Cálculo Diferencial e Integral I

Faculdade de Engenharia, Arquiteturas e Urbanismo – FEAU

Prof. Dr. Sergio Pilling

Parte 2 - Derivadas (4ª cont.)

Estudos das funções, valores máximos e mínimos, análises de gráficos.

1) Introdução.

Nesta aula veremos como utilizar as derivadas para determinar os valores máximos e mínimos de uma função para prever e analisar a forma de um gráfico. Veremos com utilizar a noção de derivada para ajudar a construir gráficos de funções. Aprederemos a encontrar alguns pontos especiais das funções (extremos absolutos, extremos locais, ponto de inflexão)

Extremos Absolutos (Globais)

Os maiores e menores valores que uma função assume, tanto local quanto globalmente (ver Figura 3.1), sempre interessam muito.

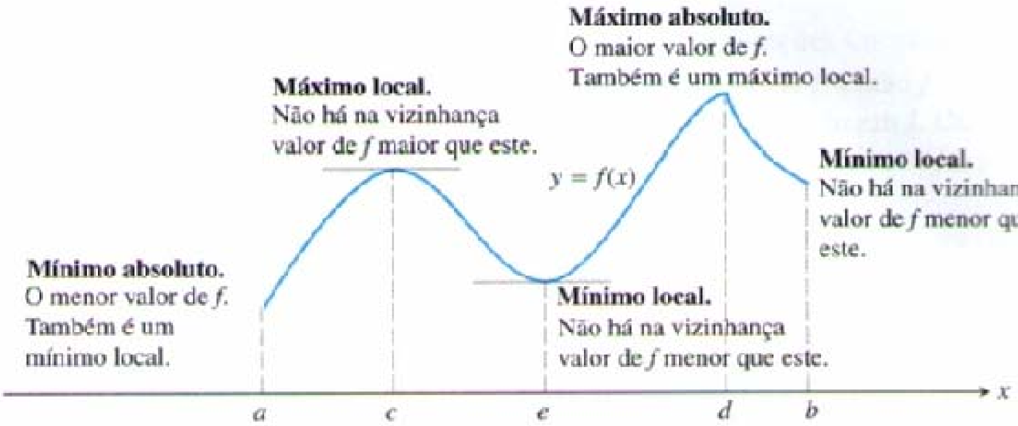


FIGURA 3.1 Como classificar os máximos e mínimos.

Definição Extremos Absolutos

Seja f uma função de domínio D. Então $f(c)$ é

(a) o **máximo absoluto** de f em D se e somente se $f(x) \leq f(c)$ para qualquer que seja x em D.

(b) o **mínimo absoluto** de f em D se e somente se $f(x) \geq f(c)$ para qualquer que seja x em D.

Máximos e mínimos absolutos (ou **globais**) também são chamados de **extremos absolutos**. Geralmente omitimos os termos 'absoluto' e 'global', dizendo apenas máximo e mínimo.

O Exemplo 2 mostra que valores extremos podem ocorrer em pontos interiores ou nas extremidades dos intervalos.

Exemplo 2 Encontrando os Extremos de uma Função

Em $[-\pi/2, \pi/2]$, $f(x) = \cos x$ assume o valor máximo 1 (uma vez) e o valor mínimo 0 (duas vezes). A função $g(x) = \text{sen } x$ assume o valor máximo 1 e o valor mínimo -1 (Figura 3.2).

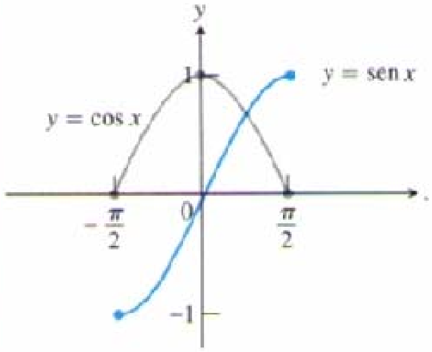


FIGURA 3.2 Os gráficos do Exemplo 2.

Teorema 1 O Teorema do Valor Extremo para Funções Contínuas

Se f é contínua para todos os pontos do intervalo fechado I, então f assume tanto um valor máximo M como um valor mínimo m em I. Ou seja, há números x_1 e x_2 em I tais que $f(x_1) = m$ e $f(x_2) = M$ e $m \leq f(x) \leq M$ para qualquer outro valor de x em I (Figura 3.4).

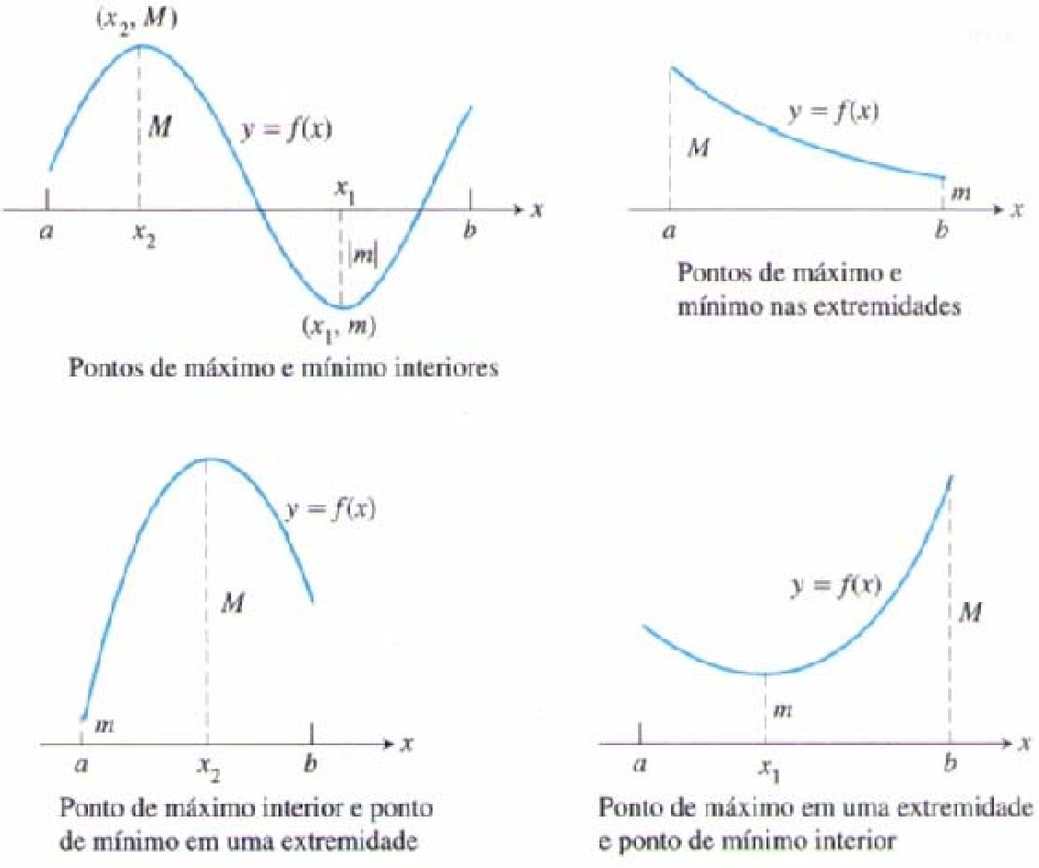


FIGURA 3.4 Algumas possibilidades para pontos de máximo e mínimo de uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$.

