname{sen}x + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\cos x\operatorname{sen}x + \frac{1}{2}\int dx\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cos^3 x\operatorname{sen}x + \frac{3}{8}\cos x\operatorname{sen}x + \frac{3}{8}x + C$$

4) Exemplos da técnica de integração por partes em integrais definidas

EXEMPLO 6 Encontrando a área

Encontre a área da região delimitada pela curva $y = xe^{-x}$ e pelo eixo x de $x = 0$ a $x = 4$.

SOLUÇÃO A região está sombreada na Figura 8.1. Sua área é

$$\int_0^4 xe^{-x}\,dx$$

Seja $u = x$, $dv = e^{-x}\,dx$, $v = -e^{-x}$ e $du = dx$. Então,

$$\int_0^4 xe^{-x}\,dx = -xe^{-x}\Big]_0^4 - \int_0^4 (-e^{-x})\,dx$$

$$= [-4e^{-4} - (0)] + \int_0^4 e^{-x}\,dx$$

$$= -4e^{-4} - e^{-x}\Big]_0^4$$

$$= -4e^{-4} - e^{-4} - (-e^0) = 1 - 5e^{-4} \approx 0{,}91$$

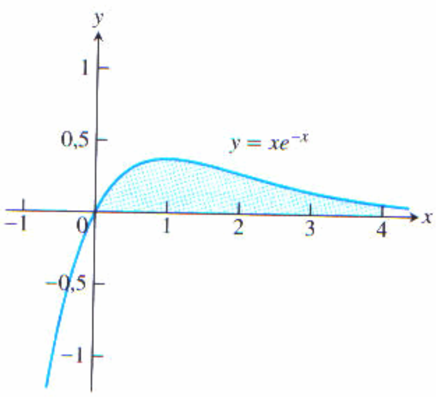


FIGURA 8.1 A região do Exemplo 6.

EXEMPLO 7

$$\int_0^{\pi/4} x\sin 2x\,dx = \left[x\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} 1.\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx,$$

$$u = x$$
$$\frac{dv}{dx} = \sin 2x$$
$$\frac{du}{dx} = 1$$
$$v = -\frac{1}{2}\cos 2x\ ,$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x\cos 2x\right]_0^{\pi/4} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\cos 2x\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[x\cos 2x\right]_0^{\pi/4} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/4}$$
$$= -\frac{1}{2}\left[x\cos 2x\right]_0^{\pi/4} + \frac{1}{4}\left[\sin 2x\right]_0^{\pi/4}$$
$$= -\frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{2} - 0\cdot\cos 0\right\} + \frac{1}{4}\left\{\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right\}$$
$$= -\frac{1}{2}\{0-0\} + \frac{1}{4}\{1-0\}, \qquad \text{since } \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$
$$= \frac{1}{4}. \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$
$$\text{and } \sin 0 = 0,$$

Exemplo

Calcule $\int_0^1 tg^{-1}x\,dx$

Solução. Seja

$$u = tg^{-1}x, \quad dv = dx, \quad du = \frac{1}{1+x^2}dx, \quad v = \int dx = x$$

Assim,

$$\int_0^1 tg^{-1}x\,dx = \int_0^1 u\,dv = uv\Big]_0^1 - \int_0^1 v\,du$$
$$= x\,tg^{-1}x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$$

Mas

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$$

logo

$$\int_0^1 tg^{-1}x\,dx = x\,tg^{-1}x\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\ln 2 = \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$$

5) Exercícios Propostos

5.1) Integração por partes

Calcule as integrais dos exercícios

1. $\int x \operatorname{sen} \frac{x}{2}\, dx$
2. $\int \theta \cos \pi\theta\, d\theta$
3. $\int t^2 \cos t\, dt$
4. $\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$
5. $\int_1^2 x \ln x\, dx$
6. $\int_1^e x^3 \ln x\, dx$
7. $\int \operatorname{tg}^{-1} y\, dy$
8. $\int \operatorname{sen}^{-1} y\, dy$
9. $\int x \sec^2 x\, dx$
10. $\int 4x \sec^2 2x\, dx$
11. $\int x^3 e^x\, dx$
12. $\int p^4 e^{-p}\, dp$
13. $\int (x^2 - 5x)e^x\, dx$
14. $\int (r^2 + r + 1)e^r\, dr$
15. $\int x^5 e^x\, dx$
16. $\int t^2 e^{4t}\, dt$
17. $\int_0^{\pi/2} \theta^2 \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta$
18. $\int_0^{\pi/2} x^3 \cos 2x\, dx$
19. $\int_{2/\sqrt{3}}^{2} t \sec^{-1} t\, dt$
20. $\int_0^{1/\sqrt{2}} 2x \operatorname{sen}^{-1}(x^2)\, dx$
21. $\int e^\theta \operatorname{sen} \theta\, d\theta$
22. $\int e^{-y} \cos y\, dy$
23. $\int e^{2x} \cos 3x\, dx$

Algumas respostas

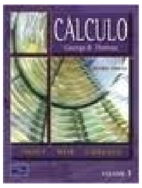
1. $-2x\cos(x/2) + 4\operatorname{sen}(x/2) + C$
3. $t^2 \operatorname{sen} t + 2t\cos t - 2\operatorname{sen} t + C$
5. $\ln 4 - \frac{3}{4}$
7. $y\operatorname{tg}^{-1}(y) - \ln\sqrt{1+y^2} + C$
9. $x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$
11. $(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C$
13. $(x^2 - 7x + 7)e^x + C$
15. $(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120)e^x + C$
17. $\frac{\pi^2 - 4}{8}$
19. $\frac{5\pi - 3\sqrt{3}}{9}$
21. $\frac{1}{2}(-e^\theta\cos\theta + e^\theta\operatorname{sen}\theta) + C$
23. $\frac{e^{2x}}{13}(3\operatorname{sen} 3x + 2\cos 3x) + C$
25. $\frac{2}{3}\left(\sqrt{3s+9}\, e^{\sqrt{3s+9}} - e^{\sqrt{3s+9}}\right) + C$
27. $\frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \ln(2) - \frac{\pi^2}{18}$
29. $\frac{1}{2}[-x\cos(\ln x) + x\operatorname{sen}(\ln x)] + C$

5.2) Substituição e integração por partes

Calcule as integrais dos exercícios usando uma Substituição antes da integração por partes.

25. $\int e^{\sqrt{3s+9}}\, ds$
26. $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\, dx$
27. $\int_0^{\pi/3} x \operatorname{tg}^2 x\, dx$
28. $\int \ln(x + x^2)\, dx$
29. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$

Livro texto:



Thomas G. B., Finney R. L., Weir M. D., Giordano F. R., Cálculo, Vol. 1, Editora Pearson, Ed. 10 ou 11 – Addison Wesley, São Paulo.

Estudar os exercícios resolvidos sobre integrais nos endereços eletrônicos abaixo:

http://mtm.ufsc.br/~azeredo/calculos/Acalculo/x/listas/intpartes/intpart1.html
http://www1.univap.br/~spilling