Cálculo Diferencial e Integral I

Faculdade de Engenharia, Arquiteturas e Urbanismo – FEAU

Prof. Dr. Sergio Pilling

UNIVERSIDADE DO VALE DO PARAÍBA
São José dos Campos - SP

Parte 2 - Derivadas (2ª cont.)
Teorema de L´Hopital, Derivadas de funções inversas, exponenciais e logarítmicas.

1) Teorema de L´Hôpital (solucionando lim 0/0, lim ∞/∞, lim ∞ . 0, lim ∞-∞)

John Bernoulli descobriu uma regra para calcular limites de frações cujos numeradores e denominadores tendem a zero ou a $+\infty$. A regra é conhecida atualmente como **regra de L'Hôpital**, em homenagem a Guillaume de L'Hôpital, um nobre francês que escreveu o primeiro texto introdutório de cálculo diferencial, em que a regra foi impressa pela primeira vez.

Teorema 6 Regra de L'Hôpital (primeira forma)
Suponha que $f(a) = g(a) = 0$, que $f'(a)$ e $g'(a)$ existam e que $g'(a) \neq 0$. Então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

EXEMPLO 1 Usando a regra de L'Hôpital

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{3x - \operatorname{sen} x}{x} = \left.\frac{3 - \cos x}{1}\right|_{x=0} = 2$$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \left.\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1}\right|_{x=0} = \frac{1}{2}$$

Às vezes, após a derivação, o denominador e o numerador novos são iguais a zero em $x = a$, como vemos no Exemplo 2. Nesses casos, aplicamos uma forma mais forte da regra de L'Hôpital.

Teorema 7 Regra de L'Hôpital (forma mais forte)
Suponha que $f(a) = g(a) = 0$, que f e g sejam deriváveis em um intervalo aberto I contendo a e que $g'(x) \neq 0$ em I se $x \neq a$. Então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

desde que exista o limite no lado direito da igualdade.

EXEMPLO 2 Aplicando a forma mais avançada de L'Hôpital

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - x/2}{x^2}$ $\qquad \frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{(1/2)(1+x)^{-1/2} - 1/2}{2x}$ $\qquad$ Ainda $\frac{0}{0}$; derive outra vez.

$= \lim_{x\to 0} \frac{-(1/4)(1+x)^{-3/2}}{2} = -\frac{1}{8}$ $\qquad$ Não mais $\frac{0}{0}$; o limite é encontrado.

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$ $\qquad \frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$ $\qquad$ Ainda $\frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{6x}$ $\qquad$ Ainda $\frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$ $\qquad$ Não mais $\frac{0}{0}$; o limite é encontrado.

Usando a regra de L'Hôpital

Para determinar

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

pela regra de L'Hôpital, continuamos derivando f e g até obter a forma 0/0 em $x = a$. Mas, assim que uma ou outra dessas derivadas for diferente de zero em $x = 0$, paramos de derivar. A regra de L'Hôpital não se aplica quando o numerador ou o denominador apresentam um limite finito diferente de zero.

EXEMPLO 3 Aplicando incorretamente a forma mais forte da regra de L'Hôpital

$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2}$ $\qquad \frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + 2x} = \frac{0}{1} = 0$ $\qquad$ Não mais $\frac{0}{0}$; o limite é encontrado.

Até agora o cálculo está correto, mas, se continuarmos a derivar na tentativa de aplicar a regra de L'Hôpital mais uma vez, teremos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

o que está errado. A regra de L'Hôpital só pode ser aplicada a limites que resultam em formas indeterminadas, e 0/1 não é uma forma indeterminada.

EXEMPLO 3 Aplicando incorretamente a forma mais forte da regra de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + 2x} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \text{Não mais } \frac{0}{0}\text{; o limite é encontrado.}$$

Até agora o cálculo está correto, mas, se continuarmos a derivar na tentativa de aplicar a regra de L'Hôpital mais uma vez, teremos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

o que está errado. A regra de L'Hôpital só pode ser aplicada a limites que resultam em formas indeterminadas, e 0/1 não é uma forma indeterminada.

A regra de L'Hôpital também se aplica a limites laterais, como fica evidente na prova do Teorema 7.

EXEMPLO 4 Usando a regra de L'Hôpital para limites laterais

(a) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{2x} = \infty \qquad \text{Positivo para } x > 0.$$

(b) $$\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{2x} = -\infty \qquad \text{Negativo para } x < 0.$$

Em livros mais avançados, prova-se que a regra de L'Hôpital aplica-se a forma indeterminada ∞/∞, assim como a 0/0. Se $f(x) \to \pm\infty$ e $g(x) \to \pm\infty$ quando $x \to a$, então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

desde que o último limite exista. Na notação $x \to a$, o a pode ser finito ou infinito. Além disso, $x \to a$ pode ser substituído pelos limites laterais $x \to a^+$ ou $x \to a^-$.