Extremos Locais

A Figura 3.1 mostra um gráfico com cinco pontos nos quais a função tem valores extremos em seu domínio $[a, b]$. O mínimo absoluto da função ocorre em a, embora em e o valor da função seja o menor que em qualquer ponto *próximo*. A curva sobe para a esquerda e desce para a direita próxima de c, tornando $f(c)$ um máximo localmente. A função atinge seu máximo absoluto em d.

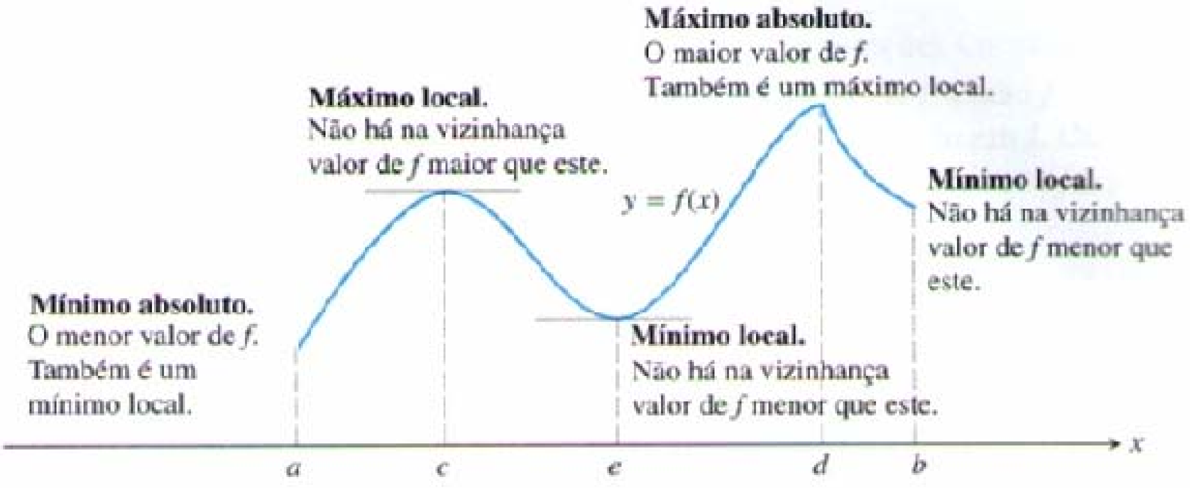


FIGURA 3.1 Como classificar os máximos e mínimos.

Definição Extremos Locais

Seja c um ponto interior do domínio da função f. Então $f(c)$ será

(a) um valor máximo local em c se e somente se $f(x) \leq f(c)$ para qualquer x em um intervalo aberto que contenha c.

(b) um valor mínimo local em c se e somente se $f(x) \geq f(c)$ para qualquer x em um intervalo aberto que contenha c.

Extremos locais também são chamados **extremos relativos**. Podemos ampliar essa definição para extremidades de intervalos. Uma função f possui um máximo ou mínimo local *em uma extremidade* c se a desigualdade apropriada for válida para qualquer x em um intervalo semi-aberto que contenha c.

Um extremo absoluto também é um extremo local, pois ser um extremo global faz dele um valor extremo em qualquer intervalo (aberto ou semi-aberto que o contenha). Assim, *uma lista contendo todos os extremos locais incluirá automaticamente o extremo absoluto, se houver.*

Determinando Extremos

Os pontos interiores do domínio onde a função da Figura 3.1 tem valores extremos locais são pontos onde f' é zero ou não existe. Este é geralmente o caso, como veremos no teorema a seguir.

Teorema 2 Extremos Locais

Se uma função f possui valores máximo ou mínimo locais em um ponto c interior de seu domínio e se f' existe em c, então

$$f'(c) = 0.$$

O Teorema 2 diz que, se a primeira derivada de uma função existe em um ponto interior de seu domínio que seja um extremo local, então ela se anula. Assim, os únicos locais onde uma função f pode ter valores extremos (locais ou globais) são

1. pontos interiores onde $f' = 0$
2. pontos interiores onde f' não existe
3. extremidades do domínio de f.

Na maioria das buscas por valores extremos é necessário a determinação de extremos absolutos de uma função contínua em um intervalo fechado. O Teorema 1 garante que esses valores existem, e o Teorema 2 nos diz onde procurá-los. A definição a seguir nos ajudará a resumir essas informações.

Definição Ponto Crítico

Um ponto de uma função f onde $f' = 0$ ou f' não existe é um **ponto crítico** de f.

Assim, em resumo podemos dizer que valores extremos ocorrem só nos pontos críticos e nas extremidades de um intervalo fechado.

Como Determinar os Extremos Absolutos de uma Função Contínua f em um Intervalo Fechado

Passo 1. Calcule f em todos os pontos críticos e extremidades.

Passo 2. Tome o maior e o menor dentre os valores obtidos.

Exemplo 5 Encontrando os Extremos Absolutos em um Intervalo Fechado

Determine os valores máximo e mínimo absolutos de $f(x) = 10x(2 - \ln x)$ no intervalo $[1, e^2]$.

Solução A Figura 3.6 sugere que f tem seu valor máximo absoluto próximo de $x = 3$ e que, quando $x = e^2$, seu valor mínimo absoluto é 0.

Lembremos aqui que o valor de *e* é próximo a 2.718.

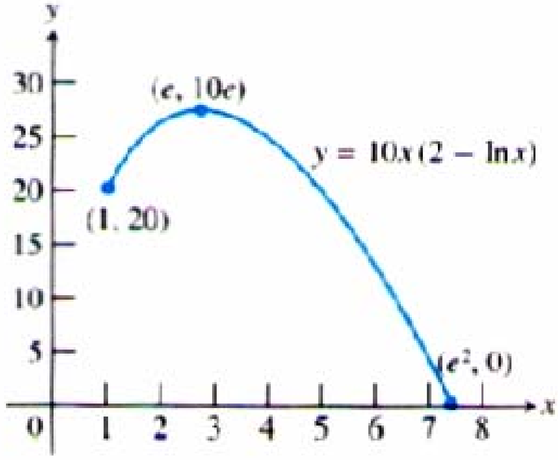


FIGURA 3.6 Os valores extremos de $f(x) = 10x\,(2 - \ln x)$ ocorrem quando $x = e$ e $x = e^2$ (Exemplo 5).

