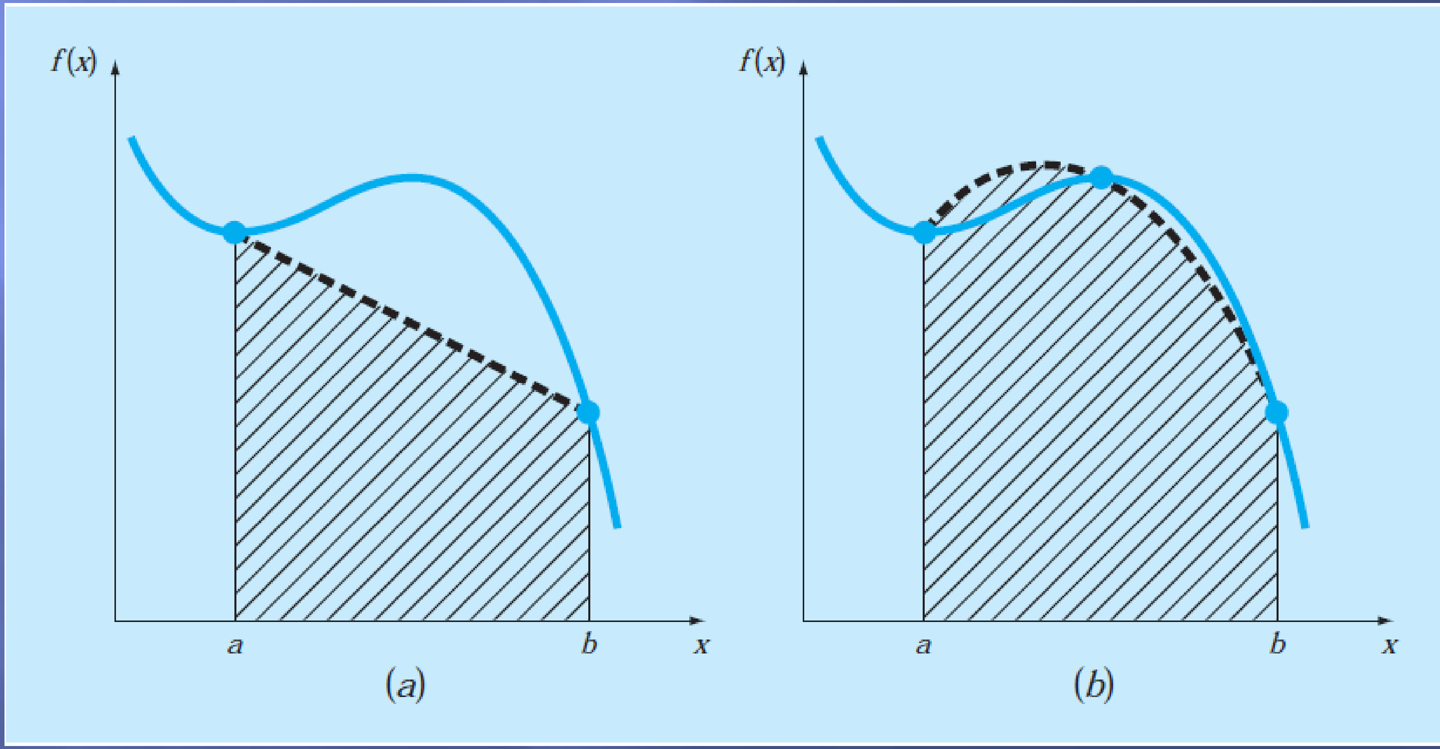
Universidade do Vale do Paraíba

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Prof. Dra. Priscila Freitas-Lemes Lourenço

Introdução

O objetivo desta aula é apresentar o método de integração numérica baseado nas fórmulas de Newton-Cotes onde aproximamos a função que se quer integrar por um polinômio cuja integração é trivial



