Cálculo Diferencial e Integral I

Faculdade de Engenharia, Arquiteturas e Urbanismo – FEAU

Prof. Dr. Sergio Pilling

UNIVERSIDADE DO VALE DO PARAÍBA
São José dos Campos - SP

Parte 2 - Derivadas (3ª cont.)
Linearização e diferenciais

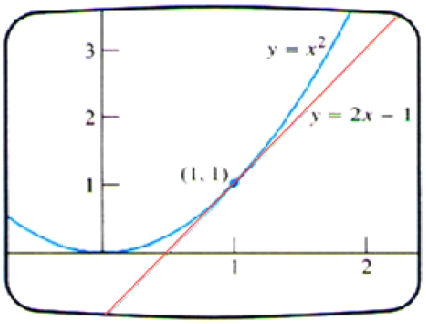
1) Introdução.

Às vezes podemos aproximar funções complicadas usando funções mais simples que fornecem a precisão desejada para aplicações específicas, além de serem mais fáceis de trabalhar. As funções de aproximação discutidas nesta seção são denominadas *linearizações* e se baseiam em retas tangentes.

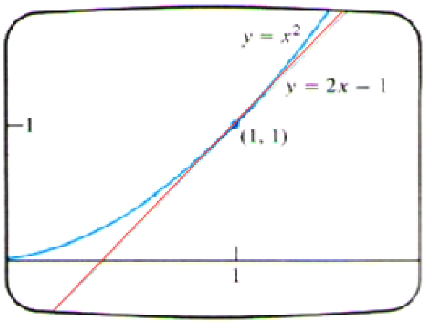
Introduzimos novas variáveis dx e dy e as definimos de um modo que dê novo sentido à notação de Leibniz dy/dx. Usaremos dy para estimar o erro da medida e a sensibilidade de uma função à variação.

2) Linearização.

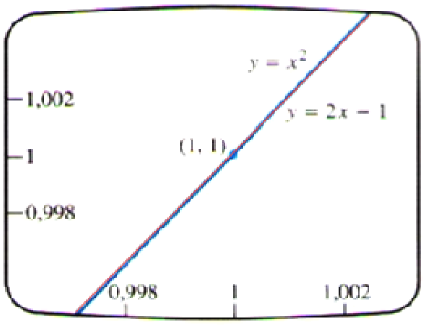
Como você pode ver na Figura 3.54, a tangente à curva $y = x^2$ fica perto da curva próximo ao ponto de tangência. Em um pequeno intervalo, de cada lado do ponto, os valores de y ao longo da tangente fornecem uma boa aproximação para os valores de y na curva. Observamos esse fenômeno ampliando os dois gráficos no ponto de tangência ou analisando as tabelas com valores da diferença entre $f(x)$ e sua reta tangente próximo à abscissa do ponto de tangência. Localmente, toda curva se comporta como uma reta.



$y = x^2$ e sua tangente $y = 2x - 1$ em (1, 1).



A tangente e a curva bem próximas, perto de (1, 1).



A tangente e a curva ainda mais próximas. A tela do computador não consegue distinguir a tangente da curva nesse intervalo de x.

FIGURA 3.54 Quanto mais ampliamos o gráfico de uma função próximo a um ponto onde a função é derivável, mais 'reto' o gráfico se torna e mais ele se assemelha à sua tangente.

Em geral, a tangente a $y = f(x)$ no ponto $x = a$, onde f é derivável (Fi
3.55) passa pelo ponto $(a, f(a))$, então sua equação é

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Assim, a reta tangente é o gráfico da função linear

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Enquanto a reta permanecer próximo ao gráfico de f, $L(x)$ fornecerá uma
aproximação de $f(x)$.

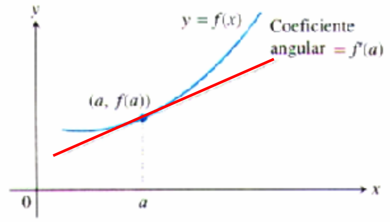


FIGURA 3.55 A tangente à curva $y = f(x)$ em $x = a$ é a reta $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Definição Linearização

Se f é derivável em $x = a$, então a função aproximação

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \quad (1)$$

é a **linearização** de f em a.