Calculamos a função nos pontos críticos e nas extremidades e, dentre os valores obtidos, tomamos o maior e o menor.

A primeira derivada é

$$f'(x) = 10(2 - \ln x) - 10x\left(\frac{1}{x}\right) = 10(1 - \ln x).$$

O único ponto crítico no domínio $[1, e^2]$ é o ponto $x = e$, onde $\ln x = 1$. Os valores de f nesse único ponto crítico e nas extremidades são

Valor no ponto crítico:	$f(e) = 10e$
Valores nas extremidades:	$f(1) = 10(2 - \ln 1) = 20$
	$f(e^2) = 10e^2(2 - 2\ln e) = 0.$

A partir dessa lista podemos ver que o máximo absoluto dessa função é $10e \approx 2{,}72$, que ocorre no ponto crítico interior $x = e$. O mínimo absoluto é 0 e ocorre na extremidade direita, quando $x = e^2$.

Exemplo 7 Pontos Críticos não Precisam Gerar Valores Extremos

Embora os extremos de uma função possam ocorrer apenas em pontos críticos e extremidades, nem todo ponto crítico ou extremidade indica a presença de um valor extremo. A Figura 3.9 ilustra isso para pontos interiores. O Exercício 62 descreve uma função que não apresenta valores extremos nas extremidades de seu domínio.

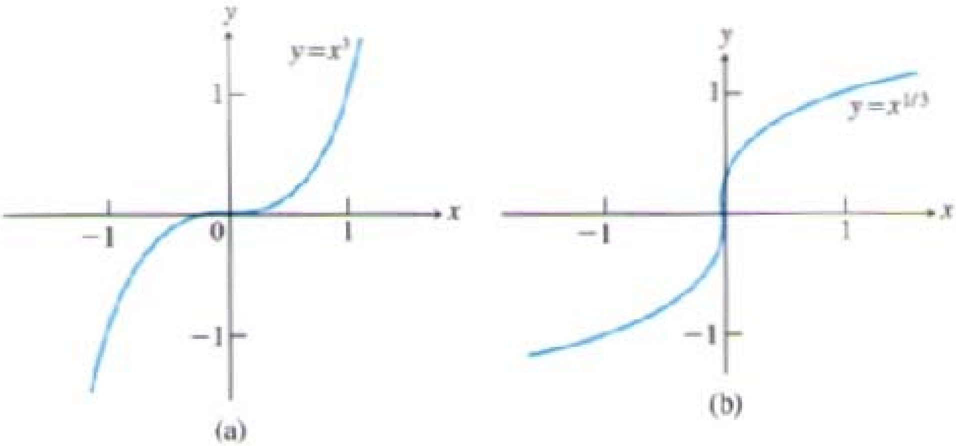


FIGURA 3.9 Pontos críticos sem valores extremos. (a) $y' = 3x^2$ é 0 quando $x = 0$, mas $y = x^3$ não possui nenhum extremo nesse ponto. (b) $y' = (1/3)x^{-2/3}$ não é definida quando $x = 0$, mas $y = x^{1/3}$ não possui nenhum extremo nesse ponto.

Teorema de Rolle

Há fortes evidências geométricas de que entre dois pontos quaisquer onde uma curva derivável cruza o eixo x há um ponto na curva onde a tangente é horizontal. O Teorema de Michel Rolle, enunciado há 300 anos, nos garante que isso é sempre verdadeiro.

Teorema 3 O Teorema de Rolle

Suponha que $y = f(x)$ seja contínua em todos os pontos de $[a, b]$ e derivável em todos os pontos de (a, b). Se

$$f(a) = f(b) = 0,$$

então há pelo menos um número c em (a, b) onde $f'(c) = 0$ (Figura 3.11).

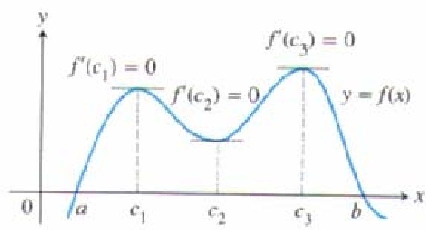


FIGURA 3.11 O Teorema de Rolle diz que uma curva derivável tem ao menos uma tangente horizontal entre dois pontos quaisquer onde a curva cruza o eixo x. Esssa curva tem três.

Teorema do Valor Médio

O Teorema do Valor Médio é o Teorema de Rolle 'inclinado'.

Teorema 4 O Teorema do Valor Médio

Suponha que $y = f(x)$ seja contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b). Então há pelo menos um ponto c em (a, b) em que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{1}$$

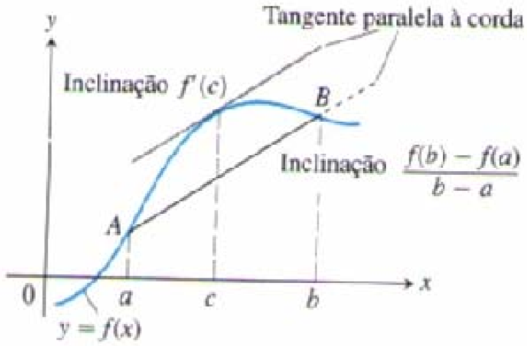


FIGURA 3.13 Geometricamente, o Teorema do Valor Médio diz que, em algum lugar entre A e B, a curva apresenta pelo menos uma tangente paralela à corda AB.

Exemplo 1 Explorando o Teorema do Valor Médio

A função $f(x) = x^2$ (Figura 3.16) é contínua para $0 \leq x \leq 2$ e derivável para $0 < x < 2$. Como $f(0) = 0$ e $f(2) = 4$, o Teorema do Valor Médio diz que, em algum ponto c no intervalo da derivada, $f'(x) = 2x$ deve ter o valor $(4 - 0)/(2 - 0) = 2$. Nesse caso (excepcional), podemos identificar c resolvendo a equação $2c = 2$ para obter $c = 1$.

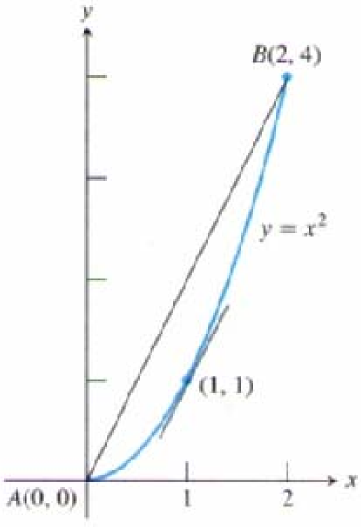


FIGURA 3.16 Como descobrimos no Exemplo 1, é em $c = 1$ que a tangente é paralela à corda.