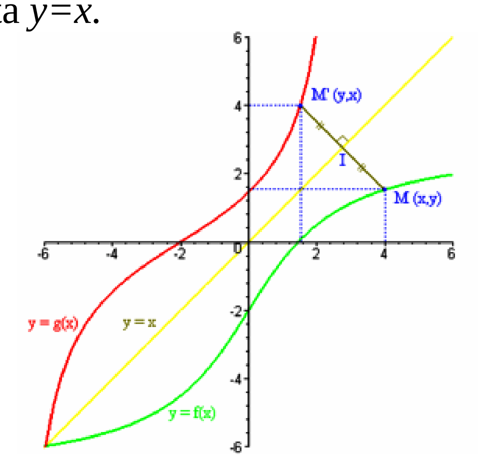
Exercício 1

Aplique a regra de l´Hôpital para calcular o limites abaixo:

1. $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$
2. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 5x}{x}$
3. $\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2-3x}{7x^2+1}$
4. $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{4x^3-x-3}$
5. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$
6. $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+3x}{x^3+x+1}$
7. $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$
8. $\lim_{x \to -5} \frac{x^2-25}{x+5}$

2) Derivadas de Funções inversas

A função inversa *g(x)* de uma função real de variável real *f(x)* obtem-se de *f(x)* por uma simetria em realção a reta *y=x*.



Nesta seção aprenderemos que quando uma função derivável tem uma função inversa esta também será derivável. Usaremos esse resultado para encontrar formulas para as derivadas das funções trigonométricas inversas.

Seja duas funções *y=f(x)* e sua inversa $1/y = y^{-1} = 1/f(x) = f^{-1}(x)$. Se o coeficiente angular da reta tangente um dado ponto a na função y é m o coeficiente angular da reta tangente do mesmo ponto a na função y^{-1} é o recíproco 1/m.

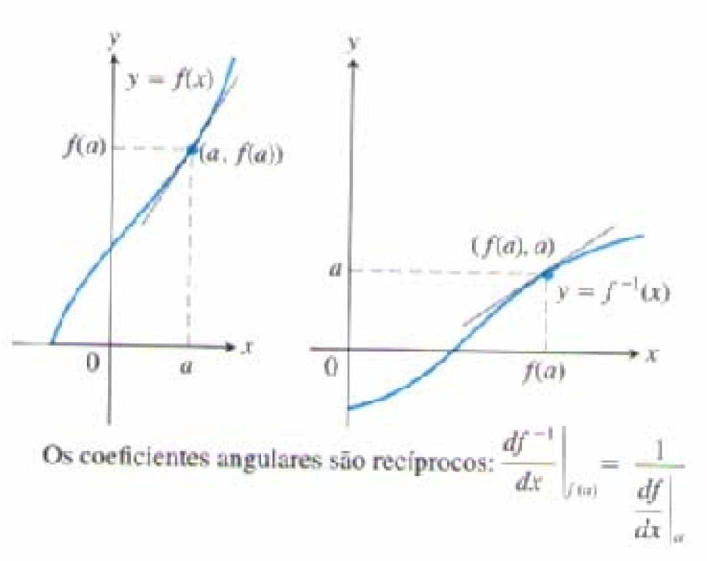


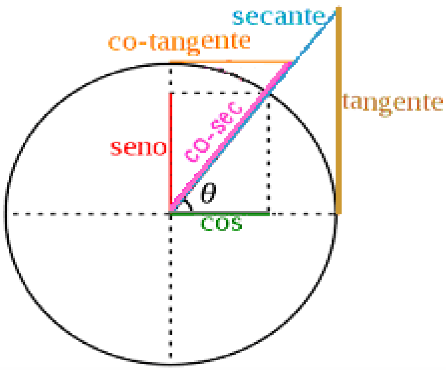
FIGURA 2.48 Os gráficos das funções inversas têm coeficientes angulares recíprocos em pontos correspondentes.

Teorema 5 Derivadas de Funções Inversas

Se f é diferenciável em todo ponto de um intervalo I e df/dx nunca é zero em I, então f tem uma inversa e f^{-1} é diferenciável em todo ponto do intervalo $f(I)$.

2.1) Funções trigonométricas inversas.

Em matemática, as funções trigonométricas inversas são as inversas das funções trigonométricas. Algumas vezes são chamadas de **função de arco**, pois retornam o arco correspondente a certa função trigonométrica.



