Transformadas de Laplace

Prof. Dra. Priscila Freitas-Lemes

UniVap

Introdução

- Em cálculo, você aprendeu que derivação e integração transformam uma função em outra.

Exemplo: $f(x) = x^2$

$\frac{d}{dx}x^2 = 2x$ -- função linear

$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$ -- família de polinômios cúbicos

$\int_0^3 x^2\,dx = 9$ -- constante

Função de 1 Variável

Transformada

- Se f(x,y) for uma função de duas variáveis, então uma integral definida de f em relação a uma das variáveis define uma função na outra variável.

$$\int_1^2 2xy^2\,dx = x^2y^2 = (4y^2 - y^2) = 3y^2$$

Analogamente, $\int_a^b K(s,t)f(t)$ transforma uma função f(t) em uma função da variável s. Estamos interessados em **transformadas integrais**.

Definição

- Transformada de Laplace:

Se f uma definida por $t \geq 0$, então a integral:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\ f(t)\,dt$$

é chamada de **transformada de Laplace** de f.

Exemplo 1

- Calcule $\mathcal{L}\{1\}$.

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}(1)dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-st}dt$$
$$= -\frac{1}{s}.e^{-st}\Big|_0^\infty$$
$$= -\frac{1}{s}(0-1)$$
$$= \frac{1}{s}$$

Exemplo 3

- Calcule $\mathcal{L}\{e^{-3t}\}$.

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \int_0^\infty e^{-st}(e^{-3t})dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-t(s+3)}dt$$

$$= -\frac{1}{s+3}.e^{-t.(s+3)}\Big|_0^\infty$$

$$= -\frac{1}{s+3}(0-1)$$

$$= \frac{1}{s+3}$$

Exemplo 4

- Calcule $\mathcal{L}\{2t + 10\}$.

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^{\infty} e^{-st}(2t+10)dt$$

$$= 2.\int_0^{\infty} e^{-st}\, t\, dt + 10\,.\int_0^{\infty} e^{-st}\, dt$$

$$= 2.\mathcal{L}\{t\} + 10.\,\mathcal{L}\{1\}$$

$$= \frac{2}{s^2} + \frac{10}{s}$$

Exemplo 5

- $\boldsymbol{f(t) = \begin{cases} -1; & 0 \leq t < 1 \\ 1; & t \geq 1 \end{cases}}$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^1 e^{-st}(-1)dt + \int_1^\infty e^{-st}(1)dt$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^1 -e^{-st}dt + \int_1^\infty e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s}.e^{-st}\Big|_0^1 - \frac{1}{s}.e^{-st}\Big|_1^\infty$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \left[\frac{1}{s}.e^{-s} - \frac{1}{s}\right] - \left[0 - \frac{1}{s}e^{-s}\right]$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2}{s}e^{-s} - \frac{1}{s}$$