Uma Interpretação Física

Pense no número $(f(b) - f(a))/(b - a)$ como a variação média de f em $[a, b]$ e em $f'(c)$ como uma variação instantânea. O Teorema do Valor Médio diz que a variação instantânea em algum ponto interior deve ser igual à variação média ao longo de todo o intervalo.

Exemplo 2 Interpretando o Teorema do Valor Médio

Se um carro, acelerando a partir do repouso, leva 8 segundos para percorrer 352 pés, sua velocidade média no intervalo de 8 s é $352/8 = 44$ pés/s. Em algum momento durante a aceleração, o velocímetro deve marcar exatamente 30 mi/h (44 pés/s) (Figura 3.17).

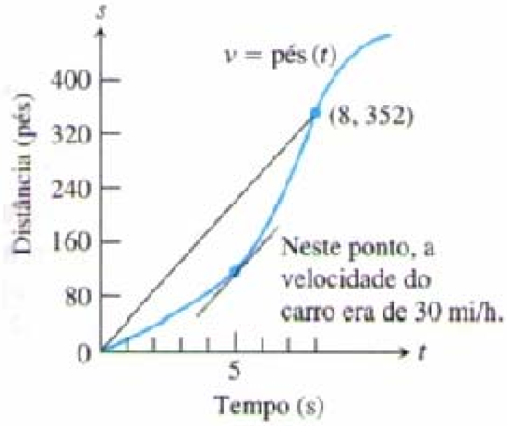


FIGURA 3.17 Distância *versus* tempo decorrido para o carro no Exemplo 2.

Conseqüências Matemáticas

O primeiro corolário do Teorema do Valor Médio nos diz que tipo de função tem uma derivada nula.

Corolário 1 Funções com Derivadas Nulas São Funções Constantes
Se $f'(x) = 0$ em todos os pontos de um intervalo I, então $f(x) = C$ para qualquer x em I, onde C é uma constante.

Corolário 2 Funções com a Mesma Função Derivada em um Intervalo Diferem por uma Constante
Se $f'(x) = g'(x)$ em todo ponto de um intervalo I, então existe uma constante C tal que $f(x) = g(x) + C$ para qualquer x em I.

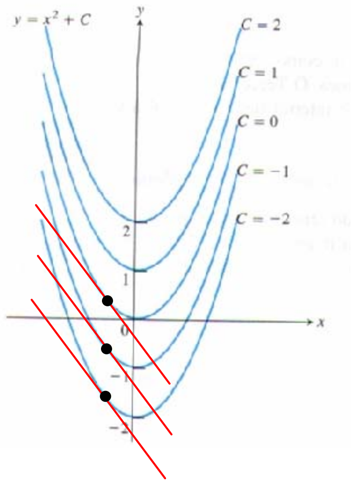


FIGURA 3.18 Do ponto de vista geométrico, o Corolário 2 do Teorema do Valor Médio diz que os gráficos das funções com derivadas idênticas em um intervalo podem diferir apenas por um deslocamento vertical. Os gráficos das funções com derivada $2x$ são as parábolas $y = x^2 + C$, apresentadas aqui para alguns valores escolhidos de C.

A Forma de um Gráfico

O que precisamos saber para determinar a forma de um gráfico? Precisamos saber como ele sobe ou desce, como progride e como se curva. Essas características marcantes são apresentadas na Figura 3.20. Nesta seção, veremos como a primeira e a segunda derivadas de uma função fornecem as informações necessárias para se determinar a forma de um gráfico. Começaremos definindo formalmente o que significa para um função ser crescente ou decrescente ao longo de um intervalo.

FIGURA 3.20 Em (a) o gráfico sobe e se curva para cima. Em (b) ele sobe e se curva para baixo. Em (c) ele desce e se curva para cima. Em (d) ele desce e se curva para baixo.

O Teste da Primeira Derivada para Funções Crescentes e Decrescentes

Que tipos de função possuem derivadas positivas ou negativas? A resposta, segundo o terceiro corolário do Teorema do Valor Médio, é a seguinte: as únicas funções com derivadas positivas são funções crescentes e as únicas funções com derivadas negativas são funções decrescentes.

Definições Função Crescente, Função Decrescente

Seja f uma função definida em um intervalo I. Então,

1. f é **crescente** em I se, para todos os pontos x_1 e x_2 em I, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
2. f é **decrescente** em I se, para todos os pontos x_1 e x_2 em I, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

Corolário 3 Teste da Primeira Derivada para Crescimento e Decrescimento

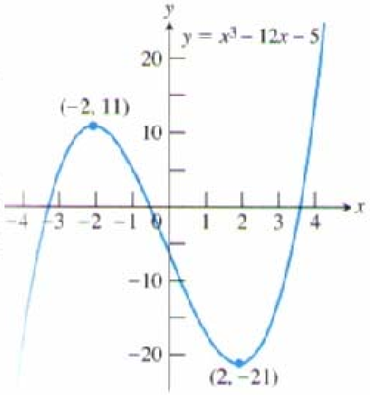
Suponha que f seja contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b).

Se $f' > 0$ em todos os pontos de (a, b), então f é crescente em $[a, b]$.

Se $f' < 0$ em todos os pontos de (a, b), então f é decrescente em $[a, b]$.

Exemplo 1 Usando o Teste da Primeira Derivada para Crescimento e Decrescimento

Determine os pontos críticos de $f(x) = x^3 - 12x - 5$ e identifique os intervalos onde f é crescente e decrescente.



Solução A Figura 3.21 sugere que f possui dois pontos críticos. Como f é contínua e derivável para qualquer número real, os pontos críticos ocorrem apenas nas raízes de f'.

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4)$$
$$= 3(x + 2)(x - 2)$$

As raízes de f' são $x = -2$ e $x = 2$. Elas dividem o eixo x em intervalos conforme o esquema a seguir.

Intervalos	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Sinal de f'	$+$	$-$	$+$
Comportamento de f	crescente	decrescente	crescente

Para determinarmos o sinal de f' em cada intervalo, calculamos o sinal de cada fator no intervalo e 'multiplicamos' os sinais dos fatores para obtermos o sinal de f'. Aplicamos, então, o Corolário 3 para observar que f é crescente em $(-\infty, -2)$, decrescente em $(-2, 2)$ e crescente em $(2, \infty)$.

Saber onde uma função é crescente ou decrescente nos diz como testar a natureza dos valores extremos locais.

O Teste da Primeira Derivada para Extremos Locais

Na Figura 3.22, nos pontos onde f possui valor mínimo, $f' < 0$ imediatamente à esquerda e $f' > 0$ imediatamente à direita (se o ponto é extremo, só há um lado a considerar). Assim, a curva está descendo (os valores estão diminuindo) à esquerda do valor mínimo e subindo (os valores estão aumentando) à sua direita. De maneira similar, nos pontos onde f possui valor máximo, $f' > 0$ imediatamente à esquerda e $f' < 0$ imediatamente à direita. Portanto, a curva está subindo (os valores estão aumentando) à esquerda do valor máximo e descendo (os valores estão diminuindo) à sua direita.