Obs. Essa é a equação da **reta tangente** a função f(x) no ponto x=a.

A aproximação $f(x) \approx L(x)$ é a **aproximação linear padrão** de f em a. O ponto $x = a$ é o **centro** da aproximação.

Exemplo 1 Determinando uma Linearização

Determine a linearização de $f(x) = \sqrt{1 + x}$ quando $x = 0$ (Figura 3.56).

Solução Como

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 + x)^{-1/2},$$

temos que $f(0) = 1$, $f'(0) = 1/2$ e

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 1 + \frac{1}{2}(x - 0) = 1 + \frac{x}{2}.$$

Veja a Figura 3.56.

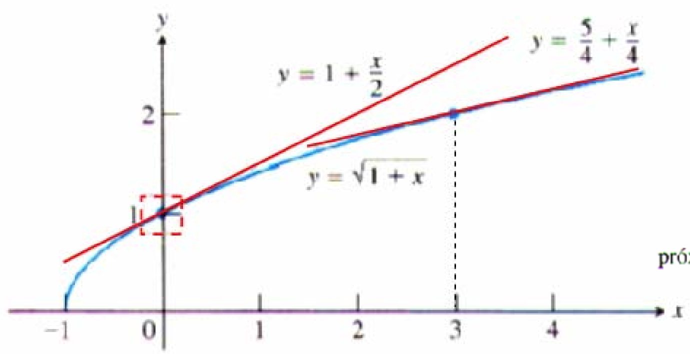


FIGURA 3.56 O gráfico de $y = \sqrt{1 + x}$ e sua linearização quando $x = 0$ e $x = 3$. A Figura 3.57 apresenta uma vista ampliada na região destacada ao redor de 1, no eixo y.

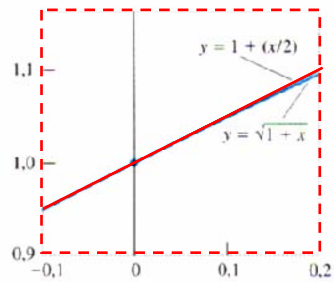


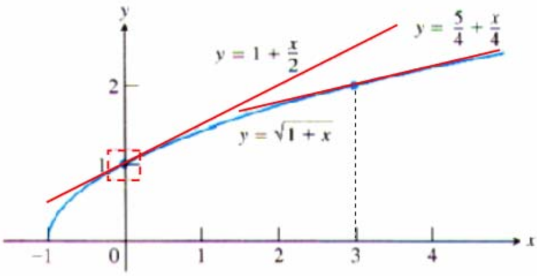
FIGURA 3.57 Vista ampliada da janela da Figura 3.56.

Veja como a aproximação $\sqrt{1 + x} \approx 1 + (x/2)$ é precisa para valores de x próximos de zero.

Obs. O processo de linearização só da uma boa aproximação da função para a vizinhança do ponto considerado. Isso ficará ainda mais evidente no exemplo a seguir:

Exemplo 2 Determinando uma Segunda Linearização

Determine a linearização de $f(x) = \sqrt{1+x}$ quando $x = 3$.



Solução Calculamos a equação (1) para f em $a = 3$. Com

$$f(3) = 2, \qquad f'(3) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}\Big|_{x=3} = \frac{1}{4},$$

Temos que

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-3) = \frac{5}{4} + \frac{x}{4}.$$

Quando $x = 3{,}2$, a linearização do Exemplo 2 fornece

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3{,}2} \approx \frac{5}{4} + \frac{3{,}2}{4} = 1{,}250 + 0{,}800 = 2{,}050,$$

que difere do valor real $\sqrt{4{,}2} \approx 2{,}04939$ em menos de um milésimo. A linearização do Exemplo 1 fornece

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3{,}2} \approx 1 + \frac{3{,}2}{2} = 1 + 1{,}6 = 2{,}6,$$

um resultado que está errado em mais de 25%.

Exemplo 5 Determinando uma Linearização para função cosseno

Determine a linearização de $f(x) = \cos x$ quando $x = \pi/2$ (Figura 3.58).