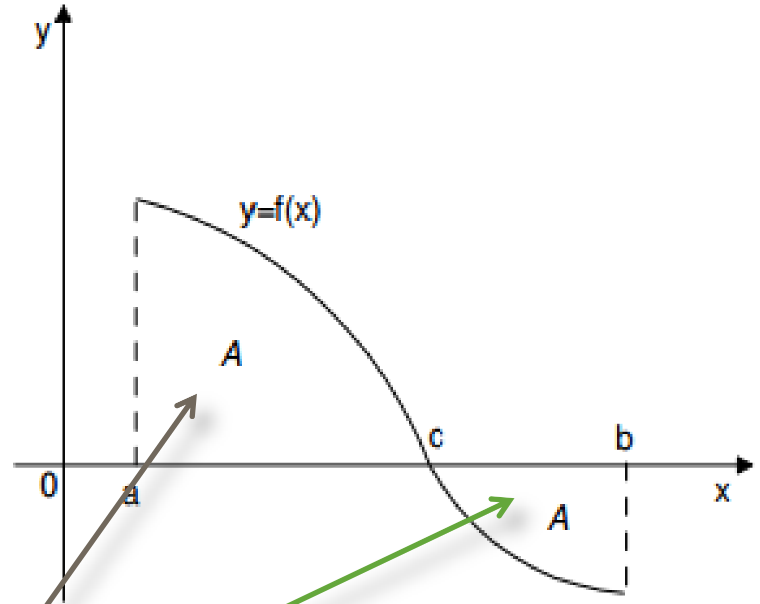
Introdução

Sabemos do Cálculo Diferencial e Integral que se $f(x)$ é uma função contínua em $[a, b]$, então esta função tem uma primitiva neste intervalo, ou seja, existe $F(x)$ tal que $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, com $F'(x) = f(x)$; demostra-se que, no intervalo $[a, b]$,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

tais métodos, embora variados, não se aplicam a alguns tipos de *integrandos* $f(x)$, não sendo conhecidas suas *primitivas* $F(x)$; para tais casos, e para aqueles em que a obtenção da primitiva, embora viável, é muito trabalhosa, podem-se empregar métodos para o cálculo do valor numérico aproximado de $\int_a^b f(x)dx$.

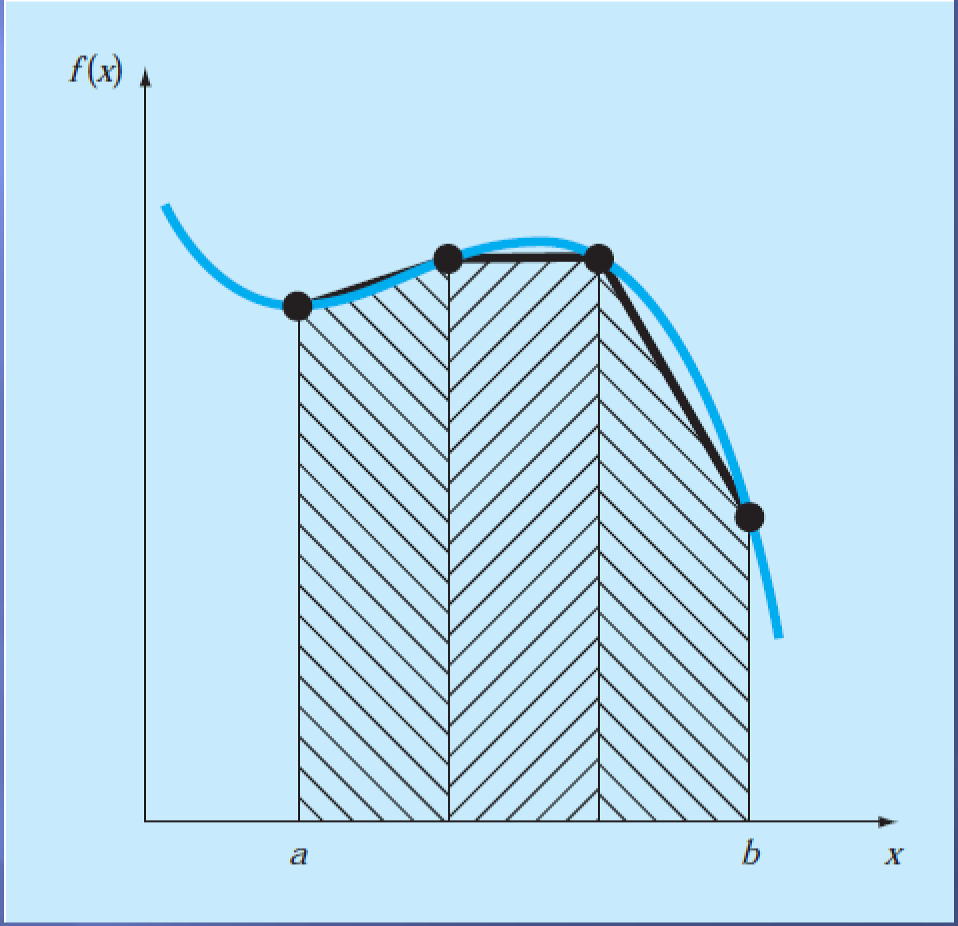
Introdução



$$A = \int_a^c f(x) + \int_c^b |f(x)|dx \qquad \text{ou} \qquad A = \int_a^b |f(x)|dx$$