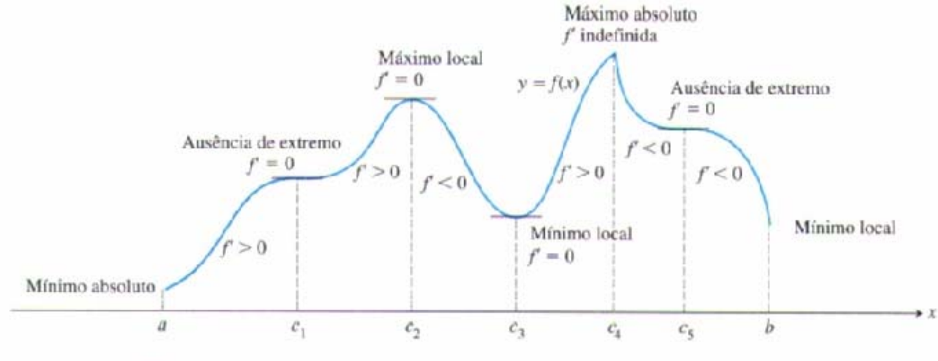


FIGURA 3.22 A primeira derivada de uma função nos diz como a curva sobe ou desce.

Essas observações nos levam a um teste para a presença e para a natureza de valores extremos locais de funções deriváveis.

> **O Teste da Primeira Derivada para Extremos Locais**
>
> Em um ponto crítico $x = c$,
>
> 1. Se f' é negativa à esquerda de c e positiva à direita de c, então f possui um *mínimo local* em c.
> 2. Se f' é positiva à esquerda de c e negativa à direita de c, então f possui um *máximo local* em c.
> 3. Se f' possui o mesmo sinal em ambos os lados de c, então c não é um *extremo local* de f.

O teste para extremos locais nas extremidades do intervalo é semelhante, mas só há um lado a considerar.

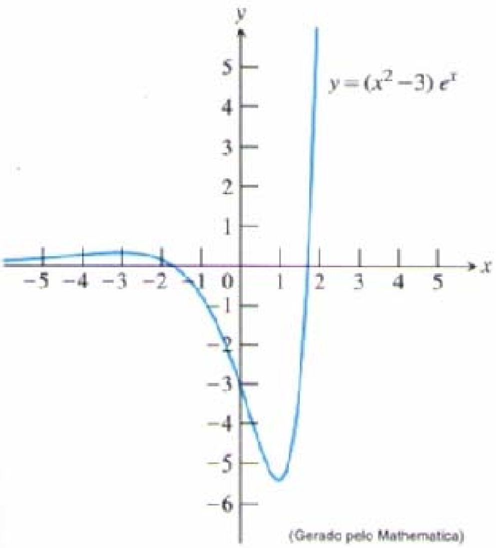


FIGURA 3.23 Gráfico de $f(x) = (x^2 - 3)e^x$ (Exemplo 2).

Exemplo 2 Utilizando o Teste da Primeira Derivada para Extremos Locais

Determine os pontos críticos de

$$f(x) = (x^2 - 3)\,e^x.$$

Identifique os intervalos onde f é crescente e decrescente. Determine os extremos locais e absolutos da função.

Solução Desta vez é um pouco mais difícil ver um dos extremos (Figura 3.23). A função f é contínua e derivável para qualquer número real, então os pontos críticos ocorrem só nas raízes de f'.

Usando a Regra do Produto, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 - 3) \cdot \frac{d}{dx} e^x + \frac{d}{dx}(x^2 - 3) \cdot e^x \\ &= (x^2 - 3) \cdot e^x + (2x) \cdot e^x \\ &= (x^2 + 2x - 3)e^x. \end{aligned}$$

Como e^x nunca é zero, a primeira derivada será zero se e somente se

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 &= 0 \\ (x + 3)(x - 1) &= 0. \end{aligned}$$

As raízes $x = -3$ e $x = 1$ dividem o eixo x em intervalos, a saber:

Intervalos	$x < -3$	$-3 < x < 1$	$1 < x$
Sinal de f'	+	−	+
Comportamento de f	crescente	decrescente	crescente

A partir da tabela podemos ver que há um máximo local (aproximadamente 0,299) para $x = -3$ e um mínimo local (aproximadamente $-5{,}437$) para $x = 1$. O valor mínimo local também é o mínimo absoluto, pois $f(x) > 0$ para $|x| > \sqrt{3}$. Não há máximo absoluto. A função é crescente em $(-\infty, -3)$ e $(1, \infty)$ e decrescente em $(-3, 1)$.

Concavidade

Como você pode ver na Figura 3.24, a função $y = x^3$ é crescente conforme x aumenta, mas as porções definidas nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$ *se curvam* de maneiras distintas. Observando as tangentes a partir da esquerda para a direita, vemos que a inclinação y' da curva diminui no intervalo $(-\infty, 0)$ e aumenta no intervalo $(0, \infty)$. A curva $y = x^3$ é *côncava para baixo* em $(-\infty, 0)$ e *côncava para cima* em $(0, \infty)$. A curva se situa abaixo de suas tangentes quando é côncava para baixo e acima destas quando é côncava para cima.

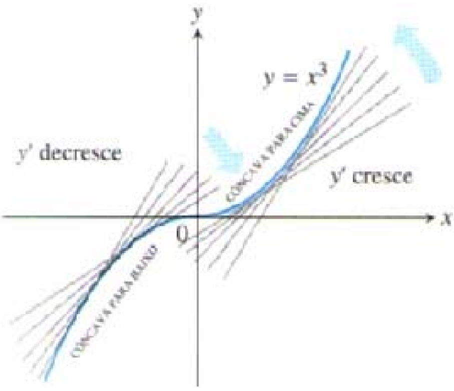


FIGURA 3.24 O gráfico de $f(x) = x^3$ é côncavo para baixo em $(-\infty, 0)$ e côncavo para cima em $(0, \infty)$.

Definição Concavidade

O gráfico de uma função derivável $y = f(x)$ é

(a) **côncavo para cima** em um intervalo aberto I, se y' é crescente em I

(b) **côncavo para baixo** em um intervalo aberto I, se y' é decrescente em I.

Se uma função $y = f(x)$ possui uma segunda derivada, então podemos concluir que y' é crescente se $y'' > 0$ e y' é decrescente se $y'' < 0$.

O Teste da Segunda Derivada para Concavidade

O gráfico de uma função duplamente derivável $y = f(x)$ é

(a) côncavo para cima em qualquer intervalo onde $y'' > 0$

(b) côncavo para baixo em qualquer intervalo onde $y'' < 0$.