Solução Como $f(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$, $f'(x) = -\operatorname{sen} x$ e $f'(\pi/2) = -\operatorname{sen}(\pi/2) = -1$, temos que

$$\begin{aligned} L(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) \\ &= 0 + (-1)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -x + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

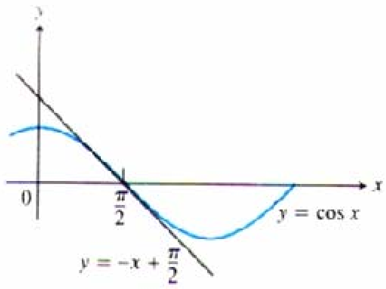


FIGURA 3.58 O gráfico de $f(x) = \cos x$ e sua linearização quando $x = \pi/2$. Próximo de $x = \pi/2$, $\cos x \approx -x + (\pi/2)$ (Exemplo 5).

Aproximações lineares comuns em x ≈ 0

$\operatorname{sen} x \approx x$	$e^x \approx 1 + x$
$\cos x \approx 1$	$\ln(1+x) \approx x$
$\operatorname{tg} x \approx x$	$(1+x)^k \approx 1 + kx$

Exemplo 3 Determinando Raízes e Potências

A aproximação linear mais importante para raízes e potências é

$$\boxed{(1 + x)^k \approx 1 + kx} \qquad (x \text{ próximo de } 0, \text{ sendo } k \text{ qualquer número})$$

Essa aproximação, boa para valores de x suficientemente próximos de zero, tem uma vasta aplicação.

Exemplo 4 Aplicando o Exemplo 3

As aproximações a seguir são conseqüências do Exemplo 3.

$$\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \qquad k = 1/2$$

$$\frac{1}{1 - x} = (1 - x)^{-1} \approx 1 + (-1)(-x) = 1 + x \qquad k = -1; \text{ substituindo } x \text{ por } -x.$$

$$\sqrt[3]{1 + 5x^4} = (1 + 5x^4)^{1/3} \approx 1 + \frac{1}{3}(5x^4) = 1 + \frac{5}{3}x^4 \qquad k = 1/3, \text{ substituindo } x \text{ por } 5x^4.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 - x^2)^{-1/2} \approx 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) = 1 + \frac{1}{2}x^2 \qquad k = -1/2; \text{ substituindo } x \text{ por } -x^2.$$

Exercícios propostos.

1. Determine a linearização L(x) de f(x) quando x= a para as funcoes abaixo:

1. $f(x) = x^3 - 2x + 3, \quad a = 2$

2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}, \quad a = -4$

3. $f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad a = 1$

4. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad a = -8$

5. $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad a = \pi$

2. Utilize a aproximação linear $(1 + x)^k \approx 1 + kx$ para determinar uma aproximação da função $f(x)$ para valores de x próximos de zero.

(a) $f(x) = (1 - x)^6$

(b) $f(x) = \dfrac{2}{1 - x}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x}}$

(d) $f(x) = \sqrt{2 + x^2}$

3) Diferenciação

Às vezes usamos a notação dy/dx para representar a derivada y' de y em relação a x. Ao contrário do que aparenta, não é uma razão. Agora introduziremos duas novas varáveis dx e dy com a propriedade de que, caso a razão exista, esta será igual à derivada.

Definição Diferenciais

Seja $y = f(x)$ uma função derivável. A **diferencial dx** é uma variável independente. A **diferencial dy** é

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Ao contrário da variável independente dx, a variável dy é sempre dependente. Ela depende tanto de x quanto de dx.

Exemplo 6 Determinando a Diferencial dy

Determine dy se

(a) $y = x^5 + 37x$

(b) $y = \text{sen } 3x$.

Solução

(a) $dy = (5x^4 + 37)\,dx$ **(b)** $dy = (3 \cos 3x)\,dx$

Se $dx \neq 0$, então o quociente da diferencial dy pela diferencial dx é igual à derivada $f'(x)$, pois