Função	Abreviatura	Identidade trigonométrica
Seno	sen (ou sin)	$\sin\theta \equiv \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \equiv \frac{1}{\csc\theta}$
Co-seno	cos	$\cos\theta \equiv \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \equiv \frac{1}{\sec\theta}$
Tangente	tan (ou tg)	$\tan\theta \equiv \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \equiv \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \equiv \frac{1}{\cot\theta}$
Co-secante	csc (ou cosec)	$\csc\theta \equiv \sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \equiv \frac{1}{\sin\theta}$
Secante	sec	$\sec\theta \equiv \csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \equiv \frac{1}{\cos\theta}$
Co-tangente	cot (ou ctg ou ctn)	$\cot\theta \equiv \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \equiv \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \equiv \frac{1}{\tan\theta}$

Fórmula fundamental da trigonometria e seus corolários

$$\mathrm{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$$
$$\tan^2 A + 1 = \sec^2 A$$
$$1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

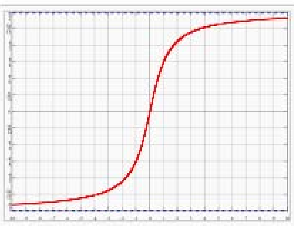
Identidades de soma e subtração

$$\mathrm{sen}(A \pm B) = \mathrm{sen}A\cos B \pm \mathrm{sen}B\cos A$$
$$\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \mathrm{sen}A\mathrm{sen}B$$
$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A\tan B}$$
$$\cot(A \pm B) = \frac{\cot A\ B \mp 1}{\cot B \pm \cot A}$$

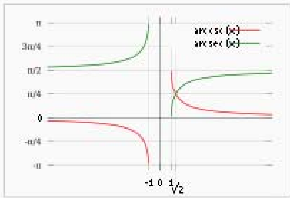
Fórmulas da duplicação do ângulo

$$\mathrm{sen}(2A) = 2\mathrm{sen}A\cos A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$$
$$\cos(2A) = \cos^2 A - \mathrm{sen}^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\mathrm{sen}^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$
$$\tan(2A) = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \frac{2\cot A}{\cot^2 A - 1} = \frac{2}{\cot A - \tan A}$$

Nome	Notação 1	Notação 2	Definição	Domínio como função real	Imagem (em radianos)
arcoseno	$y = \arcsin(x)$	$y = \sin^{-1}(x)$	$x = \sin(y)$	[−1,+1]	$-\pi/2 \le y \le \pi/2$
arcocosseno	$y = \arccos(x)$	$y = \cos^{-1}(x)$	$x = \cos(y)$	[−1,+1]	$0 \le y \le \pi$
arcotangente	$y = \arctan(x)$	$y = \tan^{-1}(x)$	$x = \tan(y)$	**R**	$-\pi/2 < y < \pi/2$
arcocotangente	$y = \mathrm{arccot}(x)$	$y = \cot^{-1}(x)$	$x = \cot(y)$	**R**	$0 < y < \pi$
arcosecante	$y = \mathrm{arcsec}(x)$	$y = \sec^{-1}(x)$	$x = \sec(y)$	]−∞,−1] ou [1,+∞[	$0 \le y < \pi/2$ ou $\pi/2 < y \le \pi$
arcocosecante	$y = \mathrm{arccsc}(x)$	$y = \csc^{-1}(x)$	$x = \csc(y)$	]−∞,−1] ou [1,∞[	$-\pi/2 \le y < 0$ ou $0 < y \le \pi/2$



Arcotangente.



Arcosecante e arcocosecante.

Derivada do Arco Seno

Sabemos que a função $y = \text{sen}\, x$ é derivável no intervalo aberto $-\pi/2 < y < \pi/2$ e que sua derivada, o cosseno, é positiva. Por esta razão, o Teorema 5 nos garante que a função inversa $y = \text{arc sen}\,(x)$ (o *arco seno* de x) é derivável no intervalo $-1 < x < 1$. Entretanto, não podemos esperar que a inversa seja derivável em $x = -1$ ou $x = 1$, porque as tangentes do gráfico são verticais nesses pontos (Figura 2.49).

Encontramos a derivada de $y = \text{arc sen}\, x$ como se segue:

$$y = \text{arc sen}\ x$$

$$\text{sen}\ y = x \qquad \text{Relação da função inversa}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}\ y) = \frac{d}{dx}x \qquad \text{Derivando os dois membros}$$

$$\cos y\,\frac{dy}{dx} = 1 \qquad \text{Derivação implícita}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos\ y}.$$

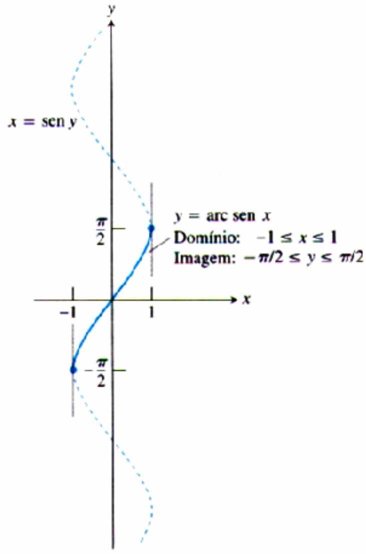


FIGURA 2.49 O gráfico de $y = \text{arc sen}\, x$ possui tangentes verticais em $x = -1$ e $x = 1$.