Exemplo 3 Aplicando o Teste da Concavidade

A curva $y = x^2$ (Figura 3.25) é côncava para cima em $(-\infty, \infty)$, pois sua segunda derivada $y'' = 2$ é sempre positiva.

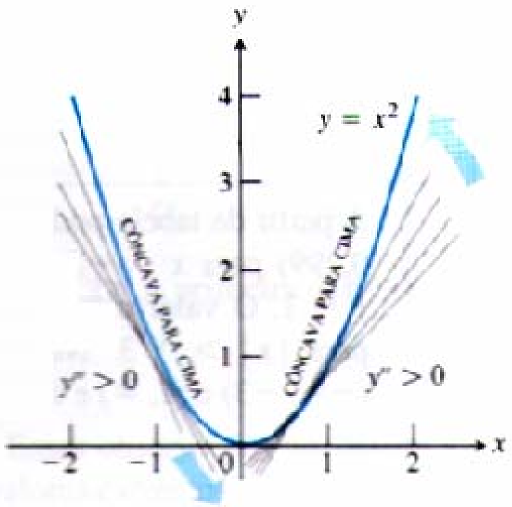


FIGURA 3.25 O gráfico de $f(x) = x^2$ é côncavo para cima em qualquer intervalo.

Exemplo 4 Determinando a Concavidade

Determine a concavidade de $y = 3 + \text{sen}\, x$ em $[0, 2\pi]$.

Solução O gráfico de $y = 3 + \text{sen}\, x$ é côncavo para baixo em $(0, \pi)$, onde $y'' = -\text{sen}\, x$ é negativo e é côncavo para cima em $(\pi, 2\pi)$, onde $y'' = -\text{sen}\, x$ é positivo (Figura 3.26).

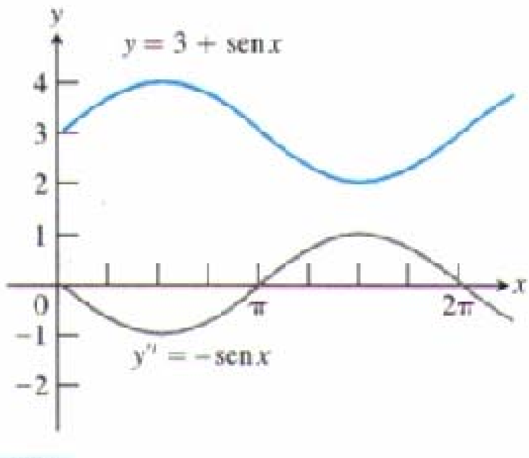


FIGURA 3.26 Usando o gráfico de y'' para determinar a concavidade de y (Exemplo 4).

Pontos de Inflexão

A curva $y = 3 + \text{sen}\, x$ do Exemplo 4 muda de concavidade no ponto $(\pi, 3)$. Denominamos $(\pi, 3)$ um *ponto de inflexão* da curva.

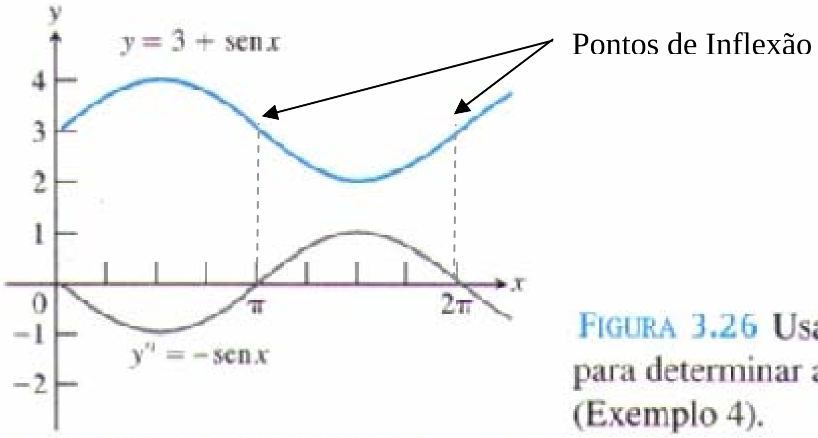


FIGURA 3.26 Usando o gráfico de y'' para determinar a concavidade de y (Exemplo 4).

Definição Ponto de Inflexão

Um ponto onde o gráfico de uma função possui uma reta tangente e onde há mudança de concavidade é um **ponto de inflexão.**

Um ponto em uma curva no qual y'' é positiva de um lado e negativa do outro é um ponto de inflexão. Nesse ponto, y'' é zero (pois as derivadas possuem a Propriedade do Valor Intermediário) ou é indefinida. Se y for uma função duplamente derivável, $y'' = 0$ em um ponto de inflexão e y' possui um máximo ou um mínimo local.

Exemplo 7 Ausência de Ponto de Inflexão Onde $y'' = 0$

A curva $y = x^4$ não possui ponto de inflexão quando $x = 0$ (Figura 3.28). Embora $y'' = 12x^2$ seja zero nesse ponto, não ocorre mudança de sinal.

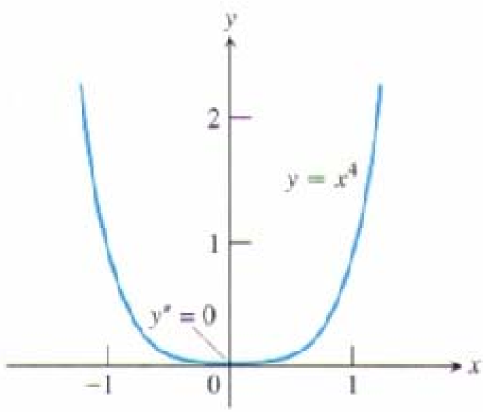


FIGURA 3.28 O gráfico de $y = x^4$ não apresenta ponto de inflexão na origem, embora nesse ponto $y'' = 0$.

Exemplo 8 Determinando o Ponto de Inflexão Onde y'' não Existe

A curva $y = x^{1/3}$ possui ponto de inflexão quando $x = 0$ (Figura 3.29), mas y'' não existe nesse ponto.

$$y'' = \frac{d^2}{dx^2}(x^{1/3}) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^{-2/3}\right) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$$

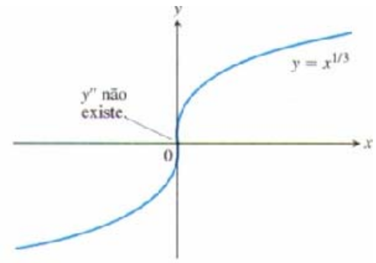


FIGURA 3.29 Um ponto onde não há y'' pode ser um ponto de inflexão.

Podemos ver pelo Exemplo 7 que uma segunda derivada nula nem sempre gera um ponto de inflexão. No Exemplo 8 vimos que um ponto de inflexão também pode ocorrer quando *não há* segunda derivada.