A *idéia básica da integração numérica* é a substituição da função $f(x)$ por um polinômio que a aproxime razoavelmente no intervalo $[a, b]$. Assim o problema fica resolvido pela integração de polinômios, o que é trivial de se fazer. Com este raciocínio podemos deduzir fórmulas para aproximar $\int_a^b f(x)dx$.

Introdução



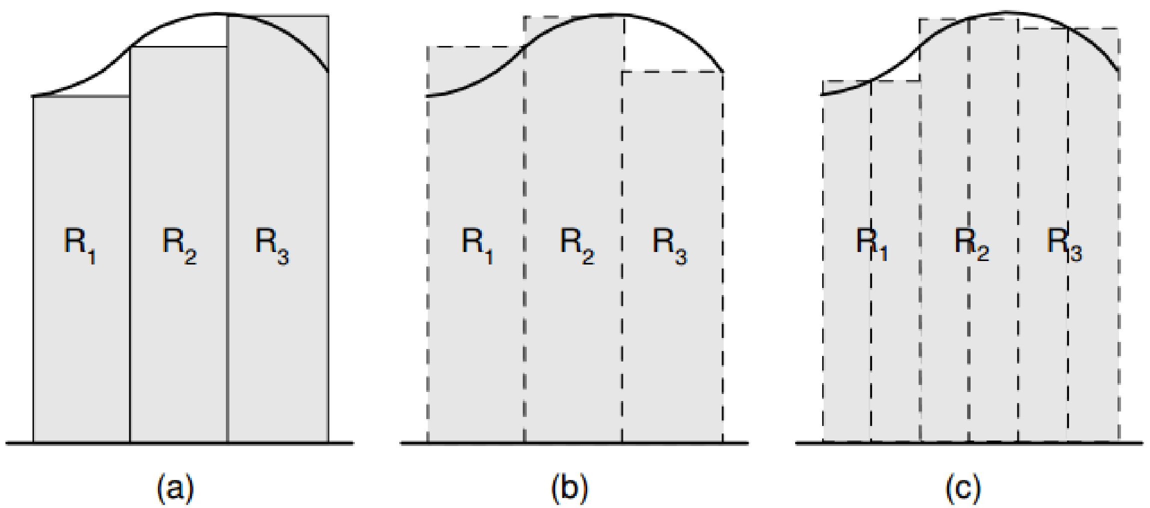
$$\int_a^b f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \dots + A_n f(x_n), x_i \in [a, b], \qquad i = 0, 1, \dots, n.$$

Métodos de Newton-Cotes

- Regra dos Retângulos
- Regra dos Trapézios
- Regra de Simpson

Regra do Retângulo

Nosso objetivo é calcular $\int_a^b f(x)dx$ pelo método da área dos retângulos. Tais retângulos podem ser considerados de diversas maneiras, conforme mostra as figuras abaixo:



Exemplo 1

Exemplo 1: Calcular $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$. Considere $n = 10$ e 4 casas decimais com arredondamento.

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{(1-0)}{10} = 0{,}1$$

Função!

i	Xi	F(xi)
0	$\frac{(0+0{,}1)}{2} = 0{,}05$	$\frac{0{,}05}{1+0{,}05^2} = 0{,}0499$