A divisão do último passo é segura, porque $\cos y \neq 0$ para $-\pi/2 < y < \pi/2$. Na verdade, $\cos y$ é *positivo* para $-\pi/2 < y < \pi/2$, então podemos substituir $\cos y$ por $\sqrt{1-(\text{sen}\, y)^2}$, que é $\sqrt{1-x^2}$. Logo,

$$\frac{d}{dx}(\text{arc sen}\ x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Se u é uma função derivável de x com $|u| < 1$, aplicamos a Regra da Cadeia para obter

$$\boxed{\frac{d}{dx}\text{arc sen}\ u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}, \qquad |u| < 1.}$$

Exemplo 2 Aplicando a Fórmula

$$\frac{d}{dx}(\text{arc sen}\ x^2) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\cdot\frac{d}{dx}(x^2) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

Regra da cadeia
(ou derivada da função vezes a derivada do argumento da função)

Derivada do Arco Tangente

Embora a função $y = \text{arc sen}\,(x)$ tenha um domínio um tanto estreito de $[-1, 1]$, a função $y = \text{arc tg}\,x$ é definida para todos os números reais. Como veremos, ela também é derivável para todos os números reais. A derivação ocorre exatamente como a função arco seno.

$$
\begin{aligned}
y &= \text{arc tg}\,x & & \\
\text{tg}\,y &= x & & \text{Relação da função inversa} \\
\frac{d}{dx}(\text{tg}\,y) &= \frac{d}{dx}x & & \\
\sec^2 y\,\frac{dy}{dx} &= 1 & & \text{Derivação implícita} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sec^2 y} & & \\
&= \frac{1}{1+(\text{tg}\,y)^2} & & \text{Identidade trigonométrica: } \sec^2 y = 1 + \text{tg}^2\,y \\
&= \frac{1}{1+x^2} & &
\end{aligned}
$$

A derivada é definida para qualquer número real. Se u é uma função derivável de x, então temos a fórmula da Regra da Cadeia:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\,\text{arc tg}\,u = \frac{1}{1+u^2}\,\frac{du}{dx}.}$$

Exemplo 3 Determinando a Velocidade de uma Partícula em Movimento

Uma partícula se desloca ao longo do eixo x de modo que em qualquer instante $t \geqslant 0$ sua posição seja dada por $x(t) = \text{arc tg}\,\sqrt{t}$. Qual será a velocidade da partícula quando $t = 16$?

Solução

$$v(t) = \frac{d}{dt}\,\text{arc tg}\,\sqrt{t} = \frac{1}{1+(\sqrt{t})^2}\cdot\frac{d}{dt}\sqrt{t} = \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}$$

Quando $t = 16$, a velocidade é

$$v(16) = \frac{1}{1+16}\cdot\frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{136}.$$

Derivada do Arco Secante

Encontramos a derivada de $y = \text{arc sec } x$, $|x| > 1$, começando como fizemos com as outras funções trigonométricas inversas.

$$y = \text{arc sec } x$$

$$\sec y = x$$

Relação da função inversa

$$\frac{d}{dx}(\sec y) = \frac{d}{dx}x$$

$$\sec y \ \text{tg } y \ \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \ \text{tg } y}$$

Como $|x| > 1$, y está em $(0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$ e $\sec y \ \text{tg } y \neq 0$.

Para expressar o resultado em termos de x, usamos as relações

$$\sec y = x \qquad \text{e} \qquad \text{tg } y = \pm\sqrt{\sec^2 y - 1} = \pm\sqrt{x^2 - 1}$$

para obter

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Podemos fazer algo com o sinal $\pm$? Basta olhar a Figura 2.50 para ver que o coeficiente angular do gráfico $y = \text{arc sec } x$ é sempre positivo. Isso significa que

$$\frac{d}{dx}\text{arc sec } x = \begin{cases} +\dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} & \text{se } x > 1 \\ -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

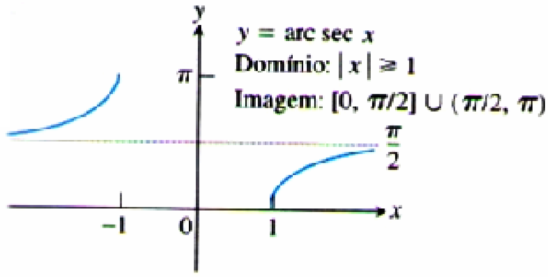


FIGURA 2.50 O coeficiente angular da curva $y = \text{arc sec } x$ é positivo para $x < -1$ e $x > 1$.