O Teste da Segunda Derivada para Extremos Locais

Em vez de procurarmos a mudança de sinal nos pontos críticos de y', às vezes podemos usar o teste a seguir para determinar a presença de extremos locais.

Teorema 5 O Teste da Segunda Derivada para Extremos Locais

1. Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f possui um máximo local quando $x = c$.
2. Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f possui um mínimo local quando $x = c$.

Esse teste exige que conheçamos f'' *apenas em* c, e não em um intervalo em torno de c. Isso torna o teste fácil de aplicar. Essa é a boa notícia. A má notícia é que o teste não funciona quando $f''(c) = 0$ ou $f''(c)$ não existe. Quando isso ocorre, deve-se voltar ao teste da primeira derivada para extremos locais.

Exemplo 9 Usando o Teste da Segunda Derivada

Determine os extremos de $f(x) = x^3 - 12x - 5$.

Solução Temos que

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4)$$
$$f''(x) = 6x.$$

Testando os pontos críticos $x = \pm 2$ (não há extremidades), temos que

$$f''(-2) = -12 < 0 \Rightarrow f \text{ possui um máximo local quando } x = -2$$

e

$$f''(2) = 12 > 0 \Rightarrow f \text{ possui um mínimo local quando } x = 2.$$

Exemplo 10 Utilizando f' e f'' para Esboçar o Gráfico de f

Esboce o gráfico da função

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$$

seguindo os passos:

(a) Identifique onde os extremos de f ocorrem.

(b) Determine os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente.

(c) Determine onde o gráfico de f é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo.

(d) Esboce um possível gráfico de f.

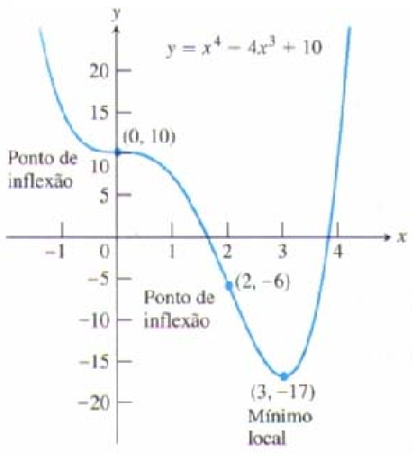


FIGURA 3.30 Gráfico de $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ (Exemplo 10).

Solução f é contínua, pois $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ existe. O domínio de f' é $(-\infty, \infty)$, portanto o domínio de f também é $(-\infty, \infty)$. Assim, os pontos críticos de f ocorrem só nas raízes de f'. Uma vez que $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$, a primeira derivada é zero quando $x = 0$ e $x = 3$.

Intervalos	$x < 0$	$0 < x < 3$	$3 < x$
Sinal de f'	−	−	+
Comportamento de f	decrescente	decrescente	crescente

(a) Usando o teste da primeira derivada para extremos locais e a tabela acima, podemos ver que não há extremo quando $x = 0$ e que há um mínimo local quando $x = 3$.

(b) Usando a tabela acima, podemos ver que f é decrescente em $(-\infty, 0]$ e $[0, 3]$ e crescente em $[3, \infty)$.

(c) $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$ é zero quando $x = 0$ e $x = 2$.

Intervalos	$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x$
Sinal de f''	+	−	+
Comportamento de f	côncava para cima	côncava para baixo	côncava para cima

Podemos ver que f é côncava para cima nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(2, \infty)$ e côncava para baixo em $(0, 2)$.

(d) Resumindo as informações apresentadas nas duas tabelas, obtemos

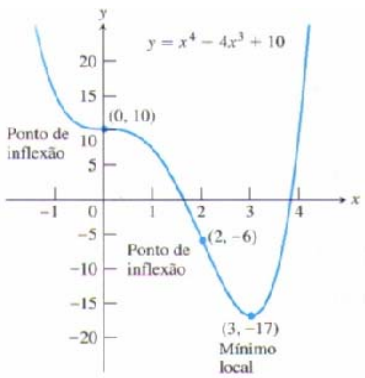


FIGURA 3.30 Gráfico de $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ (Exemplo 10).

$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < 3$	$3 < x$
decrescente	decrescente	decrescente	crescente
côncava para cima	côncava para baixo	côncava para cima	côncava para cima

Procedimento para Traçar o Gráfico de y = f(x) Manualmente

Passo 1. Determine y' e y''.

Passo 2. Determine a subida e a descida da curva.

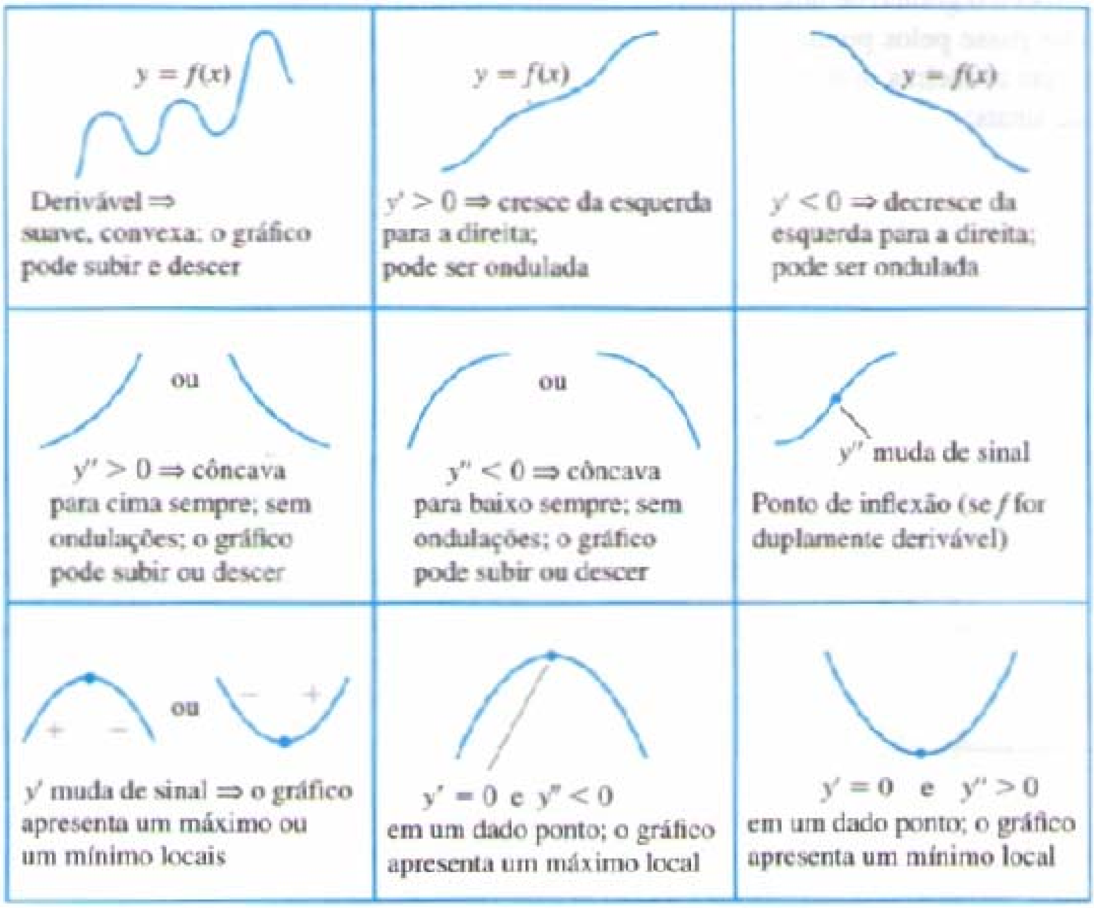
Passo 3. Determine a concavidade da curva.