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)\,dx}{dx} = f'(x).$$

Às vezes escrevemos

$$df = f'(x)\,dx,$$

em vez de $dy = f'(x)\,dx$, denominando df a **diferencial de** f. Por exemplo, se $f(x) = 3x^2 - 6$, então

$$df = d(3x^2 - 6) = 6x\,dx.$$

Toda fórmula de diferenciação do tipo

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \qquad \text{ou} \qquad \frac{d(\text{sen } u)}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

tem uma forma diferencial do tipo

$$d(u+v) = du + dv \qquad \text{ou} \qquad d(\text{sen } u) = \cos u\,du.$$

Exemplo 7 Determinando Diferenciais de Funções

(a) $d(\text{tg } 2x) = \sec^2(2x)\,d(2x) = 2\sec^2 2x\,dx$

(b) $d\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{(x+1)\,dx - x\,d(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x\,dx + dx - x\,dx}{(x+1)^2} = \frac{dx}{(x+1)^2}$

2.1) Estimando variações com Diferenciais

Suponha que saibamos o valor de uma função derivável $f(x)$ em um ponto a e que desejamos prever a variação que esse valor sofrerá se formos para um ponto $a + dx$ próximo. Se dx for pequeno, f e sua linearização L em a irão variar praticamente na mesma quantidade (Figura 3.59). Como os valores de L são mais simples de calcular, o cálculo da variação de L nos oferece um modo prático de estimar a variação em f.

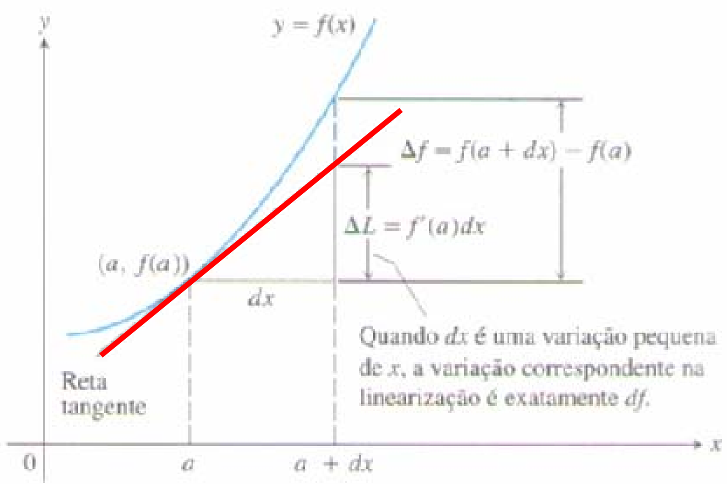


FIGURA 3.59 Aproximando a variação na função f pela variação na linearização de f.

Na notação da Figura 3.59, a variação em f é

$$\Delta f = f(a + dx) - f(a).$$

A variação correspondente em L é

$$\begin{aligned}\Delta L &= L(a + dx) - L(a)\\ &= \underbrace{f(a) + f'(a)[(a + dx) - a]}_{L(a + dx)} - \underbrace{f(a)}_{L(a)}\\ &= f'(a)\,dx.\end{aligned}$$

Assim, a diferencial $df = f'(x)dx$ possui uma interpretação geométrica: o valor de df quando $x = a$ é ΔL, a variação da linearização de f correspondente à variação dx.

Estimativa de Variação com Diferenciais

Seja $f(x)$ derivável quando $x = a$. A variação aproximada do valor de f quando x varia de a para $a + dx$ é

$$df = f'(a)\,dx.$$

Exemplo 8 Estimando a Variação com Diferenciais

O raio r de uma circunferência aumenta de $a = 10$ m para 10,1 m (Figura 3.60). Utilize dA para estimar o aumento na área A da circunferência. Compare essa estimativa com a variação ΔA.

Solução Como $A = \pi r^2$, o aumento estimado é

$$dA = A'(a)\,dr = 2\pi a\,dr = 2\pi(10)(0{,}1) = 2\pi \text{ m}^2.$$

A verdadeira variação é

$$\Delta A = \pi(10{,}1)^2 - \pi(10)^2 = (102{,}01 - 100)\pi = (\underbrace{2\pi}_{dA} + \underbrace{0{,}01\pi}_{\text{erro}}) \text{ m}^2.$$

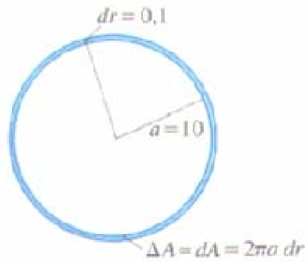


FIGURA 3.60 Quando dr é pequeno em comparação com a, como é o caso quando $dr = 0{,}1$ e $a = 10$, a diferencial $dA = 2\pi a\,dr$ dá uma boa aproximação de ΔA (Exemplo 8).