Com o símbolo de valor absoluto, podemos escrever

$$\frac{d}{dx}\text{arc sec } x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Nenhum símbolo $\pm$ é necessário nessa nova fórmula. Se u é uma função derivável de x com $|u| > 1$, temos

$$\boxed{\frac{d}{dx}\text{arc sec } u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}\frac{du}{dx}, \qquad |u| > 1}$$

Exemplo 4 Usando a Fórmula

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,sec}(5x^4) = \frac{1}{|5x^4|\sqrt{(5x^4)^2-1}}\frac{d}{dx}(5x^4)$$
$$= \frac{1}{5x^4\sqrt{25x^8-1}}(20x^3)$$
$$= \frac{4}{x\sqrt{25x^8-1}}$$

Derivadas das Outras Três

Podemos usar a mesma técnica para encontrar as derivadas das outras três funções trigonométricas inversas: arc sen, arc tg e arc sec, mas isso não é necessário, graças às identidades a seguir.

Identidades da Função Inversa — Co-função Inversa

$$\operatorname{arc\,cos} x = \pi/2 - \operatorname{arc\,sen} x$$
$$\operatorname{arc\,cotg} x = \pi/2 - \operatorname{arc\,tg} x$$
$$\operatorname{arc\,cosec} x = \pi/2 - \operatorname{arc\,sec} x$$

Resumindo, as derivadas das funções trigonométricas inversas são:

$$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{sen}^{-1}u\right] = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\left[\cos^{-1}u\right] = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{tg}^{-1}u\right] = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\left[\operatorname{cotg}^{-1}u\right] = \frac{-1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\sec^{-1}u\right] = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\left[\operatorname{cossec}^{-1}u\right] = \frac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

validas para $-1 < u < 1$

Exercício 2

Encontre as derivada de y em relação a variável apropriada

1. $y = \operatorname{arc\,cos}(x^2)$
2. $y = \operatorname{arc\,cos}(1/x)$
3. $y = \operatorname{arc\,sen}\sqrt{2}t$
4. $y = \operatorname{arc\,sen}(1-t)$
5. $y = \operatorname{arc\,sec}(2s+1)$
6. $y = \operatorname{arc\,sec} 5s$

2.2) Funções exponenciais e logarítmicas.

Quando aplicamos a definição de derivada a $f(x) = a^x$, vemos que a derivada é um múltiplo constante do próprio a^x:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(a^x) &= \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} && \text{Definição de derivada} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} && a^{x+h} = a^x \cdot a^h \\
&= \lim_{h\to 0} a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} && \text{Fatore isolando } a^x \\
&= a^x \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}}_{\text{um número fixo } L} && a^x \text{ é constante quando } h \to 0.
\end{aligned}$$

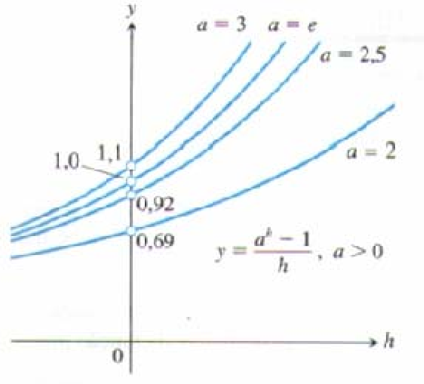


FIGURA 2.51 A posição da curva $y = (a^h - 1)/h$, $a > 0$, varia continuamente com a.

O problema que surge é que para cada a o valor de L no limite acima é diferente (ver Fig. 2.51) mas quando $a = e \approx 2.71$ temos $L = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(e^x) &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{e^h - 1}{h}\right) \cdot e^x \\
&= 1 \cdot e^x \\
&= e^x.
\end{aligned}$$

Em outras palavras, a derivada dessa função particular é ela mesma!

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Se u é uma função derivável de x, então temos

$$\boxed{\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}.}$$

OBS: A letra ***e*** é conhecida como número de número de Euler (pronuncia-se óilar), assim chamado em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler, é a base dos logaritmos naturais. As variantes do nome do número incluem: número de Napier, constante de Néper, número neperiano, constante matemática e número exponencial, etc. A primeira referência à constante foi publicada em 1618 na tabela de um apêndice de um trabalho sobre logaritmos de John Napier.

O Número de Euler com os primeiros 200 dígitos decimais

$$e = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\ 66249\ 77572\ 47093\ 69995$$
$$95749\ 66967\ 62772\ 40766\ 30353\ 54759\ 45713\ 82178\ 52516\ 64274$$
$$27466\ 39193\ 20030\ 59921\ 81741\ 35966\ 29043\ 57290\ 03342\ 95260$$
$$59563\ 07381\ 32328\ 62794\ 34907\ 63233\ 82988\ 07531\ 95251\ 01901\ \ldots$$

Curiosidades em http://pt.wikipedia.org/wiki/Número_de_Euler

Alguma outra função também é sua própria derivada?