Passo 4. Faça um resumo e apresente a forma geral da curva.

Passo 5. Coloque pontos específicos no gráfico e esboce a curva.

Aprendendo sobre Funções a partir das Derivadas

Como vimos no Exemplo 10, podemos saber quase tudo que precisamos saber sobre uma função duplamente derivável $y = f(x)$ examinando sua primeira derivada. Podemos saber onde o gráfico da função sobe ou desce e onde esta admite quaisquer extremos locais. Podemos derivar y' para saber como o gráfico se curva quando passa pelos intervalos de subida e de descida. Podemos determinar a forma do gráfico da função. A única informação que não conseguimos obter a partir da derivada é como colocar o gráfico no plano cartesiano. Mas, conforme descobrimos na Seção 3.2, a única informação adicional de que necessitamos para situar o gráfico é o valor de f em um ponto.



Exercícios propostos.

Esboçando y a partir dos Sinais de y′ e y″

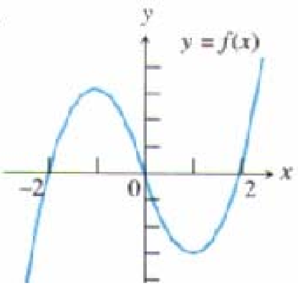
5. Esboce o gráfico da função duplamente derivável $y = f(x)$ a partir das propriedades dadas a seguir. Quando for possível, indique as coordenadas.

x	y	Derivadas
$x < 2$		$y' < 0,\quad y'' < 0$
2	1	$y' = 0,\quad y'' < 0$
$2 < x < 4$		$y' < 0,\quad y'' < 0$
4	4	$y' > 0,\quad y'' = 0$
$4 < x < 6$		$y' > 0,\quad y'' < 0$
6	7	$y' = 0,\quad y'' < 0$
$x > 6$		$y' < 0,\quad y'' < 0$

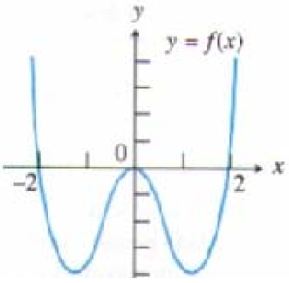
Utilizando Gráficos para Analisar Funções

Nos exercícios 7 e 8, use o gráfico da função f para estimar onde **(a)** f' e **(b)** f'' são 0, positivas e negativas.

7.



8.



Forma de um Gráfico

Nos exercícios 17–22, use métodos analíticos para determinar os intervalos onde a função é:

(a) crescente

(b) decrescente

(c) côncava para cima

(d) côncava para baixo.

Localize e identifique, se houver,

(e) extremos locais

(f) pontos de inflexão.

17. $y = x^2 - x - 1$

18. $y = -2x^3 + 6x^2 - 3$

19. $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$

20. $y = xe^{1/x}$

21. $y = x\sqrt{8 - x^2}$

22. $y = \begin{cases} 3 - x^2, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

Deslocamento sobre uma Reta

Nos exercícios 43–46, uma partícula se desloca sobre uma reta obedecendo à função posição $s(t)$. Determine **(a)** a velocidade e **(b)** a aceleração e **(c)** descreva o movimento da partícula para $t \geq 0$.

43. $s(t) = t^2 - 4t + 3$

44. $s(t) = 6 - 2t - t^2$

45. $s(t) = t^3 - 3t + 3$

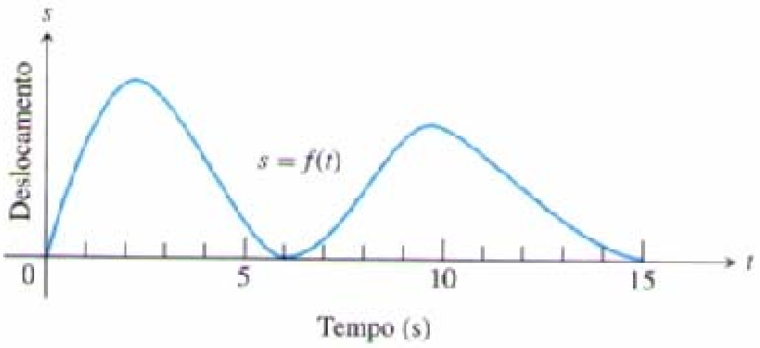
46. $s(t) = 3t^2 - 2t^3$

Nos exercícios 47 e 48, é dado o gráfico da função posição $y = s(t)$ de uma partícula que se desloca sobre uma reta. Em que instantes, aproximadamente, a partícula apresenta

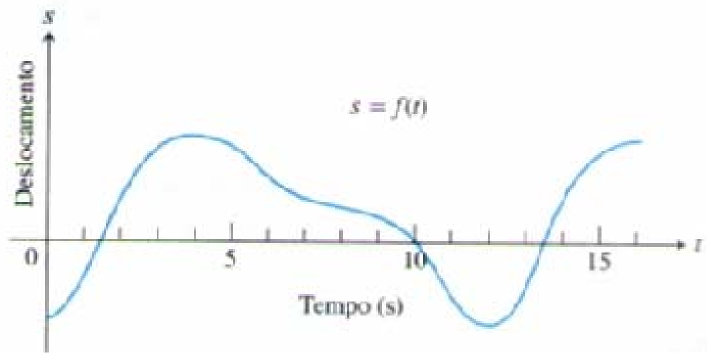
(a) velocidade igual a zero?

(b) aceleração igual a zero?

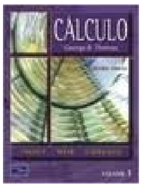
47.



48.



Livro texto:



Thomas G. B., Finney R. L., Weir M. D., Giordano F. R., Cálculo, Vol. 1, Editora Pearson, Ed. 10 ou 11 – Addison Wesley, São Paulo.

Estudar os exercícios resolvidos sobre derivadas nos endereço eletrônicos abaixo:
http://www.mtm.ufsc.br/~azeredo/calculos/Acalculo/index.html
http://www1.univap.br/~spilling