Variações Absoluta, Relativa e Percentual

Conforme nos deslocamos de a para um ponto $a + dx$ próximo, podemos descrever a variação de f de três maneiras:

	Real	**Estimada**
Variação absoluta	$\Delta f = f(a + dx) - f(a)$	$df = f'(a)\,dx$
Variação relativa	$\dfrac{\Delta f}{f(a)}$	$\dfrac{df}{f(a)}$
Variação percentual	$\dfrac{\Delta f}{f(a)} \times 100$	$\dfrac{df}{f(a)} \times 100$

Exemplo 9 Computando a Variação Percentual

A variação percentual estimada para a área da circunferência do Exemplo 8 é

$$\frac{dA}{A(a)} \times 100 = \frac{2\pi}{100\pi} \times 100 = 2\%.$$

A porcentagem real é

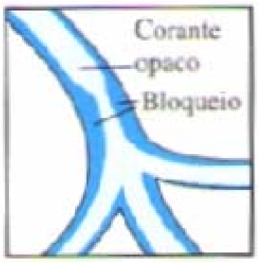
$$\frac{\Delta A}{A(a)} \times 100 = \frac{2{,}01\pi}{100\pi} \times 100 = 2{,}01\%.$$

Exemplo 10 **Desobstruindo Artérias**

No final da década de 1830, o fisiologista francês Jean Poiseuille descobriu a fórmula que hoje empregamos para predizer o quanto o raio de uma artéria obstruída necessita ser expandido para que o fluxo normal de sangue seja restabelecido. Sua fórmula,

$$V = kr^4,$$

diz que o volume V de líquido correndo por um pequeno vaso ou tubo por unidade de tempo, sob pressão constante, é uma constante multiplicada pela quarta potência do raio r do duto. Como é que um aumento de 10% em r afeta V?



Angiografia

Um corante opaco é injetado em uma artéria parcialmente obstruída para tornar o interior visível aos raios X. Isso revela a localização e a gravidade da obstrução.

Angioplastia

Um cateter com um balão na extremidade é inflado no interior da artéria para alargá-la no local da obstrução.

Solução As diferenciais de r e V estão relacionadas pela equação

$$dV = \frac{dV}{dr}\,dr = 4kr^3\,dr.$$

A variação relativa de V é

$$\frac{dV}{V} = \frac{4kr^3\,dr}{kr^4} = 4\frac{dr}{r}.$$

A variação relativa de V é 4 vezes a variação relativa de r, portanto um aumento de 10% em r acarretará um aumento de 40% no fluxo.

Sensibilidade à Variação

A equação $df = f'(x)\,dx$ nos mostra o quanto o valor de f é sensível a uma variação de x, para diferentes valores de x. Quanto maior o valor de f' em x, maior é o efeito de uma determinada variação dx.

Exemplo 11 Determinando a Profundidade de um Poço

Você deseja calcular a profundidade de um poço a partir da equação $s = 16t^2$ determinando quanto tempo leva para uma pedra pesada que você derruba da entrada do poço encontrar a água no fundo deste. Qual será a sensibilidade de seus cálculos a um erro de 0,1 s na medição do tempo?

Solução O tamanho de ds na equação

$$ds = 9{,}8t\,dt$$

depende do tamanho de t. Se $t = 2$ s, o erro causado por $dt = 0{,}1$ s é apenas

$$ds = 9{,}8(2)(0{,}1) = 1{,}9 \text{ m}.$$

Três segundos depois, quando $t = 5$ s, o erro causado pela mesma dt é

$$ds = 9{,}8(5)(0{,}1) = 4{,}9 \text{ m}.$$

Exercícios propostos

Derivadas na Forma Diferencial

Nos exercícios 15–24 determine dy.