A função zero também é sua própria derivada, mas raramente vale a pena mencionar isso. (Seu valor é sempre 0, assim como seu coeficiente angular.) Entretanto, além de e^x, podemos ver que qualquer *múltiplo* constante de e^x também é sua própria derivada:

$$\frac{d}{dx}(c \cdot e^x) = c \cdot e^x.$$

A próxima questão óbvia é se ainda há *outras* funções que são suas próprias derivadas, mas dessa vez a resposta é não. As únicas funções que satisfazem a condição $dy/dx = y$ são as funções da forma $y = ke^x$ (veja que a função zero pode ser incluída nessa categoria).

Exemplo 1 Derivando Exponenciais

(a) $\dfrac{d}{dx}(e^{5x}) = e^{5x} \cdot \dfrac{d}{dx}(5x) = 5e^{5x}$ $\quad u = 5x$

(b) $\dfrac{d}{dx}(e^{kx}) = e^{kx} \cdot \dfrac{d}{dx}(kx) = ke^{kx}$ $\quad u = kx$, qualqu

(c) $\dfrac{d}{dx}(e^{-x}) = -e^{-x}$ $\quad u = -1 \cdot x$

(d) $\dfrac{d}{dx}(e^{x^2}) = e^{x^2} \cdot \dfrac{d}{dx}(x^2) = 2xe^{x^2}$ $\quad u = x^2$

(e) $\dfrac{d}{dx}e^{\operatorname{sen} x} = e^{\operatorname{sen} x} \cdot \dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x$ $\quad u = \operatorname{sen} x$

Variação Exponencial

Em muitos casos na ciência, algumas quantidades positivas aumentam ou diminuem a taxas que, em um dado instante t, são proporcionais à quantidade no instante t. Na Seção 5.4, mostramos que nesses casos a quantidade pode ser representada por uma equação na forma $y = y_0e^{kt}$, onde y_0 é a quantidade no instante $t = 0$.

A equação

$$y = y_0e^{kt} \tag{4}$$

é chamada de **lei da variação exponencial**.

Exemplo 2 Prevendo a Incidência de uma Doença

Um modelo para o modo como as doenças se espalham considera que a taxa à qual o número y de pessoas infectadas varia é proporcional ao próprio y. Quanto maior o número de pessoas infectadas, mais rápido a doença vai se espalhar. Quanto menor o número de infectados, mais lentamente a doença se espalha. Se y_0 é o número de pessoas infectadas no instante $t = 0$, então o número de pessoas infectadas num futuro próximo será de aproximadamente

$$y = y_0e^{kt}.$$

Usaremos essa equação para responder a perguntas sobre o curso de uma determinada doença. Especificamente, suponha que um programa mundial de erradicação esteja reduzindo o número y de casos a uma taxa de 20% ao ano. Hoje há 10.000 casos confirmados e queremos saber quantos anos serão necessários para reduzir esse número a 1.000.

Solução

Começando com a equação $y = y_0e^{kt}$, precisamos encontrar três coisas:

1. o valor de y_0
2. o valor de k
3. o valor de t quando $y = 1.000$.

O valor de y_0

Se começarmos a contar o tempo hoje, então $y = 10.000$ quando $t = 0$, portanto $y_0 = 10.000$. Então, nossa equação é

$$y = 10.000\, e^{kt}. \tag{5}$$

O valor de k

A informação disponível nos diz que quando $t = 1$ (isto é, quando um ano se passou) o número de casos será 80% do valor presente, ou 8.000. Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} 10.000\, e^{k(1)} &= 8.000 && \text{equação (5) quando } t = 1,\ y = 8.000. \\ e^{k} &= 0{,}8 \\ \ln e^{k} &= \ln 0{,}8 && \text{Logaritmo dos dois membros} \\ k &\approx -0{,}22 && \text{Resultado da calculadora.} \end{aligned}$$

O valor de t quando $y = 1.000$

Obtemos o valor de t resolvendo a seguinte equação:

$$\begin{aligned} 10.000\, e^{-0{,}22t} &= 1.000 && \text{eq. (5) quando } k = -0{,}22,\ y = 1.000 \\ e^{-0{,}22t} &= 0{,}1 \\ \ln e^{-0{,}22t} &= \ln 0{,}1 && \text{Logaritmo dos dois membros} \\ -0{,}22t &\approx -2{,}3 \\ t &\approx 10{,}5. \end{aligned}$$

O número de casos será reduzido dos 10.000 iniciais para 1.000 em aproximadamente 10,5 anos.

Derivada de a^x

E as funções exponenciais com base diferente de e? Vamos considerar que essa base é positiva e diferente de 1 (pois números negativos para potências reais arbitrárias nem sempre são números reais) e $y = 1^x$ é uma função constante.