3,4699

$$R(0.1) = h\sum f(\bar{x}_i) = (0.1).(3.4699) = 0.34699$$

Exemplo 1

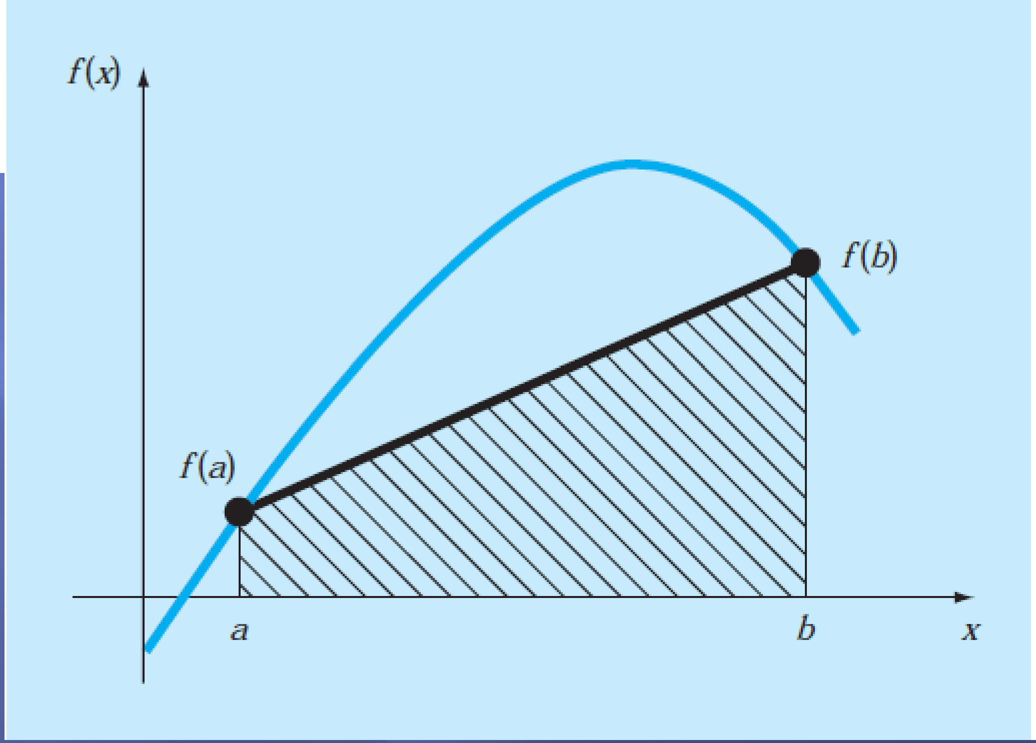
$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}(\ln(2)-\ln(1)) = 0{,}34657\,.$$

Regra dos Trapézios

Numericamente: A regra dos trapézios é obtida aproximando-se f por um polinômio interpolador do 1° grau (ao invés de zero, como na regra dos retângulos). Se usarmos a fórmula de Lagrange para expressar o polinômio $p_1(x)$ que interpola $f(x)$ em x_0 e x_1 temos:

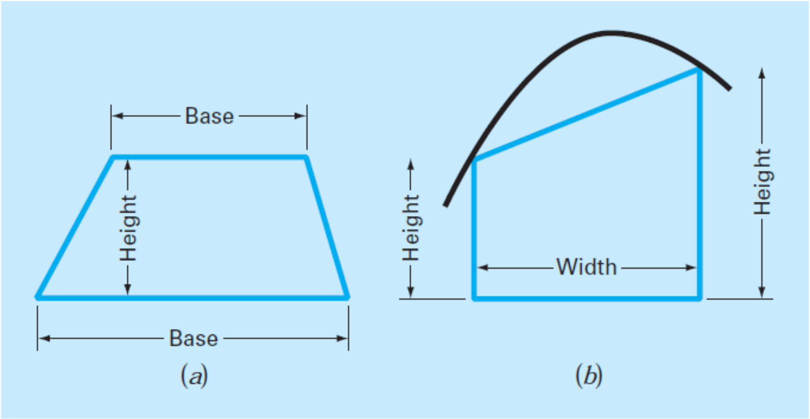
$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{a=x_0}^{b=x_1} p_1(x)dx = \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{(x-x_1)}{-h}f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{h}f(x_1)\right]dx = I_T$$

Assim, $I_T = \frac{h}{2}$



bases $f(x_0)$ e $f(x_1)$.

Regra do Trapézio



Dividindo o intervalo [a, b] em n subintervalos, pela regra dos trapézios, o resultado, que ser indicado por $T(h)$, é dada pela fórmula:

$$T(h_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}\right).h_i$$

Como h_i é constante, temos $h = \dfrac{b-a}{n}$. Então :

$$\boxed{T(h_n) = h\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}\right)}$$

ou

$$\boxed{T(h_n) = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]}$$

Exemplo 3:

Exemplo 1: Calcular $\int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x} dx$ pela regra dos trapézios e, depois, analiticamente. Considere $n = 6$ e 4 casas decimais com arredondamento.