15. $y = x^3 - 3\sqrt{x}$

16. $y = x\sqrt{1 - x^2}$

17. $y = x^2 \ln x$

18. $y = \dfrac{2\sqrt{x}}{3(1 + \sqrt{x})}$

19. $2y^{3/2} + xy - x = 0$

20. $xy^2 - 4x^{3/2} - y = 0$

21. $y = e^{\operatorname{sen} x}$

22. $y = \cos(x^2)$

23. $y = xe^x$

24. $y = \sec(x^2 - 1)$

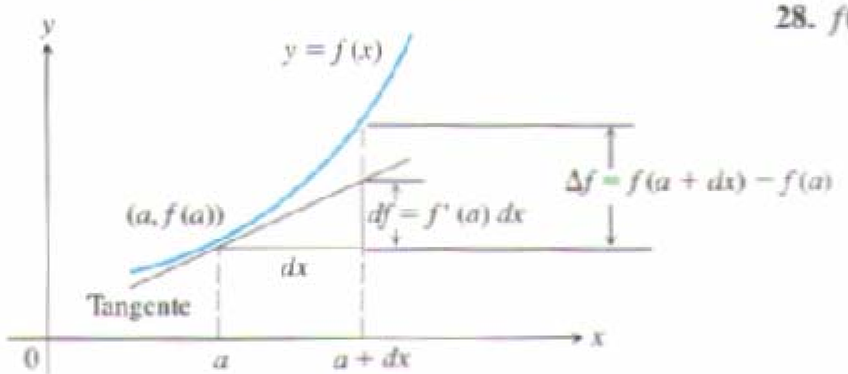
Erro de Aproximação

Nos exercícios 25–28, a função f varia quando x varia de a para $a + dx$. Determine

(a) a variação absoluta $\Delta f = f(a + dx) - f(a)$

(b) a variação estimada $df = f'(a)\,dx$

(c) o erro de aproximação $|\Delta f - df|$.



25. $f(x) = x^2 + 2x, \quad a = 0, \quad dx = 0{,}1$

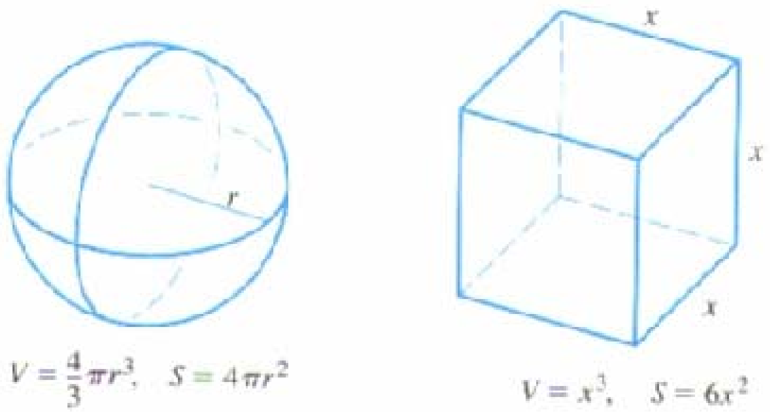
26. $f(x) = x^3 - x, \quad a = 1, \quad dx = 0{,}1$

27. $f(x) = x^{-1}, \quad a = 0{,}5, \quad dx = 0{,}05$

28. $f(x) = x^4, \quad a = 1, \quad dx = 0{,}01$

Nos exercícios 29–32, escreva a equação diferencial que permita estimar a variação dada do volume ou da área da superfície.

29. *Volume* A variação do volume $V = (4/3)\pi r^3$ de uma esfera quando o raio varia de a para $a + dr$.

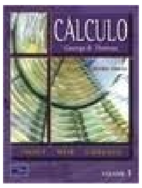


30. *Área da superfície* A variação da área da superfície $S = 4\pi r^2$ de uma esfera quando o raio varia de a para $a + dr$.

31. *Volume* A variação do volume $V = x^3$ de um cubo quando o comprimento das arestas varia de a para $a + dx$.

32. *Área da superfície* A variação na área da superfície $S = 6x^2$ de um cubo quando o comprimento das arestas varia de a para $a + dx$.

Livro texto:



Thomas G. B., Finney R. L., Weir M. D., Giordano F. R., Cálculo, Vol. 1, Editora Pearson, Ed. 10 ou 11 – Addison Wesley, São Paulo.

Estudar os exercícios resolvidos sobre derivadas nos endereço eletrônicos abaixo:
http://www.mtm.ufsc.br/~azeredo/calculos/Acalculo/index.html
http://www1.univap.br/~spilling