Se $a > 0$ e $a \neq 1$, podemos escrever a^x em termos de e^x. A fórmula para fazer isso é

$$a^x = e^{x \ln a},$$

revisada no Capítulo "Preliminares", Seção 4. Podemos encontrar a derivada de a^x usando a Regra da Cadeia.

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{x \ln a} = e^{x \ln a} \cdot \frac{d}{dx}(x \ln a) = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a.$$

Se u for uma função derivável de x, então teremos a regra a seguir.

> Para $a > 0$ e $a \neq 1$,
>
> $$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a \frac{du}{dx}.$$

Derivada de ln x

Agora que conhecemos a derivada de e^x, é relativamente fácil encontrar a derivada de sua função inversa, $\ln x$.

$$y = \ln x$$

$$e^y = x \qquad \text{Relação da função inversa}$$

$$\frac{d}{dx}(e^y) = \frac{d}{dx}(x) \qquad \text{Derivação implícita}$$

$$e^y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

Se u for uma função derivável de x e $u > 0$,

$$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}.$$

Derivada de $\log_a x$

Para encontrar a derivada de $\log_a x$ com uma base arbitrária ($a > 0$, $a \neq 1$), usaremos a fórmula para mudança de base dos logaritmos (estudada no Capítulo "Preliminares", Seção 4) para expressar $\log_a x$ em termos de logaritmos naturais, como se segue:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

O restante é fácil:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \log_a x &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right) \\ &= \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{d}{dx} \ln x \qquad \text{Pois } a \text{ é uma constante} \\ &= \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x \ln a}. \end{aligned}$$

Então, se u é uma função derivável de x e $u > 0$, a fórmula é como se segue.

Para $a > 0$ e $a \neq 1$,

$$\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{1}{u \ln a} \frac{du}{dx}.$$

Exemplo 5 O Longo Caminho com a Regra da Cadeia

Determine dy/dx se $y = \log_a a^{\text{sen}\, x}$.

Solução Trabalhando cuidadosamente de fora para dentro, aplicamos a Regra da Cadeia para obter:

$$\frac{d}{dx}(\log_a a^{\text{sen}\, x}) = \frac{1}{a^{\text{sen}\, x}\ln a}\cdot\frac{d}{dx}(a^{\text{sen}\, x}) \qquad \log_a u, \quad u = a^{\text{sen}\, x}$$

$$= \frac{1}{a^{\text{sen}\, x}\ln a}\cdot a^{\text{sen}\, x}\ln a\cdot\frac{d}{dx}(\text{sen}\, x) \qquad a^u, \quad u = \text{sen}\, x$$

$$= \frac{a^{\text{sen}\, x}\ln a}{a^{\text{sen}\, x}\ln a}\cdot\cos x$$

$$= \cos x.$$

No Exemplo 5, poderíamos ter poupado muito trabalho se tivéssemos percebido no início que $\log_a a^{\text{sen}\, x}$, sendo composta de funções inversas, é igual a $\text{sen}\, x$. Sempre que possível, é aconselhável simplificar funções *antes* de derivá-las. Por outro lado, é confortador saber que todas essas regras realmente funcionam se aplicadas corretamente.

Regra de Derivação para Potências Reais Arbitrárias

Agora estamos prontos para provar a Regra de Derivação de Potências em sua forma final. Se $x > 0$, podemos escrever qualquer potência real de x como uma potência de e, especificamente

$$x^n = e^{n\ln x}.$$

Isso nos permite derivar x^n para qualquer número real n, como se segue:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = \frac{d}{dx}(e^{n\ln x})$$

$$= e^{n\ln x}\cdot\frac{d}{dx}(n\ln x) \qquad e^u, \quad u = n\ln x$$

$$= e^{n\ln x}\cdot\frac{n}{x}$$

$$= x^n\cdot\frac{n}{x}$$

$$= nx^{n-1}.$$

A Regra da Cadeia amplia esse resultado para a forma final da Regra de Derivação de Potências.

Regra 8 Regra da Potenciação para Potências Arbitrárias Reais

Se u é uma função positiva derivável de x e n é qualquer número real, então u^n é uma função derivável de x e

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}. \qquad \textbf{(11)}$$

Exemplo 6 Usando a Regra de Derivação de Potências com Toda a sua Potência

(a) Se $y = x^{\sqrt{2}}$, então

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2}x^{(\sqrt{2}-1)}.$$

(b) Se $y = (2 + \operatorname{sen} 3x)^{\pi}$, então

$$\frac{d}{dx}(2 + \operatorname{sen} 3x)^{\pi} = \pi(2 + \operatorname{sen} 3x)^{\pi-1}(\cos 3x)\cdot 3$$
$$= 3\pi(2 + \operatorname{sen} 3x)^{\pi-1}(\cos 3x).$$

Exemplo 8 Derivação Logarítmica

Determine dy/dx para $y = x^x$, $x > 0$.