$$h = \frac{b - a}{n} = (3.6 - 3.0) / 6 = 0.1$$

i	x_i	$f(x_i)$
0	3.0	0.3333
1	3.1	0.3226
2	3.2	0.3125
3	3.3	0.3030
4	3.4	0.2941
5	3.5	0.2857
6	3.6	0.2778

Exemplo 3:

$$T(h_6) = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_5) + f(x_6)]$$

$$T(0.1) = \frac{0.1}{2}\ (3.6469) = 0{,}182345$$

método analítico:

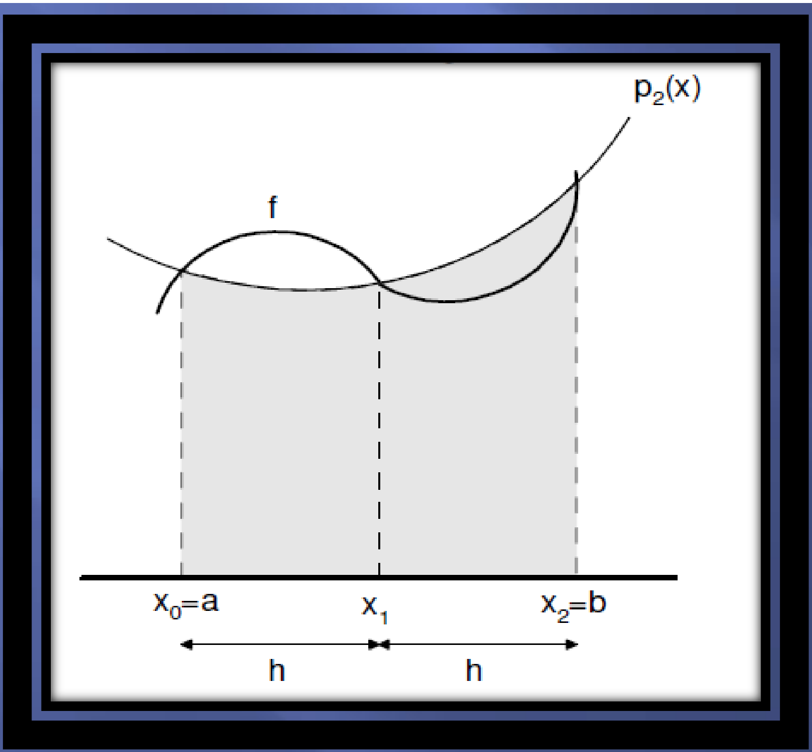
$$\int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x}\, dx = \ln(x)\Big]_{3,0}^{3,6} = ln(3.6) - ln(3.0) = 0.18232156$$

A Regra de Simpson Repetida

8.4.1 Regra de Simpson Repetida

Aplicando a regra de Simpson repetidas vezes no intervalo $[a, b] = [x_0, x_n]$. Vamos supor que x_0, x_1, ..., x_n são pontos igualmente espaçados, $h = x_{i+1} - x_i$, e n é par (isto é condição necessária pois cada parábola utilizará três pontos consecutivos). Assim teremos:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \boxed{S(h_n) = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]}$$



Exemplo 1

Exemplo 1: Calcular uma aproximação para $\int_0^1 e^x dx$ usando a regra de Simpson com $n = 10$.

a) Número de intervalos:

$$n = 10$$

b) Tamanho do intervalo:

$$h = \frac{b-a}{n} = (1-0)/10 = 0.1$$

$$S(h_{10}) = \frac{0,1}{3}[e^{0,0} + 4e^{0,1} + 2e^{0,2} + 4e^{0,3} + \ldots + 2e^{0,8} + 4e^{0,9} + e^{1,0}] = 1,71829$$

i	x_i	$f(x_i)$	c_i	$c_i\, f(x_i)$
0	0.0	1	1	1
1	0.1	1.1052	4	4.4208
2	0.2	1.2214	2	2.4428
3	0.3	1.3499	4	5.3996
4	0.4	1.4918	2	2.9836
5	0.5	1.6487	4	6.5948
6	0.6	1.8221	2	3.6442
7	0.7	2.0138	4	8.0552
8	0.8	2.2255	2	4.4510
9	0.9	2.4596	4	9.8384
10	1.0	2.7183	1	2.7183
Σ	–	–	–	**51.5487**

$$\int_0^1 e^x dx = e^x \Big]_0^1 = e^1 - e^0 = 2{,}7182818 - 1 = 1{,}7182818$$