Solução

$$y = x^x$$
$$\ln y = \ln x^x \qquad \text{Logaritmo dos dois membros}$$
$$\ln y = x \ln x \qquad \text{Propriedade dos logaritmos}$$
$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(x \ln x) \qquad \text{Derivação implícita}$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$
$$\frac{dy}{dx} = y(\ln x + 1)$$
$$\frac{dy}{dx} = x^x(\ln x + 1)$$

Exercício 3

Determine dy/dx nos casos abaixo:

$y = e^{x+\sqrt{2}}$

$y = e^{-5x}$

$y = e^{-x/4}$

$y = x^2e^x - xe^x$

$y = \ln(x^2)$

$y = \ln(1/x)$

$y = \ln(x+2)$

Exercícios de Fixação

Derivadas de Funções

Encontre as derivadas das funções nos exercícios 1–42.

1. $y = x^5 - 0{,}125x^2 + 0{,}25x$

2. $y = x^3 - 3(x^2 + \pi^2)$

3. $y = x^7 + \sqrt{7}x - \dfrac{1}{\pi + 1}$

4. $y = (2x - 5)(4 - x)^{-1}$

5. $y = (\theta^2 + \sec\theta + 1)^3$

6. $s = \dfrac{\sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}}$

7. $s = \dfrac{1}{\sqrt{t} - 1}$

8. $y = 2\,\mathrm{tg}^2\, x - \sec^2 x$

9. $y = \dfrac{1}{\mathrm{sen}^2\, x} - \dfrac{2}{\mathrm{sen}\, x}$

10. $s = \cos^4(1 - 2t)$

11. $s = \mathrm{cotg}^3\left(\dfrac{2}{t}\right)$

12. $s = (\sec t + \mathrm{tg}\, t)^5$

13. $r = \sqrt{2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}$

14. $r = \mathrm{sen}\,(\theta + \sqrt{\theta + 1})$

15. $y = \dfrac{1}{2}x^2\,\mathrm{cosec}\,\dfrac{2}{x}$

16. $y = x^{-1/2}\sec(2x)^2$

17. $y = 5\,\mathrm{cotg}\, x^2$

18. $y = x^2\,\mathrm{sen}^2(2x^2)$

19. $s = \left(\dfrac{4t}{t + 1}\right)^{-2}$

20. $y = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{1 + x}\right)^2$

21. $y = 4x\sqrt{x + \sqrt{x}}$

22. $r = \left(\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta - 1}\right)^2$

23. $y = 20(3x - 4)^{1/4}(3x - 4)^{-1/5}$

24. $y = \dfrac{3}{(5x^2 + \mathrm{sen}\, 2x)^{3/2}}$

25. $y = \dfrac{1}{4}xe^{4x} - \dfrac{1}{16}e^{4x}$

26. $y = x^2e^{-2/x}$

27. $y = \ln(\mathrm{sen}^2\,\theta)$

28. $y = \log_2(x^2/2)$

29. $y = \log_5(3x - 7)$

30. $y = 8^{-t}$

31. $y = 5x^{3,6}$

32. $y = \sqrt{2}x^{-\sqrt{2}}$

33. $y = (x + 2)^{x+2}$

34. $y = 2(\ln x)^{x/2}$

35. $y = \mathrm{arc\ sen}\,\sqrt{1 - u^2}, \quad 0 < u < 1$

36. $y = \ln \mathrm{arc\ cos}\, x$

37. $y = z\,\mathrm{arc\ cos}\, z - \sqrt{1 - z^2}$

38. $y = t\,\mathrm{arc\ tg}\, t - \dfrac{1}{2}\ln t$

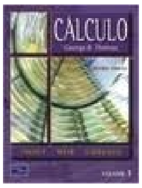
39. $y = (1 + t^2)\,\mathrm{arc\ cotg}\, 2t$

40. $y = z\,\mathrm{arc\ sec}\, z - \sqrt{z^2 - 1}, \quad z > 1$

41. $y = \mathrm{arc\ cosec}\,(\sec\theta), \quad 0 < \theta < \pi/2$

Respostas disponíveis no livro texto.

Livro texto:



Thomas G. B., Finney R. L., Weir M. D., Giordano F. R., Cálculo, Vol. 1, Editora Pearson, Ed. 10 ou 11 – Addison Wesley, São Paulo.

Estudar os exercícios resolvidos sobre derivadas nos endereço eletrônicos abaixo:
http://www.mtm.ufsc.br/~azeredo/calculos/Acalculo/index.html
http://fisica.uems.br/arquivos/calc1not/derivada_complemento.pdf
http://www1.univap.br/